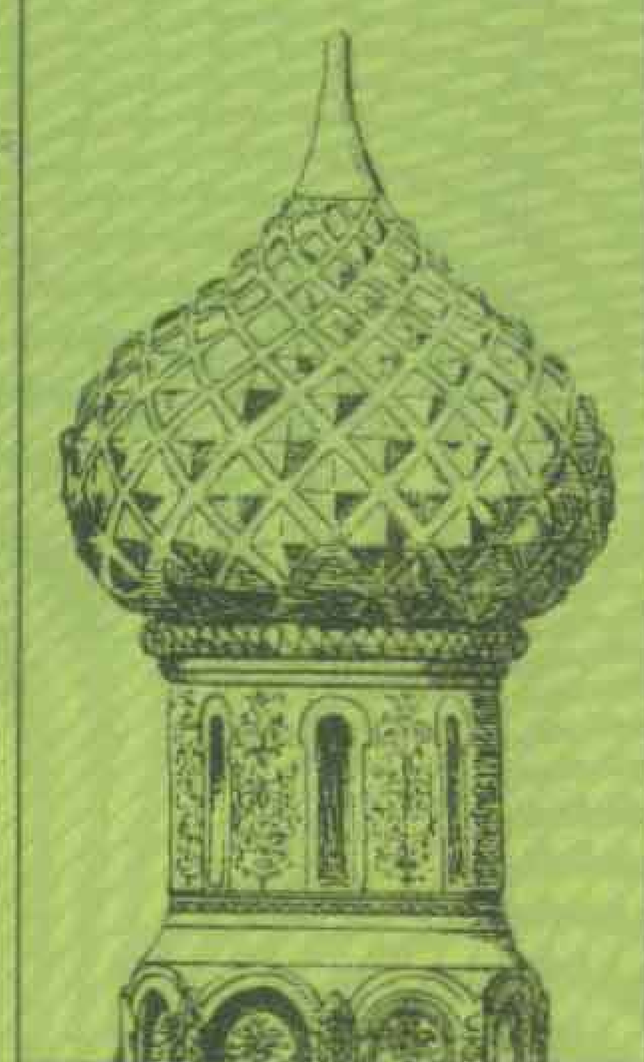


吉米多维奇数学分析习题集学习指引

(第二册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校


高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道理、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-032356-6



定价 39.00 元

吉米多维奇
数学分析习题集
学习指引

(第二册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUEXI ZHIYIN


高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道路、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集学习指引. 第2册/谢惠民，沐定夷编著.—北京：高等教育出版社，2011.4
ISBN 978-7-04-032356-6

Ⅰ. ①吉… Ⅱ. ①谢…②沐… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-题解 Ⅳ. ①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第055450号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	26.25	版　　次	2011年4月第1版
字　　数	600 000	印　　次	2011年4月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 32356-00

使用说明

《学习指引》的第二册对应于《吉米多维奇数学分析习题集》(以下简称为《习题集》) 的第三章、第四章和第五章, 即从不定积分、定积分到无穷级数.

与本书的第一册相同, 由于很多节内的习题量相当大, 含有不同的内容和层次, 因此在大多数节中, 都将习题分成若干小节. 例如 §3.1.7 就是第三章第 1 节的第 7 小节. 又如 §1.4.7, §2.8 和 §2.12.2 等则均见于《学习指引》的第一册.

这样的安排也会带来一些不便, 这就是在节内的各个小节之间的习题顺序与原有的题号顺序不完全一致. 为了方便读者对习题的检索, 本书的目录中在每一节和每一小节的标题后都在括号内标明它们所覆盖的习题编号. 这样的安排在第二册中只有一个例外, 即在 §3.1.8 小节集中了 §3.1 节中所有与双曲函数有关的习题, 但没有在目录中标出这些习题的位置变动.

本书在各节或各小节所覆盖的习题中只能选取部分习题进行讲解或作分析. 在解答时, 无论是计算题还是证明题一律用"**解**"开始. 在交叉引用前后的习题时, 如果它在本书有讲解, 则会指明所在的节或小节. 否则, 一般会简述其内容, 至于该题的完整叙述则请看《习题集》的全译本.

在不少节的最后, 本书会添加一小节, 称为补注, 其中包含对某些难题的解、对某些内容的注解和补充.

根据需要, 本书还增加了若干命题和少量例题, 其中命题按章编号, 例题不独立编号. 第二册在正文后设置一个附录, 其中列出前面所有命题的内容和页码.

本书的编写中利用了大量的参考资料. 在参考文献中只列出第二册引用到的书籍. 对于引用的论文, 只在引用处写明其所在杂志、标题、页码和年份.

本书采取以下常用的数学记号:

(1) 用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数, 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数, 用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数.

(2) 设 P, Q 为命题, 用 $P \iff Q$ 表示 P 与 Q 等价; 用 $P \Longrightarrow Q$ 表示若 P 成立, 则 Q 成立.

(3) 用记号"□"表示解、分析和证明等的结束.

附 下面列出在第二册中尚未解决的两个问题, 敬请读者赐教或告知有关文献.

(1) 证明: 当 $x \geqslant 1$ 时成立不等式:

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} + x^{-\frac{1}{x}} > 2.$$

(见 §5.9.2 的习题 3094 的一个底注, 但与该题的解无直接关系.)

(2) 证明: 当 $|x| > 1$ 时无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}$$

发散. (见 §5.9.2 的习题 3083.)

目　　录

第三章 不定积分

内容简介 这一章学习不定积分的计算. §3.1 包含了最为基本的积分方法和习题. 此后的 §3.2–§3.5 则按照被积函数为有理函数、无理函数、三角函数与其他超越函数分别介绍各种计算方法. §3.6 是综合和复习, 并含有少量带有理论性的习题.

对不定积分来说, 最基本的出发点就是第一册 §2.6.4 的习题 1259, 即在区间上导数处处等于 0 的函数只能是这个区间上的常值函数. 由此即可推出, 若在区间上定义的函数 $f(x)$ 有原函数, 则其所有原函数彼此之间只相差一个任意常数. 我们将 $f(x)$ 的所有原函数全体称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

在进入计算题之前, 先介绍下列结果. 它在理论和计算方面都是基本的.

命题 3.1 设在区间上定义的函数 $f(x)$ 有原函数, 则有以下结论成立:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则它的每一个原函数都是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则它的原函数中必有唯一的一个奇函数;

(3) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 则其所有原函数都是周期为 T 的周期函数与同一个线性函数之和.

证 用 $F(x)$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 于是在 f 的定义区间上有 $F'(x)=f(x)$.

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则有

$$[F(x)-F(-x)]'=f(x)+f(-x)=0,$$

由此可见 $F(x)-F(-x)=c$, 即在 f 的定义区间上为常值函数. 令 $x=0$ 代入, 可见 $c=0$. 于是有 $F(x)=F(-x)$, 即是偶函数[①] .

(2) 任取一个原函数 $F(x)$, 则 $F(x)-F(0)$ 也是原函数. 从 $F'(x)=f(x)$ 为偶函数出发, 可见 $[(F(x)-F(0))+(F(-x)-F(0))]'=f(x)-f(-x)=0$, 于是 $(F(x)-F(0))+(F(-x)-F(0))=c$ 为常值函数. 用 $x=0$ 代入可见 $c=0$. 于是得到 $F(x)-F(0)=-(F(-x)-F(0))$, 这表明 $F(x)-F(0)$ 为奇函数. 其他所有原函数 $F(x)+C$ $(C\neq -F(0))$ 在 $x=0$ 处不等于 0, 因此都不会是奇函数.

(3) 若 f 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 $T\,(>0)$ 的周期函数, 即有 $f(x+T)=f(x)$. 若 $F(x)$ 是一个原函数, 则 $[F(x+T)-F(x)]'=f(x+T)-f(x)=0$, 因此 $F(x+T)-F(x)=c$ 是常值函数. 用 $x=0$ 代入, 则 $c=F(T)-F(0)$, 于是就有 $F(x+T)-F(x)=c$.

这时考察函数 $G(x)=F(x)-\dfrac{c}{T}x$, 则就有

① 对于区间上定义的奇函数或偶函数, 其定义区间一定包含点 $x=0$.

$$G(x+T)-G(x)=[F(x+T)-\frac{c}{T}(x+T)]-[F(x)-\frac{c}{T}x]$$
$$=F(x+T)-F(x)-c=0,$$

因此 G 是周期为 T 的周期函数. 从而 $F(x)=G(x)+\frac{c}{T}x$, 即一个周期函数与一个线性函数之和. 可以看出, 由此加上任意常数得到的所有原函数中, 其中关于 x 的一次项 $\frac{c}{T}x$ 都是相同的. □

注 在学了第四章的定积分之后, 可以对于命题 3.1 给出新的证明, 参见 §4.2.5 的习题 2259 和 2267.

§3.1 最简单的不定积分 (习题 1628–1865)

内容简介 本节学习不定积分中最为基本的方法. 各个小节基本上按照方法将习题分类. 这里比较重要的是要学会换元法和分部积分法. 其中换元法有两种. 为简单起见, 假设以下出现的函数或导函数都是连续函数.

第一种换元法 (直接代换法) 是将不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 改写为
$$f(x)\,\mathrm{d}x=g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x,$$
于是通过代换 $u=\omega(x)$ 就得到
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x=\int g(u)\,\mathrm{d}u. \tag{3.1}$$
如果这时右边的不定积分能够求出为
$$\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C,$$
则答案为
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(\omega(x))+C.$$

由此可见, 这种方法包含三个要点. 首先是将被积函数 $f(x)$ 分拆为两个因子 $f(\omega(x))\omega'(x)$, 使得第二个因子与 $\mathrm{d}x$ 成为微分 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\omega(x)=\omega'(x)\,\mathrm{d}x$, 同时又使得第一个因子是 $u=\omega(x)$ 的函数; 其次是能够求出 $g(u)$ 的不定积分 $G(u)+C$; 最后必须将 $u=\omega(x)$ 代入到这个不定积分中, 得到以 x 为自变量的原函数全体.

由于以上的第一步经常是凑出来的, 而最后又有 $\mathrm{d}G(\omega(x))=g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x$, 因此这个方法也常称为凑微分法.

第二种换元法 (逆代换法) 是用某个可微函数 $x=\varphi(t)$ 代入到被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 中, 于是就得到
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$
这时如果上式右边的不定积分能够积出为 $F(t)+C$, 且 $x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 则就得到答案为
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(\varphi^{-1}(x))+C.$$

两种换元法很相似, 都要求在采用新变量后的不定积分能够积出来. 然而它们之间又有不同:

(1) 等式 (3.1) 主要是将左边积分号下的表达式凑成微分, 而等式 (3.2) 是用 $x = \varphi(t)$ 代入, 因此第二种换元法常称为代入法.

(2) 在得到 (3.1) 之前, 往往已经知道, 或者估计能够求得 $\int g(u)\,\mathrm{d}u = G(u) + C$, 因此在上式右边代入 $u = \omega(x)$ 就给出了问题的答案. 然而在用代入法时, 却往往是写出 (3.2) 的右边之后, 再看用什么方法求积. 若右边积不出, 则这次用 $x = \varphi(t)$ 的代入不成功, 还要另想别法, 其中包括用别的函数代入, 或用其他方法.

以下按照《习题集》原有的安排分成若干小节来学习. 除了 §3.1.1 为直接用积分表求积之外, 从 §3.1.2 到 §3.1.7 的每一小节的标题即指出了所用的主要方法, 但并非绝对. 有不少题可以考虑用其他方法来求解, 也许可能更好. 为此我们对部分题给出了多种解法以供比较. 又将分散在各个小节中有关双曲函数的习题全部集中在最后一个小节 §3.1.8 中, 其中包括对于双曲函数的基本知识的介绍.

本节以下提到的函数 $f(x)$ 等, 在不作其他说明时, 均假设是区间上的连续函数.

3.1.1 直接用积分表求积 (习题 1628–1653)

《习题集》在本节开始列出了最简单的积分表, 它相当于一般教科书中的积分表. 然而, 对本小节中的不定积分习题, 除了用最简单积分表中的公式之外, 还经常要利用不定积分的线性性质, 这就是在已知

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C,$$

且设 a, b 为常数时, 就有

$$\int [af(x) + bg(x)]\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + C.$$

由于这里的问题比较简单, 只举少数例题. 然而对于第一次学习积分的读者来说, 本小节的习题都是不可或缺的基础训练.

习题 1628 求 $\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x$.

解 用二项式定理将被积函数展开后即可逐项求积如下:

$$\begin{aligned}\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x &= \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\,\mathrm{d}x \\ &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1646 求 $\int \frac{\mathrm{e}^{3x} + 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数的分子在因式分解后可为分母整除, 因此可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{3x} + 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x &= \int (\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + x + C. \quad \square\end{aligned}$$

3.1.2 用线性代换求积 (习题 1654–1673)

本小节的求积都依赖于习题 1654 给出的公式, 这种方法称为用线性代换求积.

习题 1654 证明: 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$, 则

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \ \ (a\neq 0).$$

解 利用不定积分是求导运算的逆运算, 从题设条件有 $F'(x)=f(x)$, 因此只要用链式法则就有

$$\Big[\frac{1}{a}F(ax+b)\Big]' = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b),$$

这与所要求证的结论等价. □

注 习题 1654 既可以从第一种换元法 (即凑微分法) 来理解, 也可以从第二种换元法 (即代入法) 来理解. 下面对此作一些解释.

写出

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b),$$

并利用已知 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C$, 就可见上述不定积分的答案为

$$\frac{1}{a}F(u)\Big|_{u=ax+b}+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

由此可见, 这就是凑微分法的最简单情况之一.

现在对积分 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ 用第二种换元法, 令 $ax+b=t$, 即 $x=\frac{1}{a}(t-b)$, 则有

$$\begin{aligned}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x &= \int f(t)\Big(\frac{1}{a}(t-b)\Big)'\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由于已知有 $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$, 因此上述最后一式即等于 $\frac{1}{a}F(t)\Big|_{t=ax+b}+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

由此可见, 两种换元法的思路虽然不同, 但对于习题 1654 来说几乎没有区别. 本小节的标题表明, 它是用线性代换求不定积分的一种方法.

对于第一次学习不定积分的读者来说, 上述两种换元法的解释中还有两个值得注意之处, 它们都是不定积分中的基本常识.

一方面, 有了 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$ 之后, 那么也就成立 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$ 等等.

另一方面, 不定积分 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ 作为原函数全体的集合, 其自变量必须是 x, 因此在前面的解释中最后必须用 $u=ax+b$ 或者 $t=ax+b$ 代入, 才能得到正确的结果.

习题 1656 求 $\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解 用习题 1654 的结果可求积如下:

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}(2x-3) = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C. \quad \square$$

习题 1661 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

解 按照习题 1654 的方法可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{3}{2}x^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1668 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

解 用三角函数的半角公式即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} + C. \quad \square$$

利用线性代换可以从《习题集》中的基本积分公式得到如下含有参数的积分公式 (在被积函数中出现 a^2 时设 $a>0$), 它们在许多教科书中都作为基本公式出现. 本书以下也将直接引用.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C \ \ (\alpha \lessgtr 0).\end{aligned}} \tag{3.3}$$

3.1.3 用凑微分法求积 (习题 1674–1720)

如本节一开始所说, 第一种换元法是求不定积分的主要方法之一, 它的要点是将被积表达式凑成为某一个已知函数的微分, 故亦称为凑微分法. 这一小节的习题是这方面的基本训练. 当然其中的题也经常可以用其他方法求解.

如前所述, 在使用第一种换元法的公式 (3.1) 时, 实际上是分两步做, 即先将被积表达式看成为 $g(\omega(x))$ 与 $\mathrm{d}\omega = \omega'(x)\,\mathrm{d}x$ 之积, 然后令 $u=\omega(x)$, 再计算出 $f(u)$ 的不定积分为 $F(u)+C$, 最后用 $u=\omega(x)$ 代入.

从本小节的较后的习题可见, 上述第二步, 即求 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$, 也还可能再用凑微分法 (或其他方法) 做下去.

习题 1675 求 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

解 用 $x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x^3$ 不如用 $x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(1+x^3)$, 然后即可用凑微分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(1+x^3)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1680 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

解 利用 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}(2\sqrt{x})$, 即可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}=2\arctan\sqrt{x}+C.\quad\square$$

习题 1682 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 1 将积分中的被积函数改写如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

然后利用 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)$, 即可用凑微分法求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}\Big(\frac{1}{x}\Big)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C.\quad\square$$

解 2 也可以将以上计算改写为用第二种换元法 (即代入法), 所用的代换 $x=\dfrac{1}{t}$ 称为倒代换. 这时有 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=t\,\mathrm{d}\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}&=\int\frac{t\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{t}\Big)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln|t+\sqrt{1+t^2}\,|+C\\&=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 本题的被积函数在 $x=0$ 处无定义, 因此应当在两个区间 ($x>0$ 和 $x<0$) 上分别求积. 上述解 1 和解 2 都只对 $x>0$ 有效. 对于 $x<0$ 的另一半情况可以用代换 $x=-t$ 解决. 这与我们熟知的积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$ 相同.

为简明起见, 今后我们对类似的不定积分题一般只写出某些情况 (例如 $x>0$ 或 $t>0$ 等) 的求解过程和答案, 对于其余情况可用类似的代换得到. 对于被积函数为区间上的奇函数或偶函数的情况, 则可用命题 3.1 之 (1) 或 (2) 解决.

习题 1684 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 1 将被积函数的分母作类似于习题 1682 解 1 中的处理, 即可求积如下:

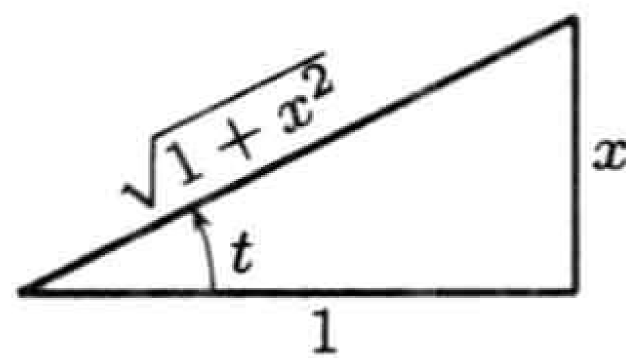
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.\quad\square$$

解 2 用倒代换 $x=1/t$ 可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.\quad\square$$

解 3 用三角代换 $x=\tan t$ 则可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^3 t}=\int\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.\quad\square$$



辅助三角形

注 在解 3 的代换中可设 $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, 从而对 $x\geqslant 0$ 和 $x<0$ 同时有效, 而解 1 和解 2 均只对 $x\geqslant 0$ 有效, 然后利用命题 3.1 可知其答案对 $x<0$ 也成立. 此外, 解 3 的最后一步要将 $\sin t$ 写成为 x 的函数, 这可以用附图中的辅助三角形来完成.

习题 1692 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

解 1 仿照习题 1682 解 1 的方法, 可凑微分求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}=-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}}$$
$$=-\ln(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}})+C$$
$$=x-\ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})+C.\quad\square$$

解 2 用代入法. 令 $\mathrm{e}^x=t$, 即 $x=\ln t$, 于是可将积分归结为习题 1682 如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}=-\ln\left(\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}\right)+C,$$

其中由于 $t=\mathrm{e}^x>0$, 在取对数时的绝对值号可以略去. 最后再用 $t=\mathrm{e}^x$ 代入即可得到与解 1 相同的答案. $\square$

习题 1700 (a) 求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

解 1　不妨设 $a,b\geqslant 0$, 且不同时为 0.

若 $a=b>0$, 则有

$$\int \frac{\sin x\cos x}{a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\sin^2 x+C.$$

若 $a\neq b$, 则可凑微分求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2]}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.\quad\square$$

解 2　利用

$$\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\mathrm{d}(\cos 2x),$$

即可凑微分求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\int \frac{\mathrm{d}\left(a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\right)}{\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.\quad\square$$

习题 1702 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

解　这可用 $\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (或者 $\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$) 凑微分求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\tan^2 x+2}=\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.\quad\square$$

下一个习题的答案是基本的积分公式之一, 其中所用的各种方法也都值得学习.

习题 1703 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解 1　利用 $(\tan u)'_u=\sec^2 u$ 和正弦函数的半角公式, 可凑微分求积如下:

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.\quad\square$$

解 2 也可以不用半角公式而凑微分求积如下:

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.\quad\square$$

解 3 利用所谓的万能代换 (参见后面的 §3.4.3), 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则就有

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

于是可求积如下:

$$I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.\quad\square$$

注 本题的答案还可有其他形式, 为今后引用方便将几个常用答案列表如下:

$$\boxed{\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}&=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C\\&=\ln|\csc x-\cot x|+C.\end{aligned}}\tag{3.4}$$

习题 1704 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 利用代换 $x+\frac{\pi}{2}=t$ 就有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)},$$

于是已经将问题归结为上一个习题, 以下只列出与 (3.4) 平行的几个答案. $\square$

$$\boxed{\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}&=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C\\&=\ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}}\tag{3.5}$$

习题 1712 求 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解 将被积函数的分子分母同除以 x^2, 然后可凑微分求积如下:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C. \quad \square$$

习题 1718 求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用三角恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 可将被积函数的分母改写为
$$\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2x),$$
然后利用凑微分
$$\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{d}(\cos 2x),$$
即可求积如下:
$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x} = -\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C. \quad \square$$

解 2 将被积函数的分子分母同除以 $\cos^4 x$, 然后可凑微分求积如下 (也就是作代换 $t=\tan x$):
$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x\,\mathrm{d}(\tan x)}{1+\tan^4 x} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+(t^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x)+C. \quad \square$$

注 此题的两个解所得到的答案不同, 这在不定积分求积中是常见的. 对本题来说, 可以利用 §1.8.2 的习题 776 (即反正切加法定理) 证明①
$$\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos 2x+\tan^2 x}{1-\cos 2x\tan^2 x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8},$$
从而知道上述两个答案都是正确的. 然而这样的证明推导有时是很困难的. 反之, 只要两个解都正确的话, 根据不定积分的基本定理, 即 §2.6.4 的习题 1259, 就可以肯定任何两个原函数之差为常数. 对本题来说, 即可断定有
$$\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) - \left(-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\right) = C_1,$$
然后令 $x=0$ 代入就知道 $C_1=\frac{\pi}{8}$. 这比上面应用习题 776 要容易得多.

因此对于今后遇到类似的情况, 即某个不定积分出现多个不同答案时, 最简单的方法就是通过求导计算去验证每个答案求导后是否得到原题中的被积函数. 由于求导数是数学分析中最为简单的运算, 因此这是切实可行的方法.

① 为清楚起见, 将本题的变量 x 改记为 t, 则需要证明当 $x(t)=\cos 2t$, $y(t)=\tan^2 t$ 时, 反正切加法定理中的 $\varepsilon(x(t),y(t))=0$. 由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为周期 π 的偶函数, 因此只需证明在 $[0,\pi/2)$ 上 $x(t)y(t)<1$. 在 $t\in[0,\pi/4]$ 时可从 $0\leqslant\cos 2x\leqslant 1$ 和 $0\leqslant\tan^2 t\leqslant 1$ 得到, 而在 $t\in(\pi/4,\pi/2)$ 时则明显有 $x(t)y(t)<0$.

习题 1720 求 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 1 利用 $\mathrm{d}(1+x^2)=2x\,\mathrm{d}x$, 并记 $t=1+x^2$, 然后即可凑微分求积如下:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sqrt{t})}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}=2\sqrt{1+\sqrt{t}}+C$$
$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.\quad\square$$

解 2 作代换 $x=\tan t$, 就可求积如下:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\int\frac{\tan t\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sec^2 t+\sec^3 t}}=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sec t)}{\sqrt{1+\sec t}}$$
$$=2\sqrt{1+\sec t}+C=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.\quad\square$$

3.1.4 用展开法求积 (习题 1721–1765)

所谓展开法就是利用积分运算的线性性质, 将被积函数写成若干项之和, 然后分别求积, 也可称为分项积分法. 在本小节的习题求解中包含了几种常用的展开技巧.

与前面一样, 我们除了用展开法之外, 还经常会举出其他解法以供比较.

习题 1721 (b) 求 $\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解 1 若用二项式公式将 $(1-x)^{10}$ 展开则导致繁复的计算. 然而还可以有其他展开方法. 这就是利用 $x=1-(1-x)$ 将被积函数展开为两项, 然后即可求积如下:

$$\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x=\int[1-(1-x)](1-x)^{10}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\int(1-x)^{10}\,\mathrm{d}(1-x)+\int(1-x)^{11}\,\mathrm{d}(1-x)$$
$$=-\frac{1}{11}(1-x)^{11}+\frac{1}{12}(1-x)^{12}+C.\quad\square$$

解 2 作代换 $t=1-x$, 则展开求积更为自然:

$$\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x=-\int(1-t)t^{10}\,\mathrm{d}t=-\int t^{10}\,\mathrm{d}t+\int t^{11}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{11}t^{11}+\frac{1}{12}t^{12}+C$$
$$=-\frac{1}{11}(1-x)^{11}+\frac{1}{12}(1-x)^{12}+C.\quad\square$$

解 3 用分部积分法可求积如下:

$$\int x(1-x)^{10}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{11}x(1-x)^{11}+\frac{1}{11}\int(1-x)^{11}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{11}x(1-x)^{11}-\frac{1}{132}(1-x)^{12}+C.\quad\square$$

若有理分式的分母多项式的次数不高于分子多项式的次数, 可以将它用多项式除法 (或其他方法) 展开为多项式与真分式之和, 然后再分别求积. 下面是一个典型例子.

习题 1723 求 $\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解 按照前面所述展开后即可求积如下:

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int \Big(x - 1 + \frac{1}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \quad \square$$

习题 1726 求 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 将分式展开后即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \Big(-1 + \frac{4x}{x^2-2} - \frac{6}{x^2-2}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -x + 2\ln|x^2-2| - \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

对于分母为 $(x-a)^n$ 的有理真分式, 经常可展开为 $\frac{a_k}{(x-a)^k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 之和, 然后再逐项求积. 下面是一个典型例子.

习题 1727 求 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 先将分子按照 $x-1$ 的幂次展开为多项式, 然后即可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \Big((x-1)^{-98} + 2(x-1)^{-99} + (x-1)^{-100}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{97}(x-1)^{-97} - \frac{1}{49}(x-1)^{-98} - \frac{1}{99}(x-1)^{-99} + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 (概要) 若先作代换 $t = x-1$, 则将分子 $(t+1)^2$ 展开后即可求积如下:

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+2t+1}{t^{100}}\,\mathrm{d}t,$$

以下从略. □

习题 1730 求 $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x$.

解 与前几题一样, 只要将 x 按照 $(2-5x)$ 的幂次写出, 即可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x &= \int \Big(-\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5}\Big)\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{5}\int (2-5x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{5}\int (2-5x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1733 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+3)}$.

解 1 分母为 $(x-a)(x-b)$ $(a \neq b)$ 的真分式可以展开为分母分别为 $x-a$ 和 $x-b$ 的两个真分式之和. 写出含有待定系数 A 和 B 的展开式:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3},$$

然后只要在等式两边乘以 $x-1$, 且取 $x \to 1$ 时的极限, 就可见 $\frac{1}{4} = A$. 同样将上式两边乘以 $x+3$, 且令 $x \to -3$, 就得到 $-\frac{1}{4} = B$.

于是本题可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+3)} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 从解 1 的展开式两边乘以 $(x-1)(x+3)$, 就得到

$$1 = A(x+3) + B(x-1),$$

然后令 $x \to 1$ 得到 $A = \frac{1}{4}$, 令 $x \to -3$ 得到 $B = -\frac{1}{4}$. 其余从略. $\square$

注 本题的被积函数于点 1 和 -3 处没有定义, 因此在解 1 和解 2 中用 $x \to 1$ 和 $x \to -3$, 从计算结果来看也就相当于用 $x = 1$ 和 $x = -3$ 直接代入, 只是后者是在等式两边的表达式在点 1, 3 处作连续延拓后才能成立的运算.

《习题集》中的习题 1741–1758 是被积函数为三角函数的展开求积. 这时三角函数的许多恒等式当然要起重要作用. 除了积化和差公式之外, 还要知道以 $u = \sin x$ 和 $v = \cos x$ 组成的多项式 $F(u, v)$ 一定可以展开为 x 的倍角函数之和① . 下面举例.

习题 1747 求 $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

解 1 将被积函数展开为 x 的倍角函数之和如下:

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin x \\ &= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) \\ &= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.\end{aligned}$$

然后容易求积如下:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int \Big(-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 本题也可以用凑微分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int (\cos^2 x - 1)\,\mathrm{d}(\cos x) \\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C. \quad \square\end{aligned}$$

① 学过傅里叶级数 (见 §5.6) 的读者当然明白这是显然的.

注 与前面关于 $\sin^3 x$ 化为倍角函数的推导类似, 有

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos x\\ &= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x)\\ &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x,\end{aligned}$$

可见两个解的答案相同.

习题 1755 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x}$.

解 1 将被积函数的分子 1 换为 $\sin^2 x + \cos^2 x$, 就可以实现展开并求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} + \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x}\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 也可以凑微分求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x} &= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}\\ &= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1759 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解 1 如下展开即可求积:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} &= \int \left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = x - \int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}\\ &= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 用代入法, 令 $t = \mathrm{e}^x$, 则可如下展开求积:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \ln t - \ln(1+t) + C\\ &= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C. \quad \square\end{aligned}$$

3.1.5 用代入法求积 (习题 1766–1790)

本小节是代入法的进一步学习.

在前面的许多习题中可以看到, 将被积函数中的某个较为复杂的因子作为新的自变量, 然后就有可能得到较容易处理的新的被积函数, 这往往是一种有效的简化方法.

习题 1767 求 $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解 1　令 $1-5x^2=t$, 则有 $x^2=\dfrac{1-t}{5}$ 和 $-10x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{10}\int\frac{1-t}{5}\cdot t^{10}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{50}\int(t^{10}-t^{11})\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{550}t^{11}+\frac{1}{600}t^{12}+C\\&=-\frac{1}{550}(1-5x^2)^{11}+\frac{1}{600}(1-5x^2)^{12}+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (概要)　作代换 $x^2=t$ 则得到

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int t(1-5t)^{10}\,\mathrm{d}t,$$

然后再将积分号下的因子 t 写为 $t=\dfrac{1}{5}[1-(1-5t)]$ 后展开求积 (见 §3.1.4 的习题 1721(b)), 或者也可用分部积分法求积. □

习题 1771 求 $\int\cos^5x\cdot\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{\sin x}=t$, 则有 $\mathrm{d}\sin x=\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t^2)=2t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\cos^5x\cdot\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x&=\int(1-\sin^2x)^2\cdot\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\\&=\int(1-t^4)^2t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int(2t^{10}-4t^6+2t^2)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{11}t^{11}-\frac{4}{7}t^7+\frac{2}{3}t^3+C\\&=\frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}-\frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1773 求 $\int\dfrac{\sin^2x}{\cos^6x}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\tan x$, 则 $\mathrm{d}t=\sec^2x\,\mathrm{d}x$, 然后可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2x}{\cos^6x}\,\mathrm{d}x&=\int\tan^2x\cdot\sec^2x\,\mathrm{d}(\tan x)\\&=\int t^2(1+t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C\\&=\frac{1}{3}\tan^3x+\frac{1}{5}\tan^5x+C.\quad\square\end{aligned}$$

注　本题的被积函数属于有理三角函数的类型, 即可写为 $R(\cos x,\sin x)$, 其中 $R(u,v)$ 为二元有理分式函数. 对于满足条件 $R(-u,-v)=R(u,v)$ 的情况, 用变量代换 $t=\tan x$ 是较好的求积方法 (参见 §3.4.3 开始时对三种情况的说明).

习题 1778–1790 是可以用三角代换 $x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=a\sin^2t$ 等或者双曲代换 $x=a\sinh t$, $x=a\cosh t$ 等求积的类型. 下面也给出常用的其他求积方法.

习题 1778 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 1 令 $x=\sin t$, 则 $1-x^2=\cos^2 t$, $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^3 t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\tan t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C. \quad \square$$

解 2 也可用下列凑微分法求积:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}+C. \quad \square$$

习题 1779 求 $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$.

解 1 令 $x=\sqrt{2}\sec t$, 则有 $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\tan t$, $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}=2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t,$$

然后用分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t&=2\int \sec t\,\mathrm{d}(\tan t)=2\tan t\sec t-2\int \tan t\,\mathrm{d}(\sec t)\\&=2\tan t\sec t-2\int \tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t=2\tan t\sec t-2\int (\sec^2 t-1)\sec t\,\mathrm{d}t\\&=2\tan t\sec t+2\int \sec t\,\mathrm{d}t-2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

然后将右边的最后一项移到左边, 除以 2 后再继续求积得到

$$\begin{aligned}2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t&=\tan t\sec t+\int \sec t\,\mathrm{d}t\\&=\tan t\sec t+\ln|\sec t+\tan t|+C_1 \text{ (参见习题 1704 后的公式 (3.5))}\\&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C \text{ (其中 } C=C_1-\ln\sqrt{2}). \quad \square\end{aligned}$$

注 1 注意在上述计算中出现的"循环现象", 即在对于 $2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t$ 的分部积分法计算中又出现了 $-2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t$, 然后通过移项整理之后再继续计算下去. 这是分部积分法使用中的常见现象. 参见下面 §3.1.6 的习题 1820 的解 1 后的注.

注 2 在上述解的最后指出了任意常数 C 和 C_1 之间的关系. 为简明起见, 今后将不定积分求积过程的各个步骤中出现的任意常数统一记为 C, 并不再讨论它们之间的关系.

解 2 这一个解法中不用三角代换, 但仍然要用分部积分法.

将本题的不定积分记为 I, 则一方面用分部积分得到

$$I=x\sqrt{x^2-2}-\int \sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x,$$

另一方面又有

$$I=\int\frac{(x^2-2)+2}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$$
$$=\int\sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x+2\ln|x+\sqrt{x^2-2}\,|,$$

将两式相加除 2 即得与解 1 相同的结果. □

思考题 关于 I 的以上两式中都看不到任意常数, 但最后的答案中必须有任意常数, 那么它是从何处出来的?

习题 1782 求 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 不妨设 $a>0$ (否则可令 $x=-t$), 这时从平方根号下的分式必须大于等于 0 的要求, 可以求出变量 x 的范围为 $-a\leqslant x<a$.

作代换 $x=a\cos t$, 则 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\cot\frac{t}{2}$, $\mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x=\int\cot\frac{t}{2}\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=-\int 2a\cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\int a(1+\cos t)\,\mathrm{d}t=-at-a\sin t+C$$
$$=-a\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.\quad\square$$

解 2 此题用凑微分法可求积如下:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=a\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.\quad\square$$

解 3 作代换 $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, 则有

$$x=a-\frac{2a}{t^2+1},\ \mathrm{d}x=\frac{4at\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2},$$

于是可用分部积分法求积如下:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4at^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\int(-2at)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$$
$$=-\frac{2at}{t^2+1}+\int\frac{2a\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$=-\frac{2at}{t^2+1}+2a\arctan t+C$$
$$=-\sqrt{a^2-x^2}+2a\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.\quad\square$$

注 解 3 所用的代换还可推广于解决类型为 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的不定积分问题, 其中 $R(u,v)$ 为二元有理函数. 这时的代换为 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

习题 1784 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解 1 这时只能有 $a \neq b$. 以下不妨设 $a < b$ (否则可将根号下改写为 $(x-b)(a-x)$). 利用 $a < x < b$, 作三角代换 $x - a = (b-a)\sin^2 t$, 其中 $0 < t < \pi/2$, 则有

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t\cos t, \quad \mathrm{d}x = 2(b-a)\sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= 2\int \mathrm{d}t = 2t + C \\ &= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 若不用解 1 中的三角代换, 则也可在根号内配平方后求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{4} - \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{x - \dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{|b-a|}{2}}\right) + C = \arcsin\left(\frac{2x-a-b}{|b-a|}\right) + C. \quad \square\end{aligned}$$

注 在 $b = -a \neq 0$ 时就是前面的 §3.1.2 中的基本公式 (3.3) 之三:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C.$$

3.1.6 用分部积分法求积 (习题 1791–1835)

这是与代换法并列的重要的积分方法, 在 §3.1.5 的习题 1779 的两个解法和习题 1782 的解 3 中已经出现. 本小节是这方面的基本例题.

习题 1791 求 $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

解 1 用分部积分法可求积如下:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\,\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C. \quad \square$$

注 在上述分部积分中引入因子 x 的方法看似"无中生有", 实际上很有效. 它可以用于求出许多不定积分, 例如习题 1802 (求 $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$), 1803 (求 $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$), 1807 (求 $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$), 1809 (求 $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$) 等, 其理由也只有一个, 即这些不定积分的被积函数在求导之后都变成为代数函数 (包括有理函数和无理函数).

解 2 若用代换 $\ln x = t$, 则 $x = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, 然后分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= \int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C = x\ln x - x + C. \quad \square\end{aligned}$$

注 对于解 2 中的积分 $\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ 用分部积分法时有两种做法, 即

$$\int te^t\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}(e^t) = te^t - \int e^t\,\mathrm{d}t,$$

或者

$$\int te^t\,\mathrm{d}t = \int e^t\,\mathrm{d}\Big(\frac{t^2}{2}\Big) = \frac{t^2}{2}e^t - \int \frac{t^2}{2}e^t\,\mathrm{d}t.$$

显然后者不能成功.

这表明在用分部积分法时, 事先要想好达到什么“目的”是重要的, 它决定了在分部积分的两个可能方向中选择哪一个. 本题的解 2 是要通过分部积分将原来的被积函数 te^t 中的因子 t 去掉. 然而在注中的第二种做法则将 t 的幂指数从 1 升高为 2, 适得其反.

一般来说, 为了将不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 写成为 $\int u(x)\,\mathrm{d}v(x)$, 然后应用分部积分公式

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x),$$

这时在如何选择 $u(x)$ 和 $v(x)$ 时会有更多的可能性, 但往往只能根据经验来进行尝试. 这方面的进一步内容可参看 §3.5 最后关于分部积分法的补充.

习题 1793 求 $\int \Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^2\mathrm{d}x$.

解 设法通过分部积分使得被积函数的 $\ln x$ 的次数从 2 次降为 1 次, 再从 1 次降为 0 次 (参见习题 1791), 这样就可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^2\mathrm{d}x &= \int (\ln x)^2\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\\ &= -\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,(\ln x)^2 = -\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 + \int \frac{1}{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - \frac{2}{x}\ln x + \int \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x} + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1799 求 $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解 设法通过分部积分将被积函数中的 x^2 的指数从 2 降为 0, 这样即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos 2x) = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1810 求 $\int \sin x\cdot\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$.

解 考虑到被积函数的第二个因子 $\ln(\tan x)$ 在求导后成为三角函数, 即可用分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int \sin x\cdot\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x &= -\cos x\cdot\ln(\tan x) + \int \cos x\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\cos x\cdot\ln(\tan x) + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\ &= -\cos x\cdot\ln(\tan x) + \ln\tan\Big|\frac{x}{2}\Big| + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1817 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$.

解 1 不妨设 $a>0$. 以下的分部积分法在 §3.1.5 的习题 1782 的解 3 中已见过:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\int x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{x^2+a^2}\Big) \\ &= \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \\ &= \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 下面的方法与解 1 类似, 但有其特色, 即从已知的结果开始:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \\ &= x\cdot\frac{1}{a^2+x^2} + \int \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \\ &= \frac{x}{a^2+x^2} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - 2a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2},\end{aligned}$$

将最后一式加以整理就得到与解 1 相同的答案. $\square$

下面的习题 1818 (求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$) 和 1819 (求 $\int\sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x$) 都是分部积分法的典型应用. 其结果已是教科书中的基本公式, 推导从略.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a>0), \\ &\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C \ \ (\alpha\neq 0).\end{aligned}} \tag{3.6}$$

习题 1820 求 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用 $\mathrm{d}[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}] = 3x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$, 可用分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}] \\ &= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

然后将右边的第二项移到左边, 对第三项用公式 (3.6) 之二 (取 $\alpha=a^2$), 这样就得到

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = {}& \frac{1}{4}x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C. \quad \square\end{aligned}$$

注 在解 1 中出现了 §3.1.5 的习题 1779 及其注所示的内容, 即在分部积分计算中有可能出现原来要求的不定积分 (其系数不等于 1), 然后通过移项整理并求解一个简单

的代数方程可求出答案. 这种情况称为不定积分中的循环现象, 今后对于中间的移项整理过程将不再一一指出. 在用分部积分法推导公式 (3.6) 时也是如此.

解 2 用三角代换 $x = a\tan t$, 则有

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int a^2\tan^2 t\cdot a\sec t\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a^4\int(\sec^5 t - \sec^3 t)\,\mathrm{d}t.$$

然后用分部积分法作以下计算 (其中均出现解 1 的注中所说的循环现象):

$$\begin{aligned}\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t &= \int\sec^3 t\,\mathrm{d}(\tan t) = \sec^3 t\tan t - \int\tan t\cdot 3\sec^3 t\tan t\,\mathrm{d}t\\ &= \sec^3 t\tan t - \int 3(\sec^5 t-\sec^3 t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\sec^3 t\tan t + \frac{3}{4}\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t,\\ \int\sec^3 t\,\mathrm{d}t &= \int\sec t\,\mathrm{d}(\tan t) = \sec t\tan t - \int\tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t\\ &= \sec t\tan t - \int(\sec^3 t - \sec t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\sec t\tan t + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t},\end{aligned}$$

对右边最后的积分用习题 1704 (见 (3.5)), 并综合以上即可得到

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= a^4\left(\frac{1}{4}\sec^3 t\tan t - \frac{1}{8}\sec t\tan t - \frac{1}{8}\ln|\tan t+\sec t|\right) + C\\ &= \frac{1}{4}x(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C. \quad\Box\end{aligned}$$

注 解 1 依赖于对分部积分中的 u, v 的巧妙选择和现成的公式 (3.6). 解 2 虽然长一点, 但思路简单, 即从明显的三角代换 $x = a\tan t$ 开始, 将问题归结为不定积分 $\int\sec^n t\,\mathrm{d}t$ 的计算, 而后者是可用递推方法求出的 (见 §3.4.1 的习题 2012(b)).

习题 1824 求 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 作代换 $x = \tan t$, 则就有

$$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\tan t\cdot\mathrm{e}^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t,$$

最后一式是一个常见的不定积分 (见下面的习题 1829), 以下从略. □

注 如 §3.1.5 开始关于代入法所说, 对被积函数较复杂的情况, 不妨先作适当的变量代换加以简化, 然后再考虑用什么方法. 接下来的习题 1825–1827 都是如此.

习题 1828 求 $\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$.

(注: 本题中假设 a, b 均不等于 0.)

解 1 此题可求积如下, 其中利用在两次分部积分后出现的循环现象而求得答案:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a}\int \cos bx \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}(\sin bx) \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\cdot I \\
&= \frac{a^2}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(\frac{1}{a}\cos bx + \frac{b}{a^2}\sin bx) + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

这里补充一种方法, 即利用复数计算工具对本题给出一个新解, 可以同时计算出本题与习题 1829 的两个不定积分, 而且不需要用分部积分法.

注意: 以下计算的根据来自于对实变复值函数 $u(x)+\mathrm{i}v(x)$ 的导数定义为

$$[u(x)+\mathrm{i}v(x)]' = u'(x)+\mathrm{i}v'(x),$$

并用相同方法定义实变复值函数的原函数和不定积分, 然后即可验证下面的公式 (3.7) 成立 (参见第一册的 §2.5.4 的习题 1175 后的注和 §2.5.5 的习题 1206 的复数解法).

解 2　首先利用 Euler 公式有

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} + C.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

然后分离出 (3.7) 右边第一项的实部与虚部, 就有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} &= \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\cdot \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx + b\sin bx) + \mathrm{i}(-b\cos bx + a\sin bx)],
\end{aligned}$$

又写复常数 $C = C_1 + \mathrm{i}C_2$, 其中 C_1, C_2 为实常数, 就同时得到两个不定积分:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1, \\
\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) + C_2. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 1829　求 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

提示　或者模仿上一题的解 1, 或者用其解 2. □

习题 1835　求 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 1　利用 $\dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ 将积分展开为两项, 然后对第一项的不定积分用分部积分法即可求积如下:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{x+1} - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{x+1}\Big) - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

解 2 直接用分部积分法可求积如下:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int x\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}\Big(\frac{1}{x+1}\Big) \\
&= -\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x+1} + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,(x\,\mathrm{e}^x) \\
&= -\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x+1} + \int \frac{\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x+1} + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x+1} + \mathrm{e}^x + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

注 此题似乎不难, 但这里要指出, 初等函数的不定积分未必是初等函数, 因此有许多初等函数的 (往往很重要的) 不定积分是不可能积出来的. 例如, 表面上比本题更为简单的一个不定积分 (见于 §3.5.3 的习题 2091)

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$$

就是积不出的. 因此不定积分的计算在很大程度上是带有技巧性的训练, 各种方法的功效也都是有限的. 所有的基本积分表中的公式, 包括本节列出的 (3.3)–(3.6) 在内, 都只能给出不定积分为初等函数的答案, 不可能存在对任何不定积分都有效的积分方法.

3.1.7 被积函数含二次三项式的求积 (习题 1836–1865)

这里推荐将二次三项式规范化为 $x^2 \pm a^2$ 或 $a^2 - x^2$ 后, 利用前面已经列出的基本积分公式 (3.3), (3.6) 求解. 当然这时也需要其他方法的配合.

习题 1841 求 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

解 先将分母的二次三项式规范化, 然后展开求积如下 (设 α 不是 π 的整数倍):

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\cos\alpha)\,\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} + \cos\alpha \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) + \cot\alpha \cdot \arctan\Big(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big) + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

习题 1845 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

解 先将分母写成为半角的正弦和余弦的二次式, 然后分子分母同除以余弦的平方 (仿照 §3.1.3 的习题 1702 的解法), 即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2\cos x + 3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x}{\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 5} = 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)}{\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)^2 + 2^2}$$

$$= \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C. \quad \square$$

习题 1855 求 $\int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x^2 = t$ 为新的自变量, 将分母的根号下关于 t 的二次三项式配平方, 然后即可展开求积如下:

$$\int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1 + t}{\sqrt{1 + t - t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - (t - \frac{1}{2})^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4} - (t - \frac{1}{2})^2} + \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{5}}\right) + C. \quad \square$$

习题 1856 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,\mathrm{d}x$.

解 仿照 §3.1.3 的习题 1682 的解 1 的方法 (也就是作倒代换) 即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{x + 2 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2x}\right| + C. \quad \square$$

习题 1858 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 1}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x + 1 = t$ 为新的自变量, 如上题那样作倒代换后即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-2t+2}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{t^2}-2\dfrac{1}{t}+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}\right|+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2-t+\sqrt{2(t^2-2t+2)}}{2t}\right|+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C. \quad \square$$

注　本题的根号下的二次函数 x^2+1 已经是规范形式, 但为了配合根号前的因子 $(x+1)$ 的倒代换却需要重新作规范化. 因此在类似的情况中, 若根号下为二次三项式时, 不必在作倒代换之前就对其作规范化.

3.1.8　双曲函数及其在积分中的应用

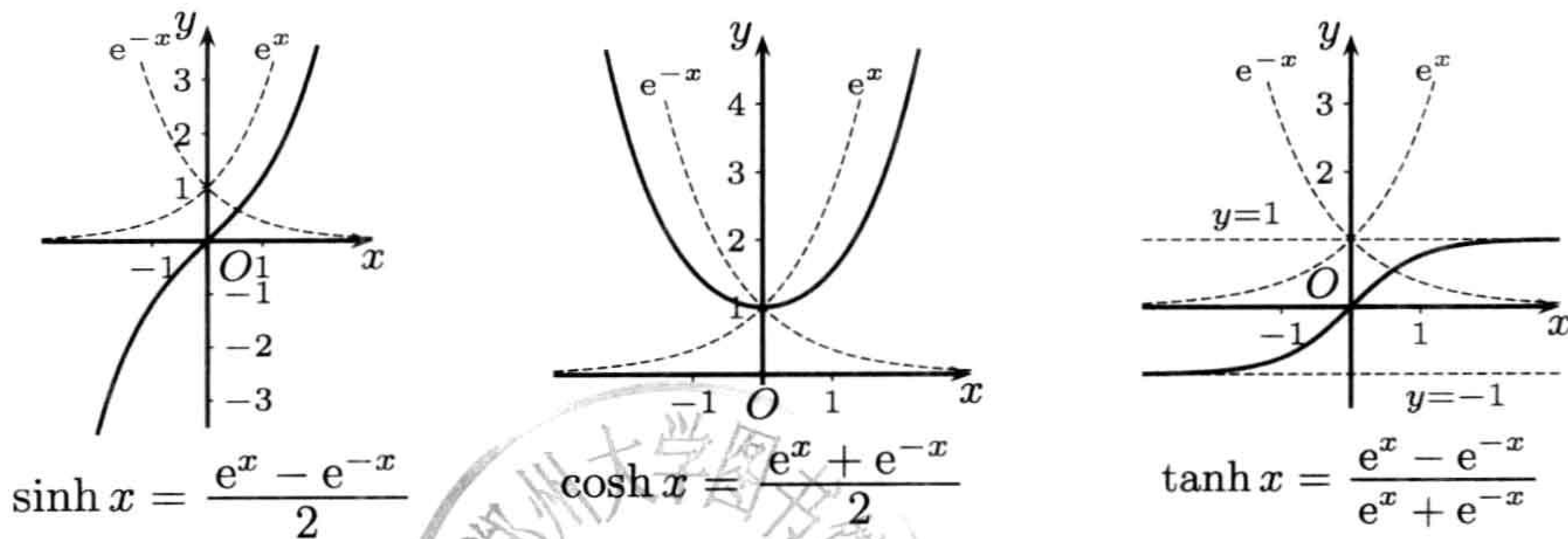
在《习题集》的前两章中已多次出现双曲函数 (例如习题 340, 781, 818, 1175, 1549 等). 在本节的不定积分中, 双曲函数出现更多, 前面的每一个小节中几乎都有它们的习题. 为读者方便起见, 我们在这一小节中将对双曲函数作一个集中的简明介绍, 并讲解前面各个小节中有关双曲函数的习题, 其中包括含有双曲函数的不定积分, 以及双曲函数代换在不定积分中的应用.

根据《习题集》中的安排, 这里只引入 4 个双曲函数, 即双曲正弦、双曲余弦、双曲正切和双曲余切. 它们的定义如下:

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2};\\ \tanh x &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}; \quad \coth x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}} \tag{3.8}$$

(在其他文献中也有对上述双曲函数用 $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$ 记号的.)

为读者参考方便起见, 下面给出了前三个双曲函数的图像 (见第一册附录一的习题 340). 在图中用虚线给出了生成双曲函数的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图像.



当我们初次接触双曲函数时，会惊奇地发现双曲函数满足许多恒等式，而且与已经熟悉的三角函数恒等式非常相似. 下面我们将解释其原因，并列出双曲函数的最常用的一些恒等式，它们是在本节的习题中所需要的.

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 就有

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},\quad \cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},$$

它们也称为欧拉公式 (参见第一册 §1.10.1 的习题 819 的解 1).

利用上述公式可以将正弦和余弦函数的定义域延拓到复数域上. 将它们与双曲函数的定义作比较，即可看出它们之间的关系如下:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sinh x=\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}x),\\&\cosh x=\cos(-\mathrm{i}x)=\cos(\mathrm{i}x).\end{aligned}}\tag{3.9}$$

由此可知，三角函数满足的每一个恒等式都可以通过上述转换而导出双曲函数的恒等式. 当然它们也都可以按照双曲函数的定义直接验证得到，

下面只列举出本节习题中要用到的几个常用恒等式. 其他都可以类推得到.

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ \cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\\&(2)\ 1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x},\\&(3)\ \coth^2 x-1=\frac{1}{\sinh^2 x},\\&(4)\ \sinh 2x=2\sinh x\cosh x,\\&(5)\ \cosh 2x=2\cosh^2 x-1=2\sinh^2 x+1=\cosh^2 x+\sinh^2 x,\\&(6)\ \sinh\alpha x\cdot\sinh\beta x=\frac{1}{2}[\cosh(\alpha+\beta)x-\cosh(\alpha-\beta)x],\\&(7)\ \cosh\alpha x\cdot\cosh\beta x=\frac{1}{2}[\cosh(\alpha+\beta)x+\cosh(\alpha-\beta)x].\end{aligned}}\tag{3.10}$$

从双曲函数的定义及其图像，可确定它们的反函数存在，并求出其表达式如下[①]:

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ \operatorname{arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x\in(-\infty,+\infty),\\&(2)\ \operatorname{arccosh} x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}),\ x\in[1,+\infty),\\&(3)\ \operatorname{arctanh} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x\in(-1,1),\\&(4)\ \operatorname{arccoth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).\end{aligned}}\tag{3.11}$$

其中双曲余弦的反函数有两个单值分支，也可写为 $\operatorname{arccosh} x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

① 在文献中出现的反双曲函数有多种不同的符号，其中所加的前缀有 a, Ar, ar, arc, arg 等. 为方便起见，本书使用与反三角函数相同的方法，即加前缀 arc. 这种用法见于中国科学院数学研究所编写的《英汉数学词汇》等多种工具书中.

最后是双曲函数的求导公式与不定积分公式:

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ (\sinh x)' = \cosh x,\\&(2)\ (\cosh x)' = \sinh x,\\&(3)\ (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},\\&(4)\ (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}.\end{aligned}} \tag{3.12}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(1)\ \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C,\\&(2)\ \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C,\\&(3)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\\&(4)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.\end{aligned}} \tag{3.13}$$

下面先看本节中被积函数含有双曲函数的一些习题.

习题 1651–1653 可直接用积分表求解, 下面给出其中第二题的解.

习题 1652 求 $\displaystyle\int \tanh^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 利用恒等式 (3.10)(2) 和积分公式 (3.13)(4), 即可求积如下:

$$\int \tanh^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 x}\right)\mathrm{d}x = x - \tanh x + C. \quad \square$$

习题 1671–1673 只要用线性代换求积, 从略.

下面是用凑微分法求积的几道习题.

习题 1700(d) 求 $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\,\mathrm{d}x$.

解 利用双曲函数的倍角公式 (3.10)(5) 即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\cosh x)}{\sqrt{2\cosh^2 x - 1}}\\&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}\,) + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1705 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}$.

解 1 仿照 §3.1.3 的习题 1703 (即求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$) 的解 1 可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\tanh\frac{x}{2}\cosh^2\frac{x}{2}}\\&= \int \frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tanh\frac{x}{2}} = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 作代换 $x=\ln\tan\dfrac{t}{2}$, 则有 $\mathrm{e}^x=\tan\dfrac{t}{2}$, $\mathrm{e}^{-x}=\cot\dfrac{t}{2}$, 然后通过计算得到

$$\sinh x=-\frac{\cos t}{\sin t},\quad \cosh x=\frac{1}{\sin t},\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\sin t},$$

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}&=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=-\ln|\sec t+\tan t|+C\\&=\ln\left|\frac{\sinh x}{1+\cosh x}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1706 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 容易想到仿照 §3.1.3 的习题 1704 (即求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$) 来做, 然而套用该题的代换 $x+\dfrac{\pi}{2}=t$ 或者该题的答案 (3.5) 只能得到含有虚数单位 i 的答案, 引起不必要的麻烦. 下面的方法可以避免这种现象.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}&=\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}\\&=\int\frac{\mathrm{d}(\sinh x)}{\sinh^2 x+1}=\arctan(\sinh x)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 利用双曲余弦定义可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}&=\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\\&=\int\frac{2\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x)^2+1}=2\arctan(\mathrm{e}^x)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 如习题 1705 那样作代换 $x=\ln\tan\dfrac{t}{2}$, 则可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}&=\int\mathrm{d}t=t+C\\&=2\arctan(\mathrm{e}^x)+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1761–1765 是用展开法求积的题, 下面给出其中两题的解.

习题 1761 求 $\displaystyle\int\sinh^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用恒等式 (3.10)(5) 即可展开求积如下:

$$\int\sinh^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cosh 2x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sinh 2x-\frac{1}{2}x+C.\quad\square$$

解 2 用双曲正弦的定义也容易求积如下:

$$\int\sinh^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}+C.\quad\square$$

习题 1763 求 $\displaystyle\int\sinh x\sinh 2x\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用恒等式 (3.10)(6) 即可展开后求积如下:

$$\begin{aligned}\int\sinh x\sinh 2x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(\cosh 3x-\cosh x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\sinh 3x-\frac{1}{2}\sinh x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 利用恒等式 (3.10)(4) 即可直接凑微分求积如下:

$$\int \sinh x \sinh 2x \,\mathrm{d}x = 2\int \sinh^2 x \cosh x \,\mathrm{d}x = 2\int \sinh^2 x \,\mathrm{d}(\sinh x)$$
$$= \frac{2}{3}\sinh^3 x + C. \quad \square$$

解 3 利用双曲函数定义即可展开求积如下:

$$\int \sinh x \sinh 2x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-3x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{12}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) + C. \quad \square$$

习题 1786–1790 是双曲函数代换在求不定积分中的应用.

不妨先看几个简单例子. 从前面的反函数公式 (3.11) 就可看到它们与某些基本积分公式之间的联系. 例如用代换 $x = \sinh t$ 可导出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sinh t)}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}} = \int \mathrm{d}t = t + C$$
$$= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

又如用 $x = \tanh t$ 则可导出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int \frac{\mathrm{d}(\tanh t)}{1-\tanh^2 x} = \int \mathrm{d}t = t + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

注 这个代换只适用于 $|x| < 1$. 在 $|x| > 1$ 时可以用代换 $x = \coth t$, 答案相同.

下面给出习题 1786 的解.

习题 1786 用双曲代换求 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 不妨设 $a > 0$. 作代换 $x = a\sinh t$, 则可求积如下:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = a^2\int \cosh^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sinh 2t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sinh t\cosh t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + C. \quad \square$$

注 本题的结果是基本积分公式 (3.6) 的第二个公式的一部分, 即在 $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x$ 中 $\alpha > 0$ 的情况. 若用分部积分法 (包括三角代换) 则可利用循环现象解出. 以上方法不需要分部积分即可求出答案.

习题 1800–1801 是有关双曲函数的分部积分法, 从略.

§3.2 有理函数的积分法 (习题 1866–1925)

内容简介 有理函数 (包括多项式函数与有理分式函数) 是最重要的一类可积函数. 本节的习题分为以下部分: 用部分分式展开方法 (或分解方法) 求积, 用奥斯特罗格拉茨基方法求积和综合性方法求积.

3.2.1 用部分分式展开法求积 (习题 1866–1889)

如前所说, 初等函数的原函数未必是初等函数. 我们将原函数为非初等函数的初等函数称为不可积 (俗称"积不出"), 这就是说它们的不定积分是非初等函数. 相反, 对于原函数为初等函数的初等函数, 则称它们为可积 (俗称"积得出")①.

已经证明, 有理函数的原函数一定是初等函数, 而且可以通过展开为多项式与部分分式来求积, 这时部分分式的分子中的系数可以通过待定系数法来确定.

以下所说的有理函数一般是指实系数有理分式, 即两个实系数多项式之商. 对于假分式, 即分子次数大于等于分母次数的情况, 一定可以分解为一个多项式与一个真分式之和. 由于多项式是可积的, 它的不定积分仍然是多项式, 因此问题就归结为如何求真分式的不定积分.

真分式即分子次数小于分母次数的有理分式. 由于实系数多项式一定可以在实数域内因式分解为若干个一次因式和二次因式的乘积, 因此可以证明, 真分式一定能够分解为下列两种简单分式之和:

$$\frac{c}{(x-a)^k}\ \ (k \geqslant 1), \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ \ (n \geqslant 1). \tag{3.14}$$

其中的 c, a, M, N, p, q 均为实数. 今后称这两类分式为部分分式 (partial fraction), 而将实系数有理分式分解为部分分式的过程称为部分分式分解 (或展开).

更精确地说, 当真分式的分母中出现因子 $(x-a)^k$ 时, 在部分分式分解中就有

$$\frac{c_1}{x-a} + \cdots + \frac{c_k}{(x-a)^k},$$

显然它们的每一项都是容易求积的; 而当真分式的分母中出现 $(x^2+px+q)^n$ 时, 在部分分式分解中就有

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

在将二次三项式 x^2+px+q 规范化为 x^2+a^2 之后, 就可以看出当 $n=1$ 时属于最简积分表, 当 $n=2$ 时即习题 1817 (见 §3.1.6 的分部积分求积). 对于 $n>2$ 的情况可用递推方法求积 (见后面 §3.2.3 的习题 1921).

下面的代数定理是部分分式分解的理论基础, 该定理的证明中包含了上述部分分式的分解结论. 关于定理的证明可参考 [15] 的第二卷的 274 小节 (在该书的老版中为 262 小节) 或其他代数学的参考书.

① 请注意这里关于不定积分中的函数的可积和不可积的概念与第四章定积分中函数的可积和不可积概念完全不同.

命题 3.2 (部分分式分解定理) 实系数有理真分式一定能够以唯一的方式展开为部分分式之和.

由此可知, 有理函数的求积主要在于其部分分式展开. 在 §3.1.4 (用展开法求积) 中已经见到这样的例子. 特别是习题 1733 就是用待定系数法的最简单情况. 下面将通过例子来介绍这里所用的各种方法.

习题 1867 求 $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 1 根据命题 3.2 有部分分式展开如下:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3},$$

其中有三个待定系数 A, B, C.

将上式右边通分得到

$$\begin{aligned}\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+3)(x+1) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.\end{aligned}$$

将最后一式的分子与被积函数的分子多项式 (本题即是 x) 作比较, 等置其相同幂次项的系数, 就得到关于待定系数 A, B, C 的线性代数方程组:

$$\begin{cases} A+B+C &= 0, \\ 5A+4B+3C &= 1, \\ 6A+3B+2C &= 0. \end{cases}$$

解此方程组得到 $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$ 和 $C = -\frac{3}{2}$.

然后就可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \ln\left|\frac{(x+2)^2}{|x+1|^{\frac{1}{2}}|x+3|^{\frac{3}{2}}}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 用 §3.1.4 的习题 1733 中的极限方法求待定系数.

为此在展开式

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

的两边乘以 $x+1$, 得到

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = A + (x+1)\cdot\frac{B}{x+2} + (x+1)\cdot\frac{C}{x+3},$$

然后在等式两边令 $x \to -1$ (相当于用 $x=-1$ 代入), 右边就得到 A, 于是有

$$A = \lim_{x\to -1} \frac{x}{(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}.$$

同理可求出

$$B=\lim_{x\to-2}\frac{x}{(x+1)(x+3)}=2 \text{ 和 } C=\lim_{x\to-3}\frac{x}{(x+1)(x+2)}=-\frac{3}{2}. \quad \square$$

注 求待定系数的方法还有很多 (例如参见 §3.1.4 的习题 1733 的解 2), 这里只指出, 由于命题 3.2 在理论上保证了待定系数的存在和唯一, 因此不论用什么 (正确的) 方法, 只要计算无误, 答案总是相同的.

对于初学者来说, 在求有理函数的不定积分时, 如何根据被积函数分母的因式分解, 写出正确的部分分式展开式, 这第一步是最为重要的.

习题 1870 求 $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

解 由于这不是真分式, 又利用 $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$, 即可将被积函数展开如下:

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=\frac{(x^4+5x^2+4)-(5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}$$
$$=1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}=1-\frac{A}{x^2+1}-\frac{B}{x^2+4}.$$

这里的待定系数只需要两个, 这是因为分子分母只含 x 的偶次幂项, 因此可以看成为 $x^2=t$ 的有理分式的部分分式展开. 同样可由此用极限方法计算出①

$$A=\lim_{t\to-1}\frac{5t+4}{t+4}=-\frac{1}{3} \text{ 和 } B=\lim_{t\to-4}\frac{5t+4}{t+1}=\frac{16}{3}.$$

最后求积如下:

$$\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x=x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C. \quad \square$$

习题 1874 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解 1 根据命题 3.2, 有以下部分分式展开:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$
$$+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}.$$

为了避免求解含有 6 个未知数的线性代数方程组, 我们采取极限方法求待定系数. 在上式两边乘以 $x+1$, 然后令 $x\to-1$, 即可"看出" $A=\dfrac{1}{8}$.

同样在上式两边乘以 $(x+2)^2$, 然后令 $x\to-2$, 即可得到 $C=-1$. 再在该式两边乘以 $(x+3)^3$, 然后令 $x\to-3$, 即可得到 $F=-\dfrac{1}{2}$.

下面做一次减法② , 即得到

---

①这里的 t 取负值, 是否与 $x^2=t$ 发生矛盾? 这是因为展开式

$$\frac{5t+4}{t^2+5t+4}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+4}$$

是对于 $t\neq-1,-4$ 的一切实数值都成立的恒等式, 因此在确定 A,B 时可以在 $t<0$ 中进行计算.

② 由以下计算可见, 这种减法每做一次, 一定使得分子分母约去一个确定的因子, 因此具有自校正性, 对于手算比较合适.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}-\frac{1/8}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1/2}{(x+3)^3}\\
&=\Big(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}+\frac{1/2}{(x+3)^3}\Big)-\frac{1/8}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^2}\\
&=\Big(\frac{x^2+2x+2}{2(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\Big)-\frac{1/8}{x+1}\\
&=\frac{2x^2+11x+10}{2(x+1)(x+2)(x+3)^2}-\frac{1/8}{x+1}\\
&=\frac{-x^2+x+22}{8(x+2)(x+3)^2}=\frac{B}{x+2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

然后再用极限方法得到

$$B=\lim_{x\to-2}\frac{-x^2+x+22}{8(x+3)^2}=2 \text{ 和 } E=\lim_{x\to-3}\frac{-x^2+x+22}{8(x+2)}=-\frac{5}{4}.$$

又将前一式两边乘以 x, 然后令 $x\to+\infty$, 可见有 $B+D=-\frac{1}{8}$, 因此得到 $D=-\frac{17}{8}$.

最后可求积如下:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}&=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}\\
&\quad-\frac{17}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}-\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^3}\\
&=\frac{1}{8}\ln|x+1|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}\\
&\quad-\frac{17}{8}\ln|x+3|+\frac{5}{4(x+3)}+\frac{1}{4(x+3)^2}+C.
\end{aligned}$$ □

解 2 在解 1 中求出 A,C,F 之后, 可以在原来的部分分式展开式两边令 $x=0,-4$ 代入, 分别整理得到

$$27B+18D+6E=\frac{33}{4},\quad -4B-8D+8E=-1,$$

又在展开式两边乘以 x, 然后令 $x\to+\infty$, 得到 $A+B+D=0$, 因此有

$$B+D=-\frac{1}{8}.$$

最后从以上三个方程即可解出所要的 B,D,E. 计算从略. □

解 3 除了 A,C,F 之外, 用以下方法可以独立计算得到 B,D,E.

在被积函数的部分分式展开式两边乘以 $(x+2)^2$ 后得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}&=(x+2)^2\cdot\frac{A}{x+1}+B(x+2)+C\\
&\quad+(x+2)^2\Big(\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}\Big).
\end{aligned}$$

两边对 x 求导, 然后令 $x\to-2$ (相当于用 $x=-2$ 代入), 这样就得到

$$\begin{aligned}
B&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\Big)\Big|_{x=-2}\\
&=\Big(-\frac{1}{(x+1)^2(x+3)^3}-\frac{3}{(x+1)(x+3)^4}\Big)\Big|_{x=-2}=-1+3=2.
\end{aligned}$$

类似地可以独立计算出 D 和 E. 计算从略. □

习题 1876 求 $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

解 1 因分母可分解为 $(x^2+1)(x^2+4)$, 根据命题 3.2 可有被积函数的部分分式展开为

$$\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

将右边两个分式通分, 并等置两边分子的同幂次项的系数, 就得到线性方程组

$$\begin{cases} A+C &= 0, \\ B+D &= 1, \\ 4A+C &= 5, \\ 4B+D &= 4. \end{cases}$$

计算得到 $A=\frac{5}{3}$, $B=1$, $C=-\frac{5}{3}$, $D=0$.

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\frac{5}{3}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+4} \\ &= \frac{5}{6}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)+\arctan x+C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 本题的待定系数可用复数计算法得到. 在部分分式展开式两边乘以 x^2+1, 然后令 $x\to \mathrm{i}$, 就有

$$A\mathrm{i}+B=\lim_{x\to\mathrm{i}}\frac{x^2+5x+4}{x^2+4}=\frac{3+5\,\mathrm{i}}{3},$$

于是同时得到 $A=\frac{5}{3}$ 和 $B=1$.

又在展开式两边乘以 x^2+4, 然后令 $x\to 2\,\mathrm{i}$, 就有

$$2C\,\mathrm{i}+D=\lim_{x\to 2\mathrm{i}}\frac{x^2+5x+4}{x^2+1}=-\frac{10\,\mathrm{i}}{3},$$

于是又同时得到 $C=-\frac{5}{3}$ 和 $D=0$. $\square$

以下是几个常见的不定积分. 其中除了标准方法之外还介绍较具技巧性的方法.

习题 1881 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解 1 根据分母的因式分解, 可知有部分分式展开如下:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

两边乘以 $x+1$, 再令 $x\to -1$, 就得到

$$A=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}.$$

然后即可作减法得到

$$\frac{1}{x^3+1}-\frac{1}{3(x+1)}=\frac{3-(x^2-x+1)}{3(x^3+1)}=\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}.$$

这样就已得到 $B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$.

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{3(x+1)}+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用配对法可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}&=\frac{1}{2}\int\frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1-x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x+x^2)-x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^3)}{1+x^3}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^3+1}\right|+C\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 先将被积函数分子的 1 作如下展开:

$$\begin{aligned}1&=(x^2-x+1)-(x^2-x)\\&=(x^2-x+1)-\frac{1}{3}(3x^2)+(x+1)-1\\&=\frac{1}{2}(x^2-x+1)-\frac{1}{6}(3x^2)+\frac{1}{2}(x+1),\end{aligned}$$

于是即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}&=\int\frac{\frac{1}{2}(x^2-x+1)-\frac{1}{6}(3x^2)+\frac{1}{2}(x+1)}{x^3+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\ln|x^3+1|+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\\&=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 解 3 是一次习题课上学生的创作.

习题 1884 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

解 1 按照标准方法先将分母作因式分解, 得到

$$\begin{aligned}x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2&=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

于是有部分分式展开

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

由于将 x 换为 $-x$ 时上式左边不变, 而右边两项的分母对换, 因此从展开式的唯一性知道 $a=-c$, $b=d$. 用 $x=0$ 代入得到 $1=b+d$, 因此 $b=d=\frac{1}{2}$. 再令 $x=\mathrm{i}$ 代入, 并利用 $b=d$, 得到

$$\frac{1}{2}=\frac{a\mathrm{i}+b}{\sqrt{2}\mathrm{i}}+\frac{c\mathrm{i}+d}{-\sqrt{2}\mathrm{i}}=\frac{a-c}{\sqrt{2}},$$

这样即可确定 $a=-c=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

最后可求积如下 (右边第二项的积分可从第一项的积分推得):

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}&=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\&\qquad-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)\\&\qquad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 解本题比较巧妙的方法是用配对法求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}&=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1886 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$.

解 1 按照标准方法将分母作因式分解, 得到

$$\begin{aligned}x^6+1&=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^2+1)[(x^2+1)^2-3x^2]\\&=(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1).\end{aligned}$$

于是本题的被积函数有部分分式展开如下:

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}.$$

两边乘以 x^2+1, 然后令 $x\to \mathrm{i}$, 就得到

$$\frac{1}{3}=a\mathrm{i}+b,$$

于是同时得到 $a=0,\ b=\dfrac{1}{3}$.

通过减法①

$$\frac{1}{x^6+1}-\frac{1}{3(x^2+1)}=\frac{-x^2+2}{3(x^4-x^2+1)},$$

于是只要计算展开式

$$\frac{-x^2+2}{3(x^4-x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1}.$$

如习题 1884 的解 1 那样, 利用 x 换 $-x$ 时左边不变, 而右边分母对换, 就知道有 $A=-C$, $B=D$. 又令 $x=0$ 代入, 得到 $B+D=\dfrac{2}{3}$, 于是 $B=D=\dfrac{1}{3}$.

再令 $x=\mathrm{i}$ 代入, 并利用 $B=D$, 就得到

$$\frac{1}{3}=\frac{A\mathrm{i}+B}{-\sqrt{3}\mathrm{i}}+\frac{C\mathrm{i}+D}{\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(C-A),$$

即可解出 $A=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=-C$.

最后可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{3(x^2+1)}+\int\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})\\&\qquad+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})+C.\qquad\square\end{aligned}$$

解 2 本题有许多技巧性的解法, 下面选其中之一.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}&=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^6+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}\\&=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3}\arctan x^3+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}\\&=-\frac{1}{3}\arctan x^3+\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right|+C.\qquad\square\end{aligned}$$

① 利用 $x^2=t$ (参见习题 1870) 和习题 1881 中的展开式于本题的被积函数 $\dfrac{1}{x^6+1}$, 就直接可以得到这个等式, 同时推出上面的 $a=0$ 和 $b=\dfrac{1}{3}$.

习题 1889 求 $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

解 用部分分式展开方法求积依赖于对被积函数的分母的因式分解. 本题的分母可配方为

$$x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1=(x^2+\frac{3}{2}x)^2+(\frac{3}{2}x+1)^2,$$

可见分母没有实零点. 于是需要寻找如下的因式分解:

$$x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d),$$

其中 a,b,c,d 是待定的实数.

将上式右边展开, 等置两边同幂次项的系数, 就得到 a,b,c,d 满足的以下方程组:

$$a+c=3,\ b+d+ac=\frac{9}{2},\ bc+ad=3,\ bd=1.$$

从方程组消去 a,c,d 后得到 b 满足的方程为

$$2b^4-5b^3+4b^2-5b+2=(b-2)(2b-1)(b^2+1)=0,$$

可见 $b=2$ 或 $b=\frac{1}{2}$. 任取其中之一, 例如取前者, 即可确定 $a=2,c=1,d=\frac{1}{2}$,

从而得到所需要的因式分解为:

$$x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1=(x^2+2x+2)(x^2+x+\frac{1}{2}).$$

第二步是求被积函数的部分分式展开式:

$$\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}}.$$

两边乘以 x 后令 $x\to+\infty$, 得到 $A+C=0$. 用 $x=0$ 代入得到 $B+4D=0$. 这样就可消去其中两个. 再令 $x=\pm1$ 代入即可解出

$$A=\frac{4}{5},\ B=\frac{12}{5},\ C=-\frac{4}{5},\ D=-\frac{3}{5}.$$

最后可积分如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}&=\int\frac{\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}}{x^2+x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}\int\frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}\\&\quad-\frac{2}{5}\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\\&=\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}\right|+\frac{8}{5}\arctan(x+1)\\&\quad-\frac{2}{5}\arctan(2x+1)+C.\quad\square\end{aligned}$$

3.2.2 用奥斯特罗格拉茨基法求积 (习题 1890–1902)

从上一小节可知, 有理函数的原函数不仅仅是初等函数, 而且只能是有理函数、对数函数和反正切函数这三项之和. 我们将后两项称为超越函数项. 还可以从部分分式的形状 (3.14) 看出, 后两项只能来自于部分分式中分母为 $x-a$ 和 x^2+px+q 的项 (这里需要后面 §3.2.3 的习题 1921 的结论). 这就是奥斯特罗格拉茨基方法的根据. 用这种方法可以用纯代数方法 (不通过积分而) 直接求出原函数中的有理函数部分, 而余下的是容易直接积分得到的超越函数项.

关于奥斯特罗格拉茨基方法的详细介绍可以参考 [15] 第二卷的 §8.2 的 276 小节.

具体来说, 设被积函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为真有理分式, 其分母 $Q(x)$ 可分解为互素的一次因子之幂 $(x-a)^k,\cdots$ 和二次因子之幂 $(x^2+px+q)^m,\cdots$ 的乘积, 且在所有指数 $k,\cdots,m,\cdots$ 中至少有一个大于 1, 则就有奥斯特罗格拉茨基公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{O}$$

其中右边的 $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 和 $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 都是真有理分式, 且对于分母 $Q(x)$ 的每一个因子 $(x-a)^k$ $(k>1)$ 和 $(x^2+px+q)^m$ $(m>1)$, 在 $Q_1(x)$ 中相应地有 $(x-a)^{k-1}$ 和 $(x^2+px+q)^{m-1}$, 而在 $Q_2(x)$ 则只有 $(x-a)$ 和 (x^2+px+q).

对公式 (O) 两边求导, 得到奥斯特罗格拉茨基公式的第二形式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\Big(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\Big)'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \tag{O'}$$

这就是以下用待定系数法进行计算的出发点.

注 由于 $Q_1(x)$ 是 $Q(x)$ 和 $Q'(x)$ 的最大公因式, 而 $Q_2(x)=Q(x)/Q_1(x)$, 因此在奥斯特罗格拉茨基方法的计算中也可以不对 $Q(x)$ 作因式分解.

习题 1890 在什么条件下, 积分 $\displaystyle\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数?

解 1 根据命题 3.2, 本题的被积函数有以下的部分分式展开:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2},$$

由此可见, 问题是使得待定系数 $A=D=0$.

在上式两边乘以 x, 然后令 $x\to+\infty$, 得到 $A+D=0$. 于是只要求出 D 后令其等于 0 即可. 又于上式两边乘以 $(x-1)^2$, 然后令 $x\to1$, 就得到 $E=a+b+c$.

作下列减法, 即有

$$\begin{aligned}\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}-\frac{a+b+c}{(x-1)^2}&=\frac{-(a+b+c)x^2-(b+c)x-c}{x^3(x-1)}\\&=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1},\end{aligned}$$

然后只要两边乘以 $x-1$, 再令 $x\to1$, 就得到 $D=-a-2b-3c$.

结论: 本题的积分为有理函数的条件是 $a+2b+3c=0$. □

解 2 利用 §3.2.1 的习题 1874 解 3 中的方法可以直接计算出所需要的两个系数. 在被积函数的部分分式展开式两边乘以 x^3, 得到

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2}=Ax^2+Bx+C+x^3\Big(\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}\Big),$$

可见有

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2}\Big)\Big|_{x=0}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{2a}{(x-1)^2}-\frac{4(2ax+b)}{(x-1)^3}+\frac{6(ax^2+bx+c)}{(x-1)^4}\Big)\Big|_{x=0}=a+2b+3c.\end{aligned}$$

又在被积函数的部分分式展开式两边乘以 $(x-1)^2$, 得到

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3}=(x-1)^2\Big(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\Big)+D(x-1)+E,$$

可见有

$$\begin{aligned}D&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{ax^2+bx+c}{x^3}\Big)\Big|_{x=1}\\&=\Big(-\frac{a}{x^2}-\frac{2b}{x^3}-\frac{3c}{x^4}\Big)\Big|_{x=1}=-a-2b-3c.\end{aligned}$$ □

习题 1891 求 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 1 根据奥斯特罗格拉茨基公式 (O'), 这时有被积函数的展开式如下:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\Big(\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2}\Big)'+\frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=&\frac{-Ax^3+(A-2B)x^2+(-2A+B-3C)x+(-B+C)}{(x-1)^2(x+1)^3}\\&+\frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}.\end{aligned}$$

然后将右边通分, 分母与左边的分母相同, 等置两边的分子得到

$$\begin{aligned}x=&Dx^4+(-A+D+E)x^3+(A-2B-D+E)x^2\\&+(-2A+B-3C-D-E)x+(-B+C-E),\end{aligned}$$

这样就得到线性代数方程组

$$D=0,\quad -A+D+E=0,\quad A-2B-D+E=0,$$
$$-2A+B-3C-D-E=1,\quad -B+C-E=0.$$

即可解得 $D=0$, $A=B=E=-\dfrac{1}{8}$, $C=2A=-\dfrac{1}{4}$.

最后可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)}\\&=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{16}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|+C.\end{aligned}$$ □

解 2 本题的待定系数也可以用极限方法等求出. 为此在

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{-Ax^3+(A-2B)x^2+(-2A+B-3C)x+(-B+C)}{(x-1)^2(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}$$

的两边乘以 x, 然后令 $x \to +\infty$, 得到 $D=0$. 再将两边乘以 x^2, 然后令 $x \to +\infty$, 就得到 $A=E$. 于展开式的两边乘以 $(x-1)^2$ 后分别令 $x \to 1$ 和 $x=0$, 得到

$$A+B+C=-\frac{1}{2} \text{ 和 } A+B-C=0.$$

又于展开式两边乘以 $(x+1)^3$ 后令 $x \to -1$, 得到

$$A-B+C=-\frac{1}{4}.$$

于是可以解出 $A=B=E=-\frac{1}{8}$, $C=-\frac{1}{4}$. □

习题 1892 求 $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

解 根据奥斯特罗格拉茨基公式 (O') 有以下展开式:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)' + \frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{x^3+1}.$$

计算出右边的第一项后与第二项通分, 然后等置两边的分子得到

$$\begin{aligned}1 &= (2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(A_1x^2+B_1x+C_1)(x^3+1)\\ &= A_1x^5+(-A+B_1)x^4+(-2B+C_1)x^3+(-3C+A_1)x^2\\ &\qquad +(2A+B_1)x+(B+C_1),\end{aligned}$$

于是得到线性代数方程组

$$\begin{aligned}&A_1=0,\ -A+B_1=0,\ -2B+C_1=0,\\ &-3C+A_1=0,\ 2A+B_1=0,\ B+C_1=1.\end{aligned}$$

由此解出 $A=C=A_1=B_1=0$, $B=\frac{1}{3}$, $C_1=\frac{2}{3}$.

最后即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x^3+1)^2} &= \frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3+1}\\ &= \frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+C,\end{aligned}$$

其中非代数部分的积分利用了 §3.2.1 的习题 1881 的答案. □

习题 1900 分出积分 $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$ 的代数部分.

解 1 由于 x^5+x+1 没有重零点, 根据奥斯特罗格拉茨基方法有下列展开式:

$$\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} = \left(\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}\right)' + \frac{A_1x^4+B_1x^3+C_1x^2+D_1x+E_1}{x^5+x+1}.$$

计算出右边的第一项后与第二项通分, 然后等置两边的分子得到

$$4x^5-1=A_1x^9+(B_1-A)x^8+(C_1-2B)x^7+(D_1-3C)x^6+(A_1+E_1-4D)x^5 \\ +(A_1+B_1+3A-5E)x^4+(B_1+C_1+4A+2B)x^3 \\ +(C_1+D_1+3B+C)x^2+(D_1+E_1+2C)x+(E_1+D-E),$$

再等置两边同幂次项的系数得到下列方程组:

$$A_1=0,\ B_1-A=0,\ C_1-2B=0,\ D_1-3C=0,$$

$$A_1+E_1-4D=4,\ A_1+B_1+3A-5E=0,\ B_1+C_1+4A+2B=0,$$

$$C_1+D_1+3B-3C=0,\ D_1+E_1+2C=0,\ E_1+D-E=-1.$$

求解得到 $D=-1$, 其余的待定系数都等于 0. 这表明本题的积分只有代数部分.

于是就得到答案为

$$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{x^5+x+1}+C.\quad\square$$

解 2 由奥斯特罗格拉茨基公式 (O) 知道, 在公式右边的积分号外的有理分式为 $\dfrac{P(x)}{x^5+x+1}$, 其中分子 $P(x)$ 为不超过 4 次的多项式. 若在积分中先凑微分, 再作分部积分, 则有可能得到与代数积分有关的部分. 为此先作计算

$$(x^5+x+1)'=5x^4+1,\quad 4x^5-1=x(5x^4+1)-x^5-x-1,$$

然后就可得到

$$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x(5x^4+1)-(x^5+x+1)}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int x\cdot\frac{\mathrm{d}(x^5+x+1)}{(x^5+x+1)^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+x+1}$$

$$=-\frac{x}{x^5+x+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+x+1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5+x+1}=-\frac{x}{x^5+x+1}+C.\quad\square$$

解 3 作变量代换 $t=x^5+x+1$, 则由 $t'_x=5x^4+1>0$ 可知存在单调递增的反函数 $x=x(t)$, 且对一切 t 成立恒等式 $t=x^5(t)+x(t)+1$. 从隐函数求导法则 (或反函数求导法则) 有

$$1=[5x^4(t)+1]x'(t),$$

两边乘以 $x(t)$, 得到

$$x(t)=[5x^5(t)+x(t)]x'(t).\tag{3.15}$$

然后可利用 $t=x^5(t)+x(t)+1$, (3.15) 和分部积分法计算如下:

$$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4x^5(t)-1}{t^2}\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{4x^5(t)-[t-x^5(t)-x(t)]}{t^2}\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{[5x^5(t)+x(t)]-t}{t^2}\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{x(t)-tx'(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{x(t)}{t}+C=-\frac{x}{x^5+x+1}+C.\quad\square$$

习题 1902 在什么条件下, 积分 $\displaystyle\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,\mathrm{d}x$ 为有理函数?

解 从题意可知分母的系数 a,b,c 不全为 0. 分以下几种情况讨论.

(1) $a\neq 0$, $b^2-ac\neq 0$. 这时根据奥斯特罗格拉茨基公式 (O') 有下列展开式:

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}=\left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)'+\frac{A_1x+B_1}{ax^2+2bx+c},$$

计算出右边的第一项后与第二项通分, 然后等置两边的分子得到

$$\begin{aligned}\alpha x^2+2\beta x+\gamma&=aA_1x^3+(-aA+aB_1+2bA_1)x^2\\&\quad+(-2aB+2bB_1+cA_1)x+(cA-2bB+cB_1),\end{aligned}$$

再等置两边同幂次项的系数得到下列方程组:

$$\begin{cases}aA_1&=0,\\-aA+aB_1+2bA_1&=\alpha,\\-2aB+2bB_1+cA_1&=2\beta,\\cA-2bB+cB_1&=\gamma.\end{cases}$$

从题意可见, 只要求出未知量 $A_1=0$, $B_1=\dfrac{a\gamma+c\alpha-2b\beta}{2(ac-b^2)}$, 就知道所要求的条件为

$$a\gamma+c\alpha-2b\beta=0.$$

(2) $a\neq 0$, $b^2-ac=0$.

这时存在 x_0, 使得被积函数的分母为 $a^2(x-x_0)^4$. 由于分子是不超过 2 次的多项式, 在被积函数的部分分式展开式中不可能出现 $\dfrac{A}{x-x_0}$ $(A\neq 0)$ 的项. 这一点是容易证明的. 只要按照被积函数写出标准的部分分式展开式, 然后两边乘以 x, 令 $x\to+\infty$, 就可以证明 $A=0$.

因此积分不会含有非代数部分, 即只能是有理函数.

(3) $a=0$, $b\neq 0$. 将分母写为 $(2bx+c)^2=4b^2(x-x_1)^2$, 其中 $x_1=-\frac{c}{2b}$, 然后写出部分分式展开式

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(2bx+c)^2}=\frac{\alpha}{4b^2}+\frac{C}{x-x_1}+\frac{D}{(x-x_1)^2}.$$

两边乘以 $(x-x_1)^2$, 求导, 且令 $x\to x_1$, 就可以计算得到

$$C=\left(\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{4b^2}\right)'\bigg|_{x=x_1}=\frac{\alpha x_1+\beta}{2b^2}=\frac{-c\alpha+2b\beta}{4b^3},$$

可见条件为 $c\alpha-2b\beta=0$.

(4) $a=b=0$, 则显然积分为多项式.

合并以上, 可知答案为: (i) $a\gamma-2b\beta+c\alpha=0$, (ii) $b^2-ac=0$. □

小结 在有理分式函数的不定积分中, 求部分分式展开式的待定系数往往是其中的主要计算部分. 奥斯特罗格拉茨基方法中的展开式的第一项计算不需要部分分式展开, 而第二项的分母中的因式 $x-a$ 和 x^2+px+q 都是一重的, 它们的积分都比较容易

(有时第二项的积分可以不必经过部分分式展开这一步而得到), 因此这在很多情况下是一种较好的计算方法.

对于奥斯特罗格拉茨基方法中的待定系数计算, 虽然系数个数较多, 但可以发现在许多习题中该方法的计算量并不大, 无论用线性方程组求解或极限法等都是如此. 这是因为作为线性代数方程组来说, 其中未知数的许多系数都是 0 的缘故. 这与一般的部分分式展开的待定系数的线性代数方程组的情况很不一样, 不仅便于求解, 而且还在许多问题中导致许多待定系数的值为 0. (当然这最后一点还只是经验之谈.)

因此我们在 §3.3 以后的几节中, 还会多次用奥斯特罗格拉茨基方法来求其中出现的有理分式函数的不定积分.

3.2.3　杂题 (习题 1903–1925)

习题 1903 求 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x$.

解　作代换 $t = x - 1$, 即可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t^{97}} + \frac{3}{t^{98}} + \frac{3}{t^{99}} + \frac{1}{t^{100}}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{96t^{96}} - \frac{3}{97t^{97}} - \frac{3}{98t^{98}} - \frac{1}{99t^{99}} + C \\ &= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.\end{aligned}$$ □

注　本题也可以通过多次分部积分得到, 只是计算与答案都要复杂一点.

习题 1906 求 $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要)　分为两项求积即可:

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}.$$ □

习题 1907 求 $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要)　如下作代换 $t = x^4$ 即可:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(x^4-3)x^3\,\mathrm{d}x}{x^4(x^8+3x^4+2)} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(t-3)\,\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}.\end{aligned}$$ □

习题 1916 求 $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要)　如下凑微分即可:

$$\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}.$$ □

习题 1918 求 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 分子分母同除以 x^2 后如下凑微分即可:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}. \quad \square$$

习题 1921 试导出用于计算积分

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} \ (a \neq 0)$$

的递推公式. 利用这个公式计算:

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$$

解 记 $\Delta = b^2-4ac$, 则当 $\Delta = 0$ 时可直接将 I_n 积出, 故以下设 $\Delta \neq 0$. 模仿 §3.1 的习题 1817 的解 2, 从 I_{n-1} 开始, 就有

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\
&= \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - (1-n)\int \frac{(x+\frac{b}{2a})\,\mathrm{d}(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^n} \\
&= \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - (1-n)\int \frac{(x+\frac{b}{2a})(2ax+b)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} \\
&= \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{(ax^2+bx+c)+(\frac{b^2}{4a}-c)}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x+\frac{b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - 2(1-n)I_{n-1} - \frac{(1-n)\Delta}{2a}I_n,
\end{aligned}$$

由此即可解出

$$I_n = -\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta}\cdot I_{n-1}.$$

对于 $a=b=c=1$ 和 $n=3$, 接连用两次上述公式即有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + I_2 \\
&= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}I_1 \\
&= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 1925 计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$, 式中 n 为正整数.

解 用欧拉公式可知分母 $x^{2n}+1$ 的 $2n$ 个零点可分为两组, 其中虚部大于 0 的 n 个零点可记为

$$x_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k-1)}{2n}} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k=1,2,\cdots,n;$$

而余下的 n 个零点是上述 n 个零点的共轭复数, 记为

$$\overline{x}_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - \mathrm{i}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k=1,2,\cdots,n.$$

由于它们都是单重零点, 因此就有 (复数域中的) 部分分式展开式

$$\frac{1}{x^{2n}+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B_k}{x-\overline{x}_k}\right).$$

两边乘以 $x-x_k$, 然后令 $x\to x_k$, 这时可用洛必达法则①, 于是得到

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{x\to x_k}\frac{x-x_k}{x^{2n}+1} \\ &= \frac{1}{2nx_k^{2n-1}} = -\frac{x_k}{2n},\ k=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

用同样的方法可得到 $B_k = \overline{A}_k$, $k=1,2,\cdots,n$.

将所得到的复系数代入展开式, 就可以整理得到实数域中的部分分式展开式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{2n}+1} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{-(x_k+\overline{x}_k)x + 2|x_k|^2}{x^2-(x_k+\overline{x}_k)x+|x_k|^2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+2}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}. \end{aligned}$$

最后可积分如下:

$$\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1\right)}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}\right. \\ &\qquad \left.+2\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1\right) \\ &\qquad +\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\arctan\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}+C. \end{aligned}$$ □

① 对于分子分母均以 a 为单零点的分式, 不妨设 $P(a)\neq 0$, $Q(a)\neq 0$, 可直接验证以下等式成立:

$$\lim_{z\to a}\frac{(z-a)P(z)}{(z-a)Q(z)} = \lim_{z\to a}\frac{[(z-a)P(z)]'}{[(z-a)Q(z)]'} = \lim_{z\to a}\frac{P(z)+(z-a)P'(z)}{Q(z)+(z-a)Q'(z)},$$

因为上式两边都等于 $\frac{P(a)}{Q(a)}$.

§3.3 无理函数的积分法 (习题 1926–1990)

内容简介 这里的无理函数主要指根式函数. 它们的不定积分未必为初等函数. 本节主要学习如何处理被积函数为无理函数中的可积类型, 其中多数习题属于二次无理根式的求积问题.

3.3.1 用有理化方法求积 (习题 1926–1936)

这就是通过适当的代换将被积函数转化为有理函数, 然后用 §3.2 节的方法求积.

习题 1927 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

解 通过作代换 $x=t^6$ 即可将被积函数转化为有理函数, 从而得到:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^6(1+2t^3+t^2)}=\int\frac{6\,\mathrm{d}t}{t(t+1)(2t^2-t+1)},$$

于是有部分分式展开式如下:

$$\frac{6}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1}.$$

用 §3.2 节中的方法可求出

$$A=6,B=-\frac{3}{2},C=-9,D=\frac{3}{2},$$

然后可求积如下:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{2(t+1)}-\frac{9t-\dfrac{3}{2}}{2t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t\\
&=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|-\frac{9}{4}\int\frac{(4t-1)\,\mathrm{d}t}{2t^2-t+1}-\frac{3}{8}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}}\\
&=6\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|t+1|-\frac{9}{4}\ln|2t^2-t+1|-\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)+C\\
&=\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|\sqrt[6]{x}+1|-\frac{9}{4}\ln|2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1|-\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right)+C.\quad\square
\end{aligned}$$

习题 1933 求 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\ (a>0)$.

解 由被积函数的表达式可见 $0<x<a$. 将它改写为 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x}}}$, 然后可用代换

$$t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$$

使之有理化. (这种代换很有用, 参见 §3.1.5 的习题 1782 的解 3 及其注.)

这时 $x=\dfrac{a}{t^4+1}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{4at^3\,\mathrm{d}t}{(t^4+1)^2}$, 于是积分转化为

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = -4a\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^4+1)^2}.$$

用 §3.2.2 的奥斯特罗格拉茨基方法, 知道有展开式

$$\frac{t^2}{(t^4+1)^2} = \left(\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{t^4+1}\right)' + \frac{A_1t^3+B_1t^2+C_1t+D_1}{t^4+1},$$

计算得到 $A = B_1 = \frac{1}{4}$, 其余系数均为 0.

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} &= -\frac{at^3}{t^4+1} - a\int \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{at^3}{t^4+1} - \frac{a}{2}\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2}\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{at^3}{t^4+1} - \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} - \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} \\
&= -\frac{at^3}{t^4+1} - \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right| - \frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right) + C \\
&= -\sqrt[4]{x(a-x)^3} - \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)}+\sqrt{x}}\right| \\
&\qquad - \frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x(a-x)}}\right) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 1935 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解 1 先用展开法化简如下:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} &= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\cdot(1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x})}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

对最后一个积分用代换 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则有 $x = \frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$, 于是有

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

用奥斯特罗格拉茨基方法有展开式为

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \left(\frac{At+B}{(t-1)(t+1)}\right)' + \frac{Ct+D}{(t-1)(t+1)},$$

且可解得 $A = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$. 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} &= \sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{t}{2(t^2-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \\
&= \sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|+C. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 (概要) 《习题集》对此题有提示: 令 $x = \left(\dfrac{u^2-1}{2u}\right)^2$, 于是可将 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{x+1}$ 同时有理化. 虽然本题可不必用这个代换, 但对于被积函数为 $R(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$, 其中 $R(u,v)$ 为二元有理函数的情况, 上述提示的代换普遍有效. 具体计算从略. □

习题 1936 考虑积分

$$\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]\,\mathrm{d}x,$$

其中 R 为有理函数, p, q, n 为整数. 证明: 若 $p+q=kn$, 其中 k 为整数, 则该积分为初等函数.

解 (概要) 只需要讨论 $a \neq b$ 的情况. 从条件可知有 $\dfrac{q}{n} = k - \dfrac{p}{n}$, 因此得到

$$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}} = (x-b)^k \cdot \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{n}},$$

其中设 $x-b>0$. 只要令 $t = \left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{1}{n}}$, 就可将被积函数转化为有理函数, 从略. □

3.3.2 含二次无理式的有理函数的求积 (习题 1937–1965)

这是指被积函数为 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 的不定积分, 其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数. 利用三角函数代换或者欧拉代换就可以证明这类被积函数的不定积分都是初等函数. 然而从计算角度出发, 还有许多其他方法可供选择, 它们往往更为有效.

在这一小节中只考虑具有 (或可转化为) 下列形式的被积函数:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{1}{y},$$

其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式, $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, 其中设 $a \neq 0$, 且根号下不是完全平方.

在 §3.1.2 的 (3.3) 和 §3.1.6 的 (3.6) 中已经见到这类积分的最简单情况, 即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x.$$

习题 1937 求 $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t = x + \dfrac{1}{2}$, 将根式内的二次三项式规范化 (也称标准化), 展开求积如下:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{t^2+\dfrac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2+\frac{3}{4}) - t - \frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+\dfrac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+\dfrac{3}{4}}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\dfrac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right| - \sqrt{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right| + C$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C. \quad \square$$

注 一开始的代换 $t=x+\dfrac{1}{2}$ 并非必要, 但在作了这个规范化代换之后对于观察思路和套用基本积分公式都较为方便. 本题属于

$$P(x)\cdot\frac{1}{y},$$

其中 $P(x)$ 是多项式, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$. 以上解法对这类被积函数具有典型性.

习题 1938 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 为作倒代换 (这里可以参考 §3.1.3 的习题 1682), 先作代换 $t=x+1$, 然后可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-t+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}+1}}\\&=-\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}\right|+C\\&=-\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 1 如习题 1682 的解 2 后的注中所说, 在本题的求解中只考虑了 $t=x+1>0$ 的情况, 但所得到的结果对于 $x+1<0$ 仍然成立.

注 2 本题的倒代换方法可适用于以下类型的被积函数:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^k y},$$

其中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, k 为正整数, 当 $k>1$ 时即将其转化为习题 1937 的类型.

习题 1940 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 先将被积函数改写成有理函数除以 $y=\sqrt{x^2+2x+2}$, 然后展开并求积如下:

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}}}\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\\&\qquad-\sqrt{2}\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\right|+C\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\\&\qquad-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2}{2x}+\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{2}x}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 本题的积分可以用如下的欧拉代换来求积[1]：

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

将上式两边平方, 即有 $x=\dfrac{t^2-2}{2(t+1)}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$, 从而可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t-x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t(t^2+2t+2)}{(t^2-2)(t+1)}\,\mathrm{d}t-x\\&=\int\left(1+\frac{1}{t+1}+\frac{4}{t^2-2}\right)\mathrm{d}t-x=\ln|t+1|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+t-x\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|\\&\qquad+\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 在解 1 中的方法具有典型性, 即先将被积函数转化为以下形状:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{1}{y},\tag{3.16}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, 然后将有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 展开为多项式与部分分式之和, 再逐项求积.

在 (3.16) 中的有理函数 $P(x)/Q(x)$ 为多项式时有以下命题, 它将求积问题转化为待定系数的计算. 命题可以用数学归纳法证明, 或参见 [15] 的第二卷的 §8.3 的 284 小节.

命题 3.3 若 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, 则有

$$\int\frac{P_n(x)}{y}\,\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)\,y+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y},$$

其中 $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式, λ 为常数.

习题 1943 求 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 仿照习题 1937 的解法, 先作规范化代换 $x-1=t$, 然后可展开并求积如下:

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t+1)^3}{\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t=\int\frac{-t(2-t^2)-3(2-t^2)+5t+7}{\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=-\int t\sqrt{2-t^2}\,\mathrm{d}t-3\int\sqrt{2-t^2}\,\mathrm{d}t+5\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}}+7\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}}\\&=\frac{1}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}-3\left(\frac{1}{2}t\sqrt{2-t^2}+\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-5\sqrt{2-t^2}+7\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+C\\&=-\frac{1}{6}(2t^2+9t+26)\sqrt{2-t^2}+4\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+C\\&=-\frac{1}{6}(2x^2+5x+19)\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 现在用命题 3.3 提供的待定系数法求积. 这时有展开式

$$\frac{x^3}{y}=[(Ax^2+Bx+C)y]'+\frac{\lambda}{y},$$

[1] 参见为欧拉代换专设的 §3.3.3.

其中 $y=\sqrt{1+2x-x^2}$, A,B,C,λ 为待定系数. 计算上式并等置两边的分子的同幂次项系数 (分母为 y), 得到线性代数方程组为

$$\begin{cases}-3A &= 1,\\ 5A-2B &= 0,\\ 2A+3B-C &= 0,\\ B+C+\lambda &= 0.\end{cases}$$

解得

$$A=-\frac{1}{3},\ B=-\frac{5}{6},\ C=-\frac{19}{6},\ \lambda=4.$$

由此即可得到与解 1 相同的答案. □

注 由此可见, 与 §3.2.2 的奥斯特罗格拉茨基方法类似, 通过待定系数的计算代替了大量的积分计算, 最后只需要计算容易求积的 $\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$. 习题 1937 当然也可如此求解.

习题 1947–1950 与前面的习题 1938 类型相同, 用倒代换后即可用命题 3.3 的待定系数法或其他方法求解.

习题 1951 在什么条件下, 积分

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

是代数函数?

解 用命题 3.3 可见, 只要用待定系数法确定出使得 $\lambda=0$ 的条件即可. 引入记号 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, 则有展开式:

$$\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{y}=[(Ax+B)y]'+\frac{\lambda}{y},$$

计算得到线性代数方程组为:

$$\begin{cases}2aA &= a_1,\\ \frac{3}{2}bA+aB &= b_1,\\ cA+\frac{1}{2}bB+\lambda &= c_1.\end{cases}$$

根据克莱姆法则, 可见使得 $\lambda=0$ 的条件为

$$\begin{vmatrix}2a & 0 & a_1\\ \frac{3}{2}b & a & b_1\\ c & \frac{1}{2}b & c_1\end{vmatrix}=2a^2c_1+\frac{3}{4}b^2a_1-aca_1-abb_1=0.\quad\square$$

下面考虑被积函数为 (3.16) 的不定积分

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{y},$$

其中 $Q(x)$ 为不可约的二次三项式的情况, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$. 这就是《习题集》中习题 1957–1965 的内容. 下面举例说明其中可用的方法.

习题 1957 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 用三角函数代换 (参见 §3.1.5 的习题 1778 等) $x=\cos t$, 则可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = -\int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^2 t+1}\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{2+\tan^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)+C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x}\right)+C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1961 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 令 $x+\frac{1}{2}=t$, 即可使得两个二次三项式同时规范化:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}.$$

然后作三角代换 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec\theta$ 求积如下:

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} = 4\int \frac{\sec\theta\,\mathrm{d}\theta}{5\sec^2\theta+3} = 4\int \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{5+3\cos^2\theta}\\ &= 4\int \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{8-3\sin^2\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{3}\sin\theta)}{8-3\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin\theta}\right|+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}t+\sqrt{3}\sqrt{t^2-5/4}}{2\sqrt{2}t-\sqrt{3}\sqrt{t^2-5/4}}\right|+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3}\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3}\sqrt{x^2+x-1}}\right|+C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1963 求 $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 先将其一部分凑微分得到

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

其中第二项已作了变量代换 $t=\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

对第二项的积分用三角代换 $t=\tan\theta$, 就可积分如下:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}&=\frac{2}{3}\int\frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sec^3\theta}=\frac{2}{3}\int\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}\sin\theta+C=\frac{2}{3}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+C\\&=\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.\end{aligned}$$

合并以上结果, 就有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}&=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C\\&=\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1964 利用分式线性代换 $x=\dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 计算积分:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 问题是选择参数 α 和 β 的值, 使得这个代换将两个二次三项式同时实现规范化, 即同时不出现一次项. 计算得到

$$x^2\pm x+1=\frac{(\beta^2\pm\beta+1)t^2+(2\alpha\beta\pm\alpha\pm\beta+2)t+(\alpha^2\pm\alpha+1)}{(t+1)^2},$$

可见应当使得同时成立

$$2\alpha\beta+2=\alpha+\beta,\quad 2\alpha\beta+2=-\alpha-\beta,$$

因此有 $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=-1$. 于是 α,β 是二次方程 $u^2-1=0$ 的两个根.

取 $\alpha=-1$, $\beta=1$, 作代换 $x=\dfrac{t-1}{t+1}$, 则有 $t=\dfrac{1+x}{1-x}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$, 于是就得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}&=2\int\frac{(t+1)\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}\\&=2\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}+2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.\end{aligned}$$

以下分别计算上式右边的两个积分.

对第一个积分, 令 $t^2=\theta$, 则有 $2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\theta$. 又令 $3\theta+1=s^2$, 则有 $\theta=\dfrac{1}{3}(s^2-1)$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{2}{3}s\,\mathrm{d}s$, $\theta+3=\dfrac{1}{3}(s^2+8)$, 于是有

$$\begin{aligned}2\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}&=\int\frac{\mathrm{d}\theta}{(\theta+3)\sqrt{3\theta+1}}\\&=2\int\frac{\mathrm{d}s}{s^2+8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{s}{2\sqrt{2}}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3t^2+1}}{2\sqrt{2}}\right)+C\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}\right)+C.\end{aligned}$$

对第二个积分, 作三角代换 $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta$, 则有 $t^2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\sec^2\theta$, $t^2+3=\dfrac{1}{3}(\sec^2\theta+8)$, $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, 于是有

$$\begin{aligned}
2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}&=\frac{6}{\sqrt{3}}\int\frac{\sec\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sec^2\theta+8}=\frac{6}{\sqrt{3}}\int\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+8\cos^2\theta}\\
&=\frac{6}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{9-8\sin^2\theta}=\frac{3}{\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}(2\sqrt{2}\sin\theta)}{9-8\sin^2\theta}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3+2\sqrt{2}\sin\theta}{3-2\sqrt{2}\sin\theta}\right|+C\\
&=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{1+3t^2}+2\sqrt{6}t}{3\sqrt{1+3t^2}-2\sqrt{6}t}\right|+C\\
&=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(1+x)}\right|+C.
\end{aligned}$$

合并以上即得

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=&\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}\right)\\
&+\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(1+x)}\right|+C. \quad \square
\end{aligned}$$

小结 本小节主要讨论类型为 (3.16) 的积分, 其中的被积函数是有理函数除以 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ (如习题 1940 所示, 这已经包括有理函数乘以 y 的被积函数在内).

先将有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 展开为多项式与部分分式之和, 从而可将上述不定积分展开为若干项分别处理.

以下有三种情况:

(1) 对于其中与多项式对应的积分, 可展开求积, 或者按照命题 3.3 用待定系数法求积. 见习题 1937, 1942 等;

(2) 对于部分分式的分母为 $(x-\alpha)^k$ 所对应的积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^k y}$, 可如习题 1938 及其注 2 所示用倒代换归结为 (1);

(3) 对于部分分式的分母为 $(x^2+px+q)^k$ 所对应的积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k y}$, 则首先需要将 x^2+px+q 和 ax^2+bx+c 同时规范化, 即同时消去它们的一次项. 如习题 1964 所示, 这可以通过分式线性代换实现, 然后再用三角代换有理化后求积.

注 这里对于根号下的二次三项式的规范化作一点补充. 一方面, 这种规范化往往对求积有帮助, 例如习题 1937, 1943 中都是如此. 然而另一方面, 从前面的许多例子可见, 在什么时候作规范化才有效是一个较复杂的问题.

若在情况 (1) 中用待定系数法, 则不必作规范化; 在情况 (2) 中需要作倒代换 (见习题 1938), 这时应当在倒代换之后再对根号下的二次三项式作规范化. 最后, 对于情况 (3) 则需要按照习题 1964 提出的方法来做, 即使得两个二次三项式同时实现规范化.

3.3.3 欧拉代换 (习题 1966–1970)

上一小节只考虑被积函数为有理函数 (乘) 除以二次无理式 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分问题. 对于含有二次无理式的一般积分问题, 即被积函数为 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 的不定积分, 其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数, 我们需要更为有力的有理化方法. 本节的欧拉代换就是这样的方法. 它在理论上证明了上述被积函数的不定积分一定是初等函数.

当然对于每一个具体的积分问题来说, 用欧拉代换的计算量未必最小. 以下将通过例题来比较用欧拉代换与其他方法的计算过程. (在上一小节的习题 1940 的解 2 已经用过下面列出的第一种欧拉代换.)

欧拉代换有以下三种:

(1) 若 $a>0$, 则可用
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t;$$
(2) 若 $c>0$, 则可用
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c};$$
(3) 对于根号内为可约的二次三项式, 则可用
$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1).$$

注 若将第三种欧拉代换写为 $t=\sqrt{\dfrac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$, 就可看出它与 §3.1.5 的习题 1782 的解 3 中所用的代换 $t=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ 没有本质差别 (参看该题的注). 此外这种代换还有另一个方向的推广, 见 §3.3.1 的习题 1933.

习题 1966 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 1 用第一种欧拉代换 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ (即令 $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$).

将上式两边平方后得到
$$x=\frac{t^2-1}{2t+1},\ \mathrm{d}x=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t,$$
于是可积分如下:
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2(t^2+t+1)}{t(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t=\int\Big(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{(2t+1)^2}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C$$
$$=2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}|$$
$$+\frac{3}{4(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})}+C$$
$$=2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}|+\sqrt{x^2+x+1}-x+C.\quad\Box$$

解 2 不用欧拉代换, 则容易想到在分母有理化后即可用 §3.3.2 的方法计算如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x-\int\Big(1-\frac{1}{x+1}\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x-x+\ln|x+1|.$$

于是可用上一小节的方法计算最后一式中的积分如下:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\Big|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\Big|+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}},$$

对最后一个积分可以用 §3.3.2 的习题 1938 的答案. 以下从略. □

习题 1967 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 1 用第二种欧拉代换 $\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1$ (即令 $t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$). 将上式两边平方后得到

$$x=\frac{2(t-1)}{t^2+1},\quad \mathrm{d}x=\frac{2(1+2t-t^2)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

于是可积分如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int\Big(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t=\ln\Big|\frac{t-1}{t}\Big|-2\arctan t+C$$
$$=\ln\Big|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\Big|-2\arctan\Big(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\Big)+C.\quad\square$$

解 2 在分母有理化后即可用 §3.3.2 的方法求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{2x+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}-\int\frac{(1-2x-x^2)\,\mathrm{d}x}{(2x+x^2)\sqrt{1-2x-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x}{x+2}\Big|+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)\sqrt{1-2x-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x}{x+2}\Big|+\arcsin\Big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{1-2x-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x}{x+2}\Big|+\arcsin\Big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big)+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\Big|$$
$$-\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x+3+\sqrt{1-2x-x^2}}{x+2}\Big|+C$$
$$=\arcsin\Big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big)+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{x+3+\sqrt{1-2x-x^2}}\Big|+C.\quad\square$$

习题 1969 求 $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

从本题出现的根式可见三种欧拉代换都可以用, 以下试看情况如何, 然后再举不用欧拉代换的一种解法.

解 1 用第三种欧拉代换 $\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$, 也就是 $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$. 将此式平方后得到

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\quad \mathrm{d}x=-\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}.$$

于是可积分如下:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x=-2\int \frac{t(t+2)\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}\\
&=\int\Big(-\frac{17}{108(t+1)}+\frac{5}{18(t+1)^2}+\frac{1}{3(t+1)^3}+\frac{3}{4(t-1)}-\frac{16}{27(t-2)}\Big)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{108}\ln\left|\frac{(t-1)^{81}}{(t+1)^{17}(t-2)^{64}}\right|-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}+C\\
&=\frac{1}{108}\ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+3x+2}-x-1)^{81}}{(\sqrt{x^2+3x+2}+x+1)^{17}(\sqrt{x^2+3x+2}-2x-2)^{64}}\right|\\
&\qquad -\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{9}x+\Big(\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}\Big)\sqrt{x^2+3x+2}+C.\quad \square
\end{aligned}$$

注 在最后一步利用了

$$\frac{1}{t+1}=\sqrt{x^2+3x+2}-x-1.$$

解 2 用第一种欧拉代换 $\sqrt{x^2+3x+2}=t-x$ (即 $t=x+\sqrt{x^2+3x+2}$).
将上式平方后得到

$$x=\frac{t^2-2}{2t+3},\quad \mathrm{d}x=\frac{2(t^2+3t+2)}{(2t+3)^2}\,\mathrm{d}t,$$

于是可积分如下:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x=-2\int \frac{(3t+4)(t^2+3t+2)}{t(2t+3)^3}\,\mathrm{d}t\\
&=\int\Big(-\frac{16}{27t}-\frac{17}{54(3+2t)}-\frac{4}{9(3+2t)^2}+\frac{1}{6(3+2t)^3}\Big)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

以下从略. □

解 3 用第二种欧拉代换 $\sqrt{x^2+3x+2}=xt+\sqrt{2}$ (即 $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{2}}{x}$).
将上式平方后得到

$$x=\frac{3-2\sqrt{2}t}{t^2-1},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}t^2-6t+2\sqrt{2}}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

于是可积分如下:

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{[(3+\sqrt{2}-(3+2\sqrt{2})t+\sqrt{2}t^2](2\sqrt{2}t^2-6t+2\sqrt{2})}{[(3-\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})t-\sqrt{2}t^2](t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t,$$

以下的计算量可能更大, 从略. □

解 4 在分母有理化后即可展开如下:

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = -\int \frac{(x-\sqrt{x^2+3x+2})^2}{3x+2}\,dx$$

$$= -\int \frac{2x^2+3x+2}{3x+2}\,dx + \int \frac{2x\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{-\frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\,dx + \frac{2}{3}\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx - \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}\,dx.$$

对前两项分别求积得到

$$\int \frac{-\frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\,dx = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x - \frac{8}{27}\ln|x+\frac{2}{3}| + C,$$

$$\frac{2}{3}\int \sqrt{x^2+3x+2}\,dx = \frac{1}{3}(x+\frac{3}{2})\sqrt{x^2+3x+2} - \frac{1}{12}\ln|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}| + C.$$

再用 §3.3.2 的方法对第三项求积, 先令 $t = x+\frac{2}{3}$, 然后计算如下:

$$-\frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}\,dx = -\frac{4}{9}\int \frac{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}{t}\,dt = -\frac{4}{9}\int \frac{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}{t\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}\,dt$$

$$= -\frac{4}{9}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}} - \frac{20}{27}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}} - \frac{16}{81}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}}$$

$$= -\frac{2}{9}\int \frac{(2t+\frac{5}{3})\,dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}} - \frac{10}{27}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}} + \frac{16}{81}\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{3t}+\frac{4}{9t^2}}}$$

$$= -\frac{4}{9}\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}} - \frac{10}{27}\ln\left|t+\frac{5}{6}+\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}\right| - \frac{8}{27}\ln|t| + \frac{8}{27}\ln\left|t+\frac{8}{15}+\frac{4}{5}\sqrt{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{9}}\right| + C$$

$$= -\frac{4}{9}\sqrt{x^2+3x+2} - \frac{10}{27}\ln|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}| + \frac{8}{27}\ln\left|\frac{5x+6+4\sqrt{x^2+3x+2}}{3x+2}\right| + C,$$

合并以上结果得到

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{9}x + \left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}\right)\sqrt{x^2+3x+2} + \frac{1}{108}\ln\left|\frac{(5x+6+4\sqrt{x^2+3x+2})^{32}}{(3x+2)^{64}(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2})^{49}}\right| + C. \quad \square$$

3.3.4 杂题 (习题 1971–1980)

在习题 1976–1979 中的二次根号下出现了 4 次多项式的情况, 下面看其第一题.

习题 1976 求 $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

解 1 对分子提出因子 x^2, 对分母则从根号外和根号内分别提出因子 x, 约去这些因子之后, 即可凑微分如下:

$$\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}}$$

令 $t = x + \dfrac{1}{x}$, 就容易用倒代换求积如下 (参见习题 1682, 1938):

$$\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{t}+C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{1+x^2}\right)+C. \quad \Box$$

解 2 [13] 先将积分作如下变换:

$$\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-2x^2}}$$
$$= \int \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}}},$$

然后计算得到:

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+C = -\frac{x}{x^2+1}+C,$$

于是可凑微分求积如下:

$$\int \frac{(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)^2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2+1}\right)+C. \quad \Box$$

下面是一类含有两个一次无理式的被积函数的可积性定理.

习题 1980 证明: 积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,\mathrm{d}x \quad (R \text{ 为有理函数})$$

的计算可归结为有理函数的积分.

解 不妨设 a, c 都不等于 0, 且 $ad \neq bc$, 因为其余情况可有理化是明显的.

令 $t = \sqrt{ax+b}$, 则有

$$x = \frac{t^2 - b}{a}, \ cx + d = \frac{ct^2 + (ad - bc)}{a},$$

可见被积函数已是只含一个二次根式的有理函数, 根据欧拉代换, 它可以有理化. □

3.3.5 二项式微分的求积 (习题 1981–1990)

称 $x^m(a+bx^n)^p$ 为二项式微分, 其中的三个参数 m, n, p 都是有理数. 关于它的不定积分有著名的切比雪夫定理. 下面将它列为命题, 并对可积条件的充分性给出证明.

命题 3.4 (切比雪夫定理) 二项式微分的不定积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x$$

为初等函数的充分必要条件是有理数 m, n, p 满足以下三个条件之一:

(1) p 为整数;

(2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数;

(3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ 为整数.

证 以下只证明上述条件的充分性. 定理的必要性部分已经超出了数学分析的范围, 有兴趣的读者可以参考 [9] 的第六章.

情况 (1) p 为整数. 这时可设有理数 m, n 为具有公分母的分数 $m = \dfrac{m_1}{N}$, $n = \dfrac{n_1}{N}$, 其中 m_1, n_1, N 都是整数, 且 $N > 0$.

于是只要令 $x = t^N$, 就有 $\mathrm{d}x = Nt^{N-1}\,\mathrm{d}t$, $x^m = t^{m_1}$, $x^n = t^{n_1}$, 从而实现了有理化. (这与 §3.3.1 的习题 1927 相似, 虽然该题不是二项式微分的积分.)

情况 (2) $\dfrac{m+1}{n}$ 为整数. 先令 $x^n = u$, 则有 $x = u^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$, 于是有

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}}(a+bu)^p u^{-1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

若设 $p = \dfrac{M}{N}$, M, N 为整数, 且 $N > 0$, 则再令 $a + bu = t^N$ 就可实现有理化.

合并以上可知, 对于情况 (2) 的有理化代换是

$$a + bx^n = t^N,$$

其中 $N\ (> 0)$ 是有理分数 p 的分母.

情况 (3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ 为整数. 与情况 (2) 一样, 先令 $x^n = u$, 则积分变换为

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int u^{\frac{m}{n}}(a+bu)^p u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}+p}\Big(\frac{a+bu}{u}\Big)^p u^{-1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

可见若设 $p=\dfrac{M}{N}$, M,N 为整数, 且 $N>0$, 则再令 $\dfrac{a+bu}{u}=t^N$ 就可实现有理化.

合并以上可知, 对于情况 (3) 的有理化代换是

$$\frac{a+bx^n}{x^n}=\frac{a}{x^n}+b=t^N,$$

其中 $N\,(>0)$ 是有理分数 p 的分母. □

注 由以上证明可见, 三种可积情况的代换即是前面都已经用过的代换, 不必死记. 然而三种可积情况的条件是需要知道的, 因为除此之外的二项式微分都不可积.

回顾前面的习题, 可以看到 §3.3.1 的习题 1933 就是二项式微分的积分题. 此外, 还有许多只要通过简单的代换就可以化为二项式微分的积分题. 读者可以试用本小节的方法去解它们.

习题 1981 求 $\displaystyle\int\sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 将被积函数改写为二项式微分:

$$x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}=x^2\sqrt{\frac{1+x}{x}},$$

可见 $m=\dfrac{3}{2}$, $n=1$, $p=\dfrac{1}{2}$. 由 $\dfrac{m+1}{n}+p=3$ 可见属于第三种可积情况. 只要用代换 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ 即可有理化. □

注 这就是在 §3.1.5 的习题 1782 的解 3 中所用的代换. 若又将积分写为

$$\int x\sqrt{x(1+x)}\,\mathrm{d}x,$$

则就是第三种欧拉代换.

习题 1982 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 将被积函数改写为

$$x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2},$$

从 $p=-2$ 可见属于第一种可积情况. 只要令 $x=t^6$ 即可实现有理化. □

注 本题与 §3.3.1 的习题 1927 所用的方法是类似的.

习题 1983 求 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 1 (概要) 将被积函数改写为

$$x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}},$$

可见 $m=1$, $n=\dfrac{2}{3}$, $p=-\dfrac{1}{2}$, 于是 $\dfrac{m+1}{n}=3$, 属于第二种可积情况.

作代换 $1+\sqrt[3]{x^2}=t^2$, 则有

$$x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}},\quad \mathrm{d}x=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\,\mathrm{d}t,$$

于是积分成为

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int (t^2-1)^2\,\mathrm{d}t,$$

即已实现有理化. □

解 2 (概要) 先令 $\sqrt[3]{x^2}=u$, 则 $x=u\sqrt{u}$, $\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$. 于是积分变换为

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{3}{2}\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}},$$

可见只要再令 $1+u=t^2$ 即可实现有理化. □

习题 1984 求 $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 不妨作更一般的讨论. 从本节前面的讨论已知, 对所有整数 k, 不定积分 $\int \frac{x^k\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 都是可积的. 若将被积函数写为二项式微分:

$$x^k(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

则 $m=k$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$. 于是有

$$\frac{m+1}{n}=\frac{k+1}{2}, \quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{k+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2},$$

可见当 k 为奇数时属于第二种可积情况, 而当 k 为偶数时属于第三种可积情况. 此外, 命题 3.4 还告诉我们, 当 k 不是整数时, 上述不定积分一定不是初等函数.

对于 $k=5$, 令 $1-x^2=u^2$, 有 $x\,\mathrm{d}x=-u\,\mathrm{d}u$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int (u^4-2u^2+1)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{5}u^5+\frac{2}{3}u^3-u+C \\ &= -\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C \\ &= -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\,(3x^4+4x^2+8)+C. \quad □\end{aligned}$$

习题 1985 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

解 (概要) 不妨讨论更一般的积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[k]{1+x^k}}$, 将其被积函数写为

$$(1+x^k)^{-\frac{1}{k}},$$

则有 $m=0$, $n=k$, $p=-\frac{1}{k}$. 这时有 $\frac{m+1}{n}+p=0$, 即属于第三种可积情况, 只要 k 为任意有理数时都是如此. (习题 1986 即是 $k=4$ 的情况.)

作代换 $u=x^k$, 则有 $x=u^{\frac{1}{k}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{k}u^{\frac{1-k}{k}}\,\mathrm{d}u$, 于是积分变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[k]{1+x^k}} = \frac{1}{k}\int \left(\frac{u}{1+u}\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

可见只要再令 $t=\sqrt[k]{\frac{u}{1+u}}$ 即可实现有理化. □

习题 1989 求 $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 将其被积函数写为二项式微分:

$$x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}},$$

则有 $m=\dfrac{1}{3}$, $n=2$, $p=\dfrac{1}{3}$. 这时有 $\dfrac{m+1}{n}+p=1$, 即属于第三种可积情况.

作代换 $x^2=u$, 则有 $x=\sqrt{u}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$, 于是积分变为

$$\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u=\int u^{\frac{1}{6}}(3-u)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{\frac{3-u}{u}}\,\mathrm{d}u.$$

可见只要再令 $t=\sqrt[3]{\dfrac{3-u}{u}}$ 即可实现有理化. □

在下一题中为便于引用命题 3.4 的条件, 将原题中的参数 m 改记为 k.

习题 1990 在什么情形下, 积分

$$\int\sqrt{1+x^k}\,\mathrm{d}x\ (k\ \text{为有理数})$$

为初等函数?

解 这时 $m=0$, $n=k$, $p=\dfrac{1}{2}$, 因此有

$$\frac{m+1}{n}=\frac{1}{k},\quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{k}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{2k}.$$

根据命题 3.4, 可见本题的积分只有在两种情况下为初等函数:

$$(1)\ k=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0;\quad (2)\ k=\frac{2}{2n-1}, n\in\mathbb{Z}.$$

它们分别是第二种和第三种可积情况.

上述条件的充分性是容易证明的.

对于情况 (1), $k=\dfrac{1}{n}$, 其中 n 为非零整数. 令 $x^k=u$, 则有

$$x=u^n,\ \mathrm{d}x=nu^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

于是积分变为

$$\int\sqrt{1+x^{1/n}}\,\mathrm{d}x=n\int u^{n-1}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u,$$

可见只要再令 $1+u=t^2$ 即可有理化.

对于情况 (2), $k=\dfrac{2}{2n-1}$, 其中 n 为整数. 令 $x^k=u$, 则有

$$x=u^{\frac{2n-1}{2}},\ \mathrm{d}x=\frac{2n-1}{2}u^{\frac{2n-3}{2}}\,\mathrm{d}u,$$

于是积分变为

$$\int\sqrt{1+x^{\frac{2}{2n-1}}}\,\mathrm{d}x=\frac{2n-1}{2}\int u^{\frac{2n-3}{2}}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u=\left(n-\frac{1}{2}\right)\int u^{n-1}\sqrt{\frac{1+u}{u}}\,\mathrm{d}u,$$

可见只要再令 $t=\sqrt{\dfrac{1+u}{u}}$ 即可有理化. □

§3.4 三角函数的积分法 (习题 1991–2065)

内容简介 本节介绍被积函数为三角函数的可积类型, 其中涉及多种方法. 以下按照被积函数的类型和方法分成几个小节.

在计算中当然经常需要用一些常见的三角恒等式、基本的求导公式和积分公式等. 注意与 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 有关的公式也是很有用的.

在《习题集》的 §3.1 中已经见到过被积函数为三角函数的不定积分, 例如习题 1695–1704, 1717–1718, 1742–1758 等. 除此之外, 对于很多无理函数的不定积分来说, 三角代换是一种很有用的有理化方法, 于是问题也归结为三角函数的不定积分, 例如见 §3.1 的习题 1778–1785, §3.3 的习题 1957–1962 等.

3.4.1 被积函数为 $\sin^m x\cos^n x$ 的求积 (习题 1991–2006, 2011–2012)

习题 1991 求 $\displaystyle\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用 $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$ 和三角恒等式 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, 就容易用凑微分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x&=\int\cos^4 x\,\mathrm{d}(\sin x)=\int(1-\sin^2 x)^2\,\mathrm{d}(\sin x)\\&=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\,\mathrm{d}(\sin x)\\&=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 如 §3.1.4 的习题 1747 的解 1 所示, 可以将 $\cos^5 x$ 展开为倍角函数的和来求积. 先计算被积函数的展开式如下:

$$\begin{aligned}\cos^5 x&=\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2\cos x\\&=\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\cos x\\&=\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 3x)+\frac{1}{8}(1+\cos 4x)\cos x\\&=\frac{5}{8}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{16}(\cos 3x+\cos 5x)\\&=\frac{5}{8}\cos x+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 5x.\end{aligned}$$

然后即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x&=\int(\frac{5}{8}\cos x+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 5x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{5}{8}\sin x+\frac{5}{48}\sin 3x+\frac{1}{80}\sin 5x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 用分部积分法将 $\cos x$ 的幂次降低, 则可求积如下.

先用分部积分 (并利用循环现象) 得到

$$\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \cos^4 x \sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}(\cos^4 x)$$
$$= \cos^4 x \sin x + 4\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \cos^4 x \sin x + 4\int (1-\cos^2 x)\cos^3 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x.$$

然后对上式最后一个积分用类似的方法计算如下:

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \cos^2 x \sin x + 2\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos^2 x \sin x + 2\int (1-\cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

合并以上即得到

$$\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C. \quad \square$$

解 4 (概要) 利用后面的习题 2011(b) 建立的递推公式求解. 这实际上就是解 3 的一般化. □

习题 1998 求 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 可用分部积分法求积如下:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \int \sin x\,\mathrm{d}\Big(\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\Big)$$
$$= \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \int \sin x \cdot \Big(-\frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3\cos^4 x}{\sin^4 x}\Big)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\cos x$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| - \frac{3}{2}\cos x + C. \quad \square$$

解 2 同样用分部积分法还有不同的求积方法:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \cos^3 x\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{2\sin^2 x}\Big)$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot 3\cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

以下与解 1 相同, 从略. □

解 3 可以一开始就展开求积如下:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \sin x\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$$
$$= -\cos x - 2\ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x},$$

上式最后一个积分即是下面的习题 1999 (它又是习题 2012(a) 的特例), 从略. □

习题 1999 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$.

解 1 将被积函数的分子 1 用 $\cos^2 x + \sin^2 x$ 代入, 即可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\ &= -\frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\ &= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\\ &= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 利用余切和余割函数的公式可用分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} &= -\int \csc x\,\mathrm{d}(\cot x) = -\csc x\cot x + \int \cot x\,\mathrm{d}(\csc x)\\ &= -\csc x\cot x - \int \cot^2 x\csc x\,\mathrm{d}x = -\csc x\cot x - \int (\csc^2 x - 1)\csc x\,\mathrm{d}x\\ &= -\csc x\cot x - \int \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 2002 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

解 1 对被积函数的分子 1 用 $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$ 代入, 即可展开并求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x} &= \int \frac{\cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x\cos^5 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x} + \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^5 x}\\ &= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x} + 2\int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x} + \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^5 x}\\ &= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} + 2\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^3 x} + \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^5 x}\\ &= -\frac{1}{2\sin^2 x} + 3\ln|\tan x| + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 用正切和正割函数可凑微分求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x} &= \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^3 x\cos^6 x} = \int \frac{\sec^6 x\,\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^3 x}\\ &= \int \frac{(\tan^2 x + 1)^3}{\tan^3 x}\,\mathrm{d}(\tan x)\\ &= \int \left(\tan^3 x + 3\tan x + \frac{3}{\tan x} + \frac{1}{\tan^3 x}\right)\mathrm{d}(\tan x)\\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{3}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 2004 求 $\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x$.

解 不妨讨论更为一般的积分 $\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数. 用下面的方法即可在每一步将指数降低 2, 从而最后得到所求的积分.

设 $n \geqslant 2$, 则有

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\,\mathrm{d}x &= \int \tan^{n-2} x\,(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}(\tan x) - \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

可用此公式按照 n 为奇数和偶数两种情况写出 $\int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ 的一般表达式.

对 $n = 5$ 可用此递推公式得到

$$\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C. \quad \square$$

注 对于指数为奇数的情况, 还可用下面的方法求出不定积分的一般公式.

记 $n = 2k+1$, k 为非负整数, 则有

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1} x\,\mathrm{d}x &= \int \tan x(\sec^2 x - 1)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i \int \tan x \sec^{2i} x\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k \int \tan x\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i \int \sec^{2i-1} x\,\mathrm{d}(\sec x) \\ &= (-1)^{k+1}\ln|\cos x| + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i}{2i}\sec^{2i} x + C.\end{aligned}$$

将此公式用于 $n = 5$ 就有

$$\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| - \sec^2 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C.$$

习题 2011 推出下列积分的递推公式:

$$\text{(a) } I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b) } K_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \sin^6 x\,\mathrm{d}x \ \text{和} \ \int \cos^8 x\,\mathrm{d}x.$$

解 (a) 用分部积分法就有

$$\begin{aligned}I_n &= \int \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,\end{aligned}$$

即解得所要的递推公式为:

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

由此即可递推计算得到 (过程从略):

$$I_6 = \int \sin^6 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x + C.$$

(b) 的求解可以模仿 (a) 的解法, 也可以用代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 归结为 (a), 这里只列出所得到的递推公式为

$$K_n = \int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}K_{n-2},$$

然后即可递推计算得到 (过程从略):

$$K_8 = \int \cos^8 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\cos^7 x\sin x + \frac{7}{48}\cos^5 x\sin x + \frac{35}{192}\cos^3 x\sin x + \frac{35}{128}\cos x\sin x + \frac{35}{128}x + C. \quad \square$$

习题 2012 推出下列积分的递推公式:

$$\text{(a) } I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}; \quad \text{(b) } K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

利用这些公式计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x} \quad \text{和} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}.$$

解 (a) 用分部积分法就有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \csc^n x\,\mathrm{d}x = -\int \csc^{n-2}x\,\mathrm{d}(\cot x) \\ &= -\csc^{n-2}x\cot x - (n-2)\int \csc^{n-2}x\,\cot^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\csc^{n-2}x\cot x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}, \end{aligned}$$

即解得所要的递推公式为:

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2}x\cot x + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

由此即可递推计算得到 (过程从略):

$$I_5 = \int \csc^5 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\csc^3 x\cot x - \frac{3}{8}\csc x\cot x + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

(b) 的求解与习题 2011(b) 类似, 这里只列出所得到的递推公式为

$$K_n = \int \sec^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}K_{n-2},$$

然后即可递推计算得到 (过程从略):

$$K_7 = \int \sec^7 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sec^5 x\tan x + \frac{5}{24}\sec^3 x\tan x + \frac{5}{16}\sec x\tan x + \frac{5}{16}\ln|\sec x + \tan x| + C. \quad \square$$

3.4.2 三角函数的变量不同时的求积 (习题 2013–2024)

与上一小节的习题不同, 在这个小节的习题中, 各个三角函数的变量不全相同, 因此积化和差等三角公式起重要作用. 为方便起见将它们以便于记忆的形式列出如下:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].\end{aligned}} \tag{3.17}$$

习题 2015 求 $\displaystyle\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

解 用积化和差公式展开后即可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin x(\cos\frac{x}{6}-\cos\frac{5x}{6})\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int[(\sin\frac{5x}{6}+\sin\frac{7x}{6})-(\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{11x}{6})]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C. \quad\square\end{aligned}$$

习题 2018 求 $\displaystyle\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x\,\mathrm{d}x$.

解 可利用倍角公式与积化和差公式展开求积如下:

$$\begin{aligned}&\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 3x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin 2x(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int(\sin 2x-\sin 2x\cos 4x+\sin 2x\cos 6x-\sin 2x\cos 4x\cos 6x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int[\sin 2x-\frac{1}{2}(-\sin 2x+\sin 6x)+\frac{1}{2}(-\sin 4x+\sin 8x)\\ &\qquad -\frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x+\cos 10x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int[\sin 2x-\frac{1}{2}(-\sin 2x+\sin 6x)+\frac{1}{2}(-\sin 4x+\sin 8x)\\ &\qquad -\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(-\sin 8x+\sin 12x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int(\frac{3}{8}\sin 2x-\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x+\frac{3}{16}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin 12x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x+C. \quad\square\end{aligned}$$

习题 2019 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 1 这时为了展开被积函数需要利用一个简单的恒等式

$$\sin(a-b)=\sin[(x+a)-(x+b)].$$

在 $\sin(a-b)\neq 0$ 时, 将被积函数的分子分母同乘以上述表达式后即可展开求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\big[\cot(x+b)-\cot(x+a)\big]\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.$$

在 $\sin(a-b)=0$ 时, 则存在整数 k, 使得 $a=b+k\pi$, 于是可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=(-1)^k\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x+a)}$$
$$=(-1)^k\int\csc^2(x+a)\,\mathrm{d}x=(-1)^{k+1}\cot(x+a)+C.\quad\Box$$

解 2 (概要) 虽然对被积函数的分母用积化和差公式不可能将分式展开, 但仍然可能对求积有帮助:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\int\frac{2\mathrm{d}x}{\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)}.$$

若有整数 k 使得 $a-b=k\pi$, 则就容易得到与解 1 相同的答案.

对于其他情况, 则可写成为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\mathrm{d}(2x+a+b)}{1-\sec(a-b)\cos(2x+a+b)},$$

以下可参考 §3.4.3 的习题 2028 (求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\varepsilon\cos x}$, 其中 $\varepsilon\in(0,1)\cup(1,+\infty)$), 从略. $\Box$

习题 2023 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\cos a}$.

解 1 将分母和差化积后即可模仿习题 2019 的解 1. 在 $\sin a\neq 0$ 时可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+\cos a}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2})}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\sin a}\int\left(\tan\frac{x+a}{2}-\tan\frac{x-a}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C.$$

在 $\sin a=0$ 时则 a 为 π 的整数倍. 若 $a=2n\pi$, n 为整数, 即是 §3.1.2 的习题 1668:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}+C;$$

若 $a=(2n+1)\pi$, n 为整数, 则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{-1+\cos x}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2}+C.\quad\Box$$

习题 2024 求 $\int \tan x \tan(x+a)\,\mathrm{d}x$.

解 若 $\tan a = 0$, 则 $\tan(x+a) = \tan x$, 见前面 §3.4.1 的习题 2004. 否则利用差角的正切函数公式

$$\tan a = \tan[(x+a)-x] = \frac{\tan(x+a)-\tan x}{1+\tan(x+a)\tan x},$$

即可实现正切函数的积化和差, 于是在 $\tan a \neq 0$ 时可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \tan x \tan(x+a)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{\tan a}[\tan(x+a)-\tan x]-1\right)\mathrm{d}x \\ &= -x + \frac{1}{\tan a}\cdot \ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

3.4.3 有理三角函数的求积 (习题 2025–2041)

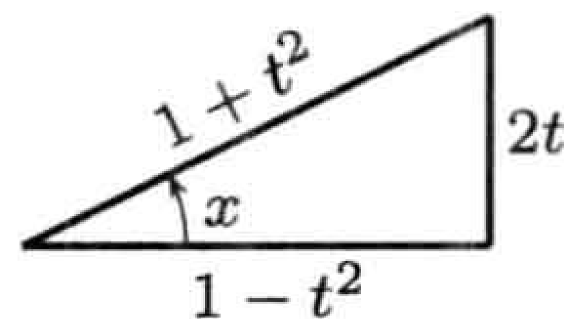
由于三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 的有理式可写成为 $R(\cos x, \sin x)$, 其中 $R(u,v)$ 是二元有理函数, 因此只要考虑 $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ 的求积.

利用所谓的万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, 则从下面的计算可见该代换能够同时将 $\sin x, \cos x$ 实现有理化 (附图是 x 为锐角的情况):

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$



万能代换的附图

这样就可以将有理三角函数的积分归结为有理函数的不定积分:

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

万能代换的缺点是可能引入繁复的计算, 因此在以下几种特殊情况中, 我们往往愿意使用所列出的更为简单的有理化代换.

(1) 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可用代换

$$t = \cos x,$$

其特例就是 $R(\cos x)\sin x$;

(2) 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则可用代换

$$t = \sin x,$$

其特例就是 $R(\sin x)\cos x$;

(3) 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 则可用代换

$$t = \tan x,$$

其特例就是 $R(\tan x)$. 若被积表达式为 $P(\cos^2 x, \cos x\sin x, \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $P(u,v,w)$ 是 u,v,w 的有理函数, 由 $t = \tan x$ 可计算得到

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \cos x\sin x = \frac{t}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

因此已经将积分 $\int P(\cos^2 x, \cos x \sin x, \sin^2 x)\,\mathrm{d}x$ 实现了有理化.

习题 2025 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5}$.

解 作万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{2\mathrm{d}t}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right) + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 2028 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, (a) $0 < \varepsilon < 1$, (b) $\varepsilon > 1$.

解 作代换 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则积分变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}.$$

(a) 在 $0 < \varepsilon < 1$ 时可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} &= \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot t\right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot \tan\frac{x}{2}\right) + C. \quad \square\end{aligned}$$

(b) 在 $\varepsilon > 1$ 时可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}{t+\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}\right| + C$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{t\sqrt{\varepsilon-1}+\sqrt{\varepsilon+1}}{t\sqrt{\varepsilon-1}-\sqrt{\varepsilon+1}}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{(\varepsilon-1)t^2 + 2t\sqrt{\varepsilon^2-1} + (\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)t^2 - (\varepsilon+1)}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon(1+t^2) + 2t\sqrt{\varepsilon^2-1} + (1-t^2)}{\varepsilon(1-t^2) + (t^2+1)}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x + \cos x}{1+\varepsilon\cos x}\right| + C. \quad \square\end{aligned}$$

在《习题集》的习题 2029–2041 中除了习题 2032, 2041 之外, 都属于本小节开始所说的情况 (3), 可用代换 $t = \tan x$ 求积. 一般来说, 这比用万能代换的计算量要小.

习题 2029 求 $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解 此被积函数满足本小节开始所示的情况 (3), 因此可用代换 $t=\tan x$ 求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^2 x\,\mathrm{d}x}{\sec^2 x+\tan^2 x} = \int\left(1-\frac{\sec^2 x}{2\tan^2 x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+\frac{1}{2}} \\ &= x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 2032 求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 分子分母同乘以 $\cos x-\sin x$, 然后可展开求积如下:

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\cos x(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)}{2\cos^2 x-1}+\int\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}(\sin x)}{2\sin^2 x-1} \\ &= -\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 x-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}(\cos x)+\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 x-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}(\sin x) \\ &= -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right|+C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 利用 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ 就可以求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x} \\ &= \frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C. \quad \square\end{aligned}$$

解 3 本题也可以用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 求积. 先作代换得到

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2(-t^2+2t+1)}\,\mathrm{d}t,$$

再用 §3.2.2 的奥斯特罗格拉茨基方法求出

$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2(-t^2+2t+1)} = \left(\frac{t-1}{t^2+1}\right)'+\frac{1}{t^2-2t-1},$$

然后即可求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{t-1}{t^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2-2}$$
$$= \frac{t-1}{t^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C. \quad \square$$

习题 2034–2037 的被积函数的分母都是 $\sin^n x+\cos^n x$ 的形式, 其中 n 取 $3,4,8$. 它们的求积与 §3.1.3 的习题 1718 类似 (其中 $n=4$). 下面只看其中的习题 2035.

习题 2035 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 1 此被积函数满足本小节开始所示的情况 (3), 因此可用代换 $t=\tan x$. 将被积函数的分子分母除以 $\cos^4 x$ 后可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{\sec^4 x\,\mathrm{d}x}{1+\tan^4 x}=\int\frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$
$$=\int\frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x}\right)+C. \quad \square$$

解 2 如习题 1718 所示, 分母可写成为倍角 $2x$ 的三角函数如下:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

因此本题的被积函数作为变量为 $2x$ 的有理三角函数也满足本小节开始所示的情况 (3), 从而可用代换 $t=\tan 2x$ 求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\int\frac{\sec^2 2x\,\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{2}\tan^2 2x}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C. \quad \square$$

解 3 将分母表示为 $4x$ 的三角函数后即可用习题 2028(a) 的现成结果如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{3+\cos 4x}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(4x)}{1+\frac{1}{3}\cos 4x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C. \quad \square$$

习题 2041 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$.

(《习题集》中在积分前的原文有“把分母化为对数的形式”, 其意图不清楚.)

解 1 从题可见 a,b 不同时为 0. 将分母的两项合并为一个正弦函数:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 即可求积如下 (其中套用了 §3.1.3 的习题 1703 的解 1):

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)}\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\sec^2\dfrac{x+\varphi}{2}}{\tan\dfrac{x+\varphi}{2}}\,\mathrm{d}\Big(\frac{x+\varphi}{2}\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\Big|\tan\frac{x+\varphi}{2}\Big|+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{2at+b(1-t^2)}=-\frac{2}{b}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-\dfrac{2a}{b}t-1}$$

$$=-\frac{2}{b}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-\frac{a}{b})^2-(1+\frac{a^2}{b^2})}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{bt-a-\sqrt{a^2+b^2}}{bt-a+\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\tan\frac{x}{2}-a-\sqrt{a^2+b^2}}{b\tan\frac{x}{2}-a+\sqrt{a^2+b^2}}\right|+C.\quad\square$$

解 3 如解 1 那样引入角 φ 后, 可用余割函数和余切函数求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{\mathrm{d}(x+\varphi)}{\sin(x+\varphi)}\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\csc(x+\varphi)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{[\csc(x+\varphi)-\cot(x+\varphi)]'}{\csc(x+\varphi)-\cot(x+\varphi)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln|\csc(x+\varphi)-\cot(x+\varphi)|+C.\quad\square\end{aligned}$$

3.4.4 用待定系数法与递推法求积 (习题 2042–2059, 2063–2065)

在《习题集》的习题 2042, 2046, 2050, 2053, 2057, 2059 中提出了求某些特殊形式的被积函数的积分时的待定系数法, 从而将积分计算归结为求待定系数的代数问题. 此外, 习题 2057–2059, 2063–2065 也可以从递推法来理解.

下面是最为基本的结果.

习题 2042 证明:

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

式中 A,B,C 为常数.

解 利用正弦和余弦函数的导数公式以及两个显然的积分结果:

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x = x+C,$$

$$\int \frac{(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

即可得到关于待定系数 A, B 的方程为:

$$a_1\sin x+b_1\cos x = A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x).$$

等置两边在 $\sin x$ 和 $\cos x$ 前的系数①, 得到关于 A, B 的线性代数方程组:

$$\begin{cases} aA-bB=a_1, \\ bA+aB=b_1, \end{cases}$$

可见在 a, b 不同时为 0 时, A, B 的解存在唯一. □

习题 2043 (b) 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 根据习题 2042, 只需按照下列方程

$$\sin x = A(\sin x-3\cos x)+B(\cos x+3\sin x),$$

写出关于系数 A, B 的方程组

$$\begin{cases} A+3B=1, \\ -3A+B=0. \end{cases}$$

在解得 $A=\dfrac{1}{10}$, $B=\dfrac{3}{10}$ 之后就得到

$$\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|+C. \quad □$$

解 2 作为对比, 我们看若不用待定系数法, 则如何用有理化方法解本题.

由于被积函数属于 §3.4.3 开始所说的情况 (3), 因此可 (代替万能代换而) 用代换 $t=\tan x$. 这样就有

$$x=\arctan t, \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

然后可求积如下:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\tan x-3} = \int \left(1+\frac{3}{\tan x-3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x+\int \frac{3\,\mathrm{d}t}{(t-3)(t^2+1)}$$
$$= x+\int \left(\frac{\frac{3}{10}}{(t-3)}+\frac{-\frac{3}{10}t-\frac{9}{10}}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= x+\frac{3}{10}\ln|t-3|-\frac{3}{20}\ln(t^2+1)-\frac{9}{10}\arctan t+C$$
$$= \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|+C. \quad □$$

---

① 如习题 2041 的解 1 所示, 有 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, 可见若 $a\sin x+b\cos x\equiv 0$, 则只能得到 $a=b=0$ (参看 §2.11.3 的习题 1456.1(e)).

现将包括习题 2042 在内的可用待定系数法求解的公式列表如下, 供比较和参考用.

2042 : $\displaystyle\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C;$

2046 : $\displaystyle\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}\,\mathrm{d}x = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c};$

2050 : $\displaystyle\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = A\sin x + B\cos x + C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x};$

2053 : $\displaystyle\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int\frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$

其中设 $(a-c)^2+b^2\neq 0$, λ_1,λ_2 是方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \ (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

的根, 而 $u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x, k_i = \dfrac{1}{a-\lambda_i}$ $(i=1,2);$

2057 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}};$

2059 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}}$, 设 $|a|\neq|b|$, n 为大于 1 的正整数.

可以看出, 上述表中的前 3 个公式的基本思想是类似的. 习题 2053 则要困难一点, 它涉及如何处理分母的二次型问题, 下面即将作专门讨论. 建议尚未学过高等代数中有关知识的读者先跳过此题, 以后再学. 表中的最后两个公式则是递推法的应用, 其中的待定系数可以在推导中直接得到, 这也将在下面讨论.

习题 2053 证明: 若 $(a-c)^2+b^2\neq 0$, 则

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}u_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int\frac{\mathrm{d}u_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中 A, B 为待定系数, λ_1,λ_2 为方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

的根, 而

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x, \quad k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i=1,2).$$

解 要理解本题的结论, 最好是从高等代数的二次型和对称矩阵出发.

首先观察 $b=0$ 的最简单情况①. 这时被积函数的分母为两个平方项的代数和, 而且可以有不同的写法:

$$a\sin^2 x+c\cos^2 x=a+(c-a)\cos^2 x=c+(a-c)\sin^2 x,$$

从而就可以展开如下:

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+c\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{b_1\,\mathrm{d}(\sin x)}{c+(a-c)\sin^2 x}+\int\frac{-a_1\,\mathrm{d}(\cos x)}{a+(c-a)\cos^2 x}.$$

(这种方法在 §3.4.3 的习题 2032 的解 1 中已经用过.)

将上述展开式与题中要证明的展开式比较, 可见这时的题设条件保证了 $a\neq c$. 按照题意取 $\lambda_1=c$, $\lambda_2=a$, 则就得到如下展开式:

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2 x+c\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{b_1}{a-c}\int\frac{\mathrm{d}((a-c)\sin x)}{\dfrac{1}{a-c}\cdot(a-c)^2\sin^2 x+c}$$
$$-\frac{a_1}{c-a}\int\frac{\mathrm{d}((c-a)\cos x)}{\dfrac{1}{c-a}\cdot(c-a)^2\cos^2 x+a}.$$

由此可见, 本习题中给出的 u_1,u_2,k_1,k_2 的公式只能适用于 $b\neq 0$ 的情况.

现在从二次型的角度来讨论 $b\neq 0$ 的一般性情况. 可以看出本题的被积函数的分母是与对称阵 $S=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$ 对应的二次型. 题设中的 λ_1,λ_2 就是这个对称阵 S 的两个特征值. 从特征方程

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

可见, 题设条件 $(a-c)^2+b^2\neq 0$ 表明 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

于是问题成为如何将分母的二次型对角化, 即写成为两个二次项的代数和, 而前面已经讨论过的 $b=0$ 恰好就是不需要做这一步的简单情况.

为简明起见, 记单位列向量 $\boldsymbol{x}=(\sin x,\cos x)^T$, 于是本题的被积函数分母上的二次型可记为 $\boldsymbol{x}^TS\boldsymbol{x}$, 其中指数上的记号 T 表示矩阵或向量的转置.

根据二次型或对称阵理论, 存在正交矩阵 U, 使得实现

$$S=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}U^T,$$

$$\boldsymbol{x}^TS\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TU\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}U^T\boldsymbol{x},$$

即在对称阵对角化的同时也就使得对应的二次型成为平方项的代数和, 其系数为两个特征值.

记 $U^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T$, 则 y_1,y_2 都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的线性组合. 由于 U 为正交阵, 因此有 $y_1^2+y_2^2=1$, 而分母则成为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$.

与 $b=0$ 的情况类似, 分母有两种表达方式:

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2=\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)y_2^2=\lambda_2+(\lambda_1-\lambda_2)y_1^2.$$

① 《习题集》中的习题 2054 的被积函数为 $\dfrac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$, 就属于 $b=0$ 的情况.

可以计算得到①

$$(\lambda_2-\lambda_1)y_2^2=\frac{1}{a-\lambda_1}[(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x]^2,$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)y_1^2=\frac{1}{a-\lambda_2}[(a-\lambda_2)\sin x+b\cos x]^2,$$

然后将被积函数的分子分解如下:

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A[(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x]+B[(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x],$$

再仿照 $b=0$ 那样将原来的不定积分展开为两个积分即可. □

以下几题都可以从递推法的角度来学习. 这类习题在前面已经多次遇到, 例如 §3.4.1 的习题 2011–2012 等都是如此. 当然对于具体问题也还是可以作为待定系数法来使用所得到的公式.

习题 2057 证明:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中 A,B,C 为待定系数.

解 1 (概要) 先将 $a\sin x+b\cos x$ 写为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, 然后本题与前面的习题 2012(a) 已经相同. □

解 2 将以 n 为参数的积分记为 I_n. 仿照解 1 的思路, 可以直接求积如下:

$$\begin{aligned}
I_n&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\\
&=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2}{(a\sin x+b\cos x)^n}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a^2+b^2}I_{n-2}+\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{(a\cos x-b\sin x)^2}{(a\sin x+b\cos x)^n}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a^2+b^2}I_{n-2}+\frac{1}{(a^2+b^2)(1-n)}\int(a\cos x-b\sin x)\,\mathrm{d}\left[(a\sin x+b\cos x)^{1-n}\right]\\
&=\frac{I_{n-2}}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a^2+b^2)(1-n)}\left[\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}-\int\frac{(-a\sin x-b\cos x)\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right]\\
&=\frac{1}{a^2+b^2}I_{n-2}+\frac{a\cos x-b\sin x}{(a^2+b^2)(1-n)(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+\frac{1}{(a^2+b^2)(1-n)}I_{n-2}\\
&=\frac{a\cos x-b\sin x}{(a^2+b^2)(1-n)(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}+\frac{n-2}{(a^2+b^2)(n-1)}I_{n-2}.
\end{aligned}$$ □

习题 2059 若 n 为大于 1 的正整数, 证明:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+B\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

其中 $|a|\neq|b|$, 并求出系数 A,B 和 C.

① 这里的计算从略. 学过高等代数的读者可以将这些计算作为二阶对称阵的练习题来做. 尚未学过的读者目前可以验证习题中的答案是正确的, 但在有了相应的代数知识之后才能理解为什么要这样做.

解　记以 n 为参数的不定积分为 I_n, 则可仿照习题 2057 递推如下:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n} = \int \frac{(a+b\cos x)^2 + b^2\sin^2 x - 2a(a+b\cos x) + 2a^2}{(a^2+b^2)(a+b\cos x)^n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}I_{n-2} - \frac{2a}{a^2+b^2}I_{n-1} + \frac{2a^2}{a^2+b^2}I_n + \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n},$$

然后计算上式最后一个积分如下:

$$\int \frac{b^2\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{1}{1-n}\int b\sin x\,\mathrm{d}\left[(a+b\cos x)^{1-n}\right]$$
$$= -\frac{b\sin x}{(1-n)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{1-n}\int \frac{b\cos x\,\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$
$$= -\frac{b\sin x}{(1-n)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{1-n}\int \frac{(a+b\cos x)\,\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^{n-1}} - \frac{a}{1-n}I_{n-1}$$
$$= -\frac{b\sin x}{(1-n)(a+b\cos x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}I_{n-2} + \frac{a}{n-1}I_{n-1}.$$

合并以上就得到

$$I_n = \frac{b}{(n-1)(b^2-a^2)}\cdot\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(n-1)(b^2-a^2)}I_{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)(b^2-a^2)}I_{n-2}.\quad \square$$

习题 2063　求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

解　用习题 2059 的结果, 在其中令 $n=2$, $a=1$, $b=\varepsilon$, 就得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = \frac{\varepsilon\sin x}{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon\cos x)} - \frac{1}{\varepsilon^2-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}.$$

然后对上式右边的积分用 §3.4.3 的习题 2028 (对于 $0<\varepsilon<1$) 的结果, 就得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = \frac{\varepsilon\sin x}{(\varepsilon^2-1)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right) + C.\quad \square$$

下一题中虽有参数 n, 但可直接积出. 其中的方法在下一个习题 2065 中也有用.

习题 2064　求 $\displaystyle\int \frac{\cos^{n-1}\dfrac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\dfrac{x-a}{2}}\,\mathrm{d}x$.

解　先作一个简单的线性代换 $t=\dfrac{x-a}{2}$, 则有 $x=2t+a$, $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$, $\dfrac{x+a}{2}=t+a$. 这时有

$$\frac{\cos(t+a)}{\sin t} = \frac{\cos t\cos a - \sin t\sin a}{\sin t} = \cos a\cot t - \sin a.$$

若 $\cos a=0$, 则 $|\sin a|=1$, 因此被积函数是 $\csc^2 t$ 的倍数, 其不定积分是 $\cot\dfrac{x-a}{2}$ 的倍数加上任意常数 C.

以下设 $\cos a\neq 0$, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\cos(t+a)}{\sin t}\right) = -\cos a\csc^2 t.$$

于是可用凑微分法积分如下:

$$\int \frac{\cos^{n-1}\dfrac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\dfrac{x-a}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\cos^{n-1}(t+a)}{\sin^{n+1}t}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(\frac{\cos(t+a)}{\sin t}\right)^{n-1}\cdot \csc^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2}{\cos a}\int \left(\frac{\cos(t+a)}{\sin t}\right)^{n-1}\mathrm{d}\left(\frac{\cos(t+a)}{\sin t}\right)$$

$$= -\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos(t+a)}{\sin t}\right)^{n} + C = -\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\dfrac{x+a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}\right)^{n} + C. \quad \square$$

习题 2065 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}}\right)^{n}\mathrm{d}x \ \ (n \text{ 为正整数})$$

的递推公式.

解 先作线性代换 $t = \dfrac{x+a}{2}$, 以下仿照习题 2059 先写出如下等式:

$$I_n = 2\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n}\mathrm{d}t = 2\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\cdot\frac{\sin^2(t-a)}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

将第二个因子展开如下:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2(t-a)}{\sin^2 t} &= \frac{(\sin t\cos a - \cos t\sin a)^2}{\sin^2 t}\\ &= \cos^2 a - \frac{2\cos t\sin a\cos a}{\sin t} + \sin^2 a\cot^2 t\\ &= \cos^2 a + \frac{2(\sin t\cos a - \cos t\sin a)\cos a}{\sin t} - 2\cos^2 a + \sin^2 a\cot^2 t\\ &= -1 + 2\cos a\cdot\frac{\sin(t-a)}{\sin t} + \sin^2 a\csc^2 t,\end{aligned}$$

然后将上式代入积分得到

$$\begin{aligned}I_n &= 2\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\cdot\left(\frac{\sin^2(t-a)}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\cdot\left(-1 + 2\cos a\cdot\frac{\sin(t-a)}{\sin t} + \sin^2 a\csc^2 t\right)\mathrm{d}t\\ &= -I_{n-2} + 2\cos a\cdot I_{n-1} + 2\sin^2 a\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\csc^2 t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

最后一个积分与习题 2064 类似, 从

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos a - \sin a\cot t) = \sin a\csc^2 t,$$

就可凑微分求积得到

$$\begin{aligned}\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\csc^2 t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sin a}\int \left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-2}\mathrm{d}\left(\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right)\\ &= \frac{1}{(n-1)\sin a}\left[\frac{\sin(t-a)}{\sin t}\right]^{n-1} + C.\end{aligned}$$

合并以上结果并用 x 为自变量, 就得到

$$I_n = -I_{n-2} + 2\cos a \cdot I_{n-1} + \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}}\right)^{n-1}. \quad \square$$

3.4.5 含无理根式的三角函数的求积 (习题 2007–2010, 2060–2062)

这里需要 §3.2 中关于无理函数的积分知识, 其中包括微分二项式在内.

习题 2007 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

解 用代换 $t=\tan x$, 就可凑微分且展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sqrt{\tan^3 x}} = \int \frac{(\tan^2 x+1)\,\mathrm{d}(\tan x)}{\sqrt{\tan^3 x}} \\ &= \int [(\tan x)^{\frac{1}{2}} + (\tan x)^{-\frac{3}{2}}]\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} - 2(\tan x)^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2(\sin^2 x - 3\cos^2 x)}{3\sqrt{\sin x\cos^3 x}} + C. \quad \square\end{aligned}$$

注 本题与 §3.4.1 的习题 2002 的解 2 中所用的方法相同, 因为它们的被积函数都属于 §3.4.3 小节开始所说的情况 (3).

习题 2008 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 (概要) 用 $t=\sin x$ 可凑微分得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}\,(1-\sin^2 x)},$$

于是被积函数是以 $t=\sin x$ 为自变量的微分二项式 $t^{-\frac{2}{3}}(1-t^2)^{-1}$, 属于第一种可积情况 $(m=-\frac{2}{3}, n=2, p=-1)$, 因此用 $t=u^3$ 即可有理化. 以下从略. $\square$

习题 2060 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解 1 用 $t=\cos x$ 可凑微分得到

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}.$$

于是被积函数是以 $t=\cos x$ 为自变量的微分二项式 $t^{-1}(2-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, 属于第二可积情况 $(m=-1, n=2, \dfrac{m+1}{n}$ 为整数). 令 $2-t^2=u^2$, 则有 $-t\,\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}u$, 于是可积分如下:

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{2-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt{2}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{2}}{\cos x}\right| + C. \quad \square$$

解 2 也可以如下求积:

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\cos^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x - 1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\sec x + \sqrt{2\sec^2 x - 1}| + C. \quad \square$$

习题 2062 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

解 1 利用

$$\sin 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2\cos^2(x-\frac{\pi}{4}) - 1 = 1 - 2\sin^2(x-\frac{\pi}{4}),$$

作代换 $t = x - \frac{\pi}{4}$ 后即可求积如下:

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2+\cos 2t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\cos t)}{\sqrt{1+2\cos^2 t}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin t)}{\sqrt{3-2\sin^2 t}}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}\cos t + \sqrt{1+2\cos^2 t}| + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x + \sqrt{2+\sin 2x}| + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}}\right) + C. \quad \square$$

解 2 用配对法, 同时用分母的两种表示形式, 即可展开求积如下:

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3-(\sin x - \cos x)^2}} - \int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x + \sqrt{2+\sin 2x}| + C. \quad \square$$

§3.5 各种超越函数的积分法 (习题 2066–2125)

内容简介 本节是对于同时含有多项式与指数函数、三角函数、对数函数、反三角函数和双曲函数的被积函数的一些基本积分题, 其中还含有出现对数积分函数 (一种超越函数) 的习题. 在本节的最后有关于使用分部积分法的经验规则的一个补充.

3.5.1 多项式与指数函数和三角函数乘积的求积 (习题 2066–2080)

这类习题的基本方法是用分部积分法降低多项式的次数, 直到变为常数. 已见于 §3.1.6 的习题 1799 等.

下面列出本节开始的习题 2066 和 2067 提供的公式供参考. 它们的证明都可以用分部积分得到, 从略.

2066 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{ax}\Big[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\Big]+C;$$

2067 若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\begin{aligned}\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{\sin ax}{a}\Big[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\Big]&\\+\frac{\cos ax}{a^2}\Big[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\Big]+C&,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos ax}{a}\Big[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\Big]&\\+\frac{\sin ax}{a^2}\Big[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\Big]+C&.\end{aligned}$$

在下面的习题中既可以套用上述公式, 也可以直接用分部积分法做.

习题 2069 求 $\int (x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 用习题 2066 的公式就有

$$\begin{aligned}\int (x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^{-x}\Big(\frac{x^2-2x+2}{-1}-\frac{2x-2}{1}+\frac{2}{-1}\Big)+C\\&=-\mathrm{e}^{-x}(x^2+2)+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 直接用分部积分法可求积如下:

$$\begin{aligned}\int(x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int(x^2-2x+2)\,\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})\\ &= (x^2-2x+2)(-\mathrm{e}^{-x})+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(x^2-2x+2)\\ &= -\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+2)-\int(2x-2)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\\ &= -\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+2)-\mathrm{e}^{-x}(2x-2)+\int\mathrm{e}^{-x}\cdot 2\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-x}x^2-2\mathrm{e}^{-x}+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2071 求 $\int(1+x^2)^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 1 用分部积分法求积的计算量较大, 若套用习题 2067 的公式, 则可求积如下:

$$\begin{aligned}\int(1+x^2)^2\cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x\Big[(1+x^2)^2-(4+12x^2)+24\Big]\\ &\qquad +\cos x\Big[4x(1+x^2)-24x\Big]+C\\ &= (x^4-10x^2+21)\sin x+(4x^3-20x)\cos x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 若用复数方法, 则相当于求 $\int(1+x^2)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ 的实部. 对这个复积分仍可用习题 2066 的公式, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int(1+x^2)^2\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int(1+x^2)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Re}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big(\frac{(1+x^2)^2}{\mathrm{i}}-\frac{4x^3+4x}{-1}+\frac{12x^2+4}{-\mathrm{i}}-\frac{24x}{1}+\frac{24}{\mathrm{i}}\Big)\Big]+C\\ &= (1+x^2)^2\sin x+(4x^3+4x)\cos x-(12x^2+4)\sin x-24x\cos x+24\sin x+C\\ &= (x^4-10x^2+21)\sin x+(4x^3-20x)\cos x+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 由此可见习题 2067 的公式也可以从习题 2066 的公式用复数方法得到.

习题 2076 求 $\int x\,\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 1 从 §3.1.6 的习题 1829 可知, 问题是要去掉被积函数的第一个因子 x. 一种方法是利用该题的答案, $\mathrm{e}^x\sin x$ 有原函数 $\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)$, 于是即可分部积分求积如下:

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}\big(\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)\big)\\ &= x\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)-\int\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{\mathrm{e}^x}{2}\cos x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 直接用分部积分求积如下:

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x &= \int x\sin x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x x\sin x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(x\sin x)\\ &= \mathrm{e}^x x\sin x - \int (\sin x + x\cos x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\\ &= \mathrm{e}^x x\sin x - \int x\cos x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x x\sin x - \mathrm{e}^x x\cos x + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(x\cos x) - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= x\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \int \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 3 利用 $\mathrm{e}^x\sin x$ 是 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ 的虚部, 可用复数方法求积如下:

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\int x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int x\,\mathrm{d}\Big(\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\Big)\\ &= \mathrm{Im}\Big(x\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \int \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x\Big) = \mathrm{Im}\Big(x\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{(1+\mathrm{i})^2}\Big) + C\\ &= \mathrm{Im}\Big[\Big(\frac{x}{2} - \mathrm{i}\big(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\big)\Big)\cdot \mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\Big] + C\\ &= \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x + C. \quad \square\end{aligned}$$

3.5.2 有理指数函数的求积 (习题 2081–2090)

将习题 2081 中的被积函数称为有理指数函数.

习题 2081 证明: 若 R 为有理函数, 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为可公约的, 则积分

$$\int R(\mathrm{e}^{a_1x}, \mathrm{e}^{a_2x}, \cdots, \mathrm{e}^{a_nx})\,\mathrm{d}x$$

是初等函数.

解 题意表明, 存在一个实数 $\alpha \neq 0$, 使得每一个 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都是 α 的整数倍. 这就是存在整数 $k_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 成立 $a_i = k_i\alpha\ (i=1,2,\cdots,n)$.

作代换 $t=\mathrm{e}^{\alpha x}$, 则有 $x=\dfrac{1}{\alpha}\ln t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha t}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{e}^{a_ix}=t^{k_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 从而积分变换为

$$\int R(\mathrm{e}^{a_1x}, \mathrm{e}^{a_2x}, \cdots, \mathrm{e}^{a_nx})\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(t^{k_1}, t^{k_2}, \cdots, t^{k_n})}{\alpha t}\,\mathrm{d}t,$$

于是已经实现了有理化. 这表明积分是 t 的初等函数, 从而也是 $x=\dfrac{1}{\alpha}\ln t$ 的初等函数. □

注 《习题集》的习题 2082–2086 都属于上述类型, 因此都可以用统一的代换实现有理化. 对于只出现一个 e^x 的情况, 也就是上述习题中 $n=1$, 则 $t=\mathrm{e}^x$ 总是有效的.

习题 2084 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2}$.

解 将被积函数的分子分母同乘以 e^x, 并令 $t=\mathrm{e}^x$, 这时有 $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, 就可以求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+t-2)} = \int \Big(\frac{-\frac{1}{2}}{t} + \frac{\frac{1}{6}}{t+2} + \frac{\frac{1}{3}}{t-1} \Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t-1)^2(t+2)}{t^3}\right| + C \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\ln[(\mathrm{e}^x-1)^2(\mathrm{e}^x+2)] + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 2087–2090 中还出现了含有指数函数的无理根式. 当然不能说这类函数一定可积, 但对这些习题来说, 上述代换还是有效的. 下面只对这几个习题指出如何实现有理化.

习题 2087 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$.

解 (概要) 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则积分变换为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-1}},$$

可见只要再令 $\sqrt{t-1}=u$ 即可实现有理化. $\square$

习题 2088 求 $\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则积分变换为

$$\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

可见只要再令 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}=u$ 即可实现有理化. $\square$

习题 2089 求 $\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则积分变换为

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{t^2+4t-1}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

可见用 §3.3 中的多种方法都能实现有理化. $\square$

习题 2090 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$.

解 (概要) 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则积分变换为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\sqrt{1-\mathrm{e}^x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})} = \int \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{2t^2}\,\mathrm{d}t,$$

显然可展开为两个简单积分求积. $\square$

3.5.3 有理函数与指数函数乘积的求积 (习题 2091–2097)

习题 2091 证明: 若 R 为有理函数, 其分母仅有实根, 则积分

$$\int R(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{li}(\mathrm{e}^{\alpha x}) + C, \quad 式中\ \mathrm{li}(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$

来表示①.

解 根据部分分式分解定理 (§3.2.1 的命题 3.2), 分母只有实根的有理函数 $R(x)$ 可以唯一方式展开为多项式与以下形状的简单分式之和:

$$\frac{A}{(x-a)^n},$$

其中 n 为正整数, a 是 $R(x)$ 的分母的实数零点.

由于多项式与指数函数的乘积的原函数是初等函数 (见 §3.5.1 的习题 2066), 因此只要对于上述形式的简单分式与 $\mathrm{e}^{\alpha x}$ 的乘积来证明本题的结论即可.

若 $n = 1$, 则先作平移 $x - a = t$ $\left(\text{或再作代换 } \mathrm{e}^{\alpha t} = u, \text{ 于是有 } \alpha t = \ln u, \ \alpha\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)$, 这样就得到

$$\int \frac{A\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x}{x-a} = A\,\mathrm{e}^{\alpha a}\int \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t}{t} \left(= A\,\mathrm{e}^{\alpha a}\int \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} = A\,\mathrm{e}^{\alpha a}\,\mathrm{li}(u) + C \right)$$
$$= A\,\mathrm{e}^{\alpha a}\,\mathrm{li}(\mathrm{e}^{\alpha(x-a)}) + C.$$

对于 $n > 1$, 则只要如下用分部积分法:

$$\int \frac{A\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \int A\,\mathrm{e}^{\alpha x}(x-a)^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}\int \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}[(x-a)^{1-n}]$$
$$= \frac{A}{1-n}\mathrm{e}^{\alpha x}(x-a)^{1-n} - \frac{\alpha A}{1-n}\int \mathrm{e}^{\alpha x}(x-a)^{1-n}\,\mathrm{d}x,$$

如此继续下去, 直到被积函数的因子 $(x-a)$ 的幂指数等于 -1 为止. 这时在积分号外的都是初等函数. □

习题 2092 若 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数, 则在什么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

为初等函数?

解 根据习题 2091, 上述积分在分部积分之后具有下列形式:

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}\right) + B\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

① 关于 $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的原函数和 $\mathrm{li}\,x$ 为非初等函数的一个初步讨论见 [34] 的第九章的最后一个参考题. 在 §4.4.4 的习题 2391 中还会再遇到 $\mathrm{li}\,x$.

两边求导得到恒等式

$$P\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{e}^x = \Big[\mathrm{e}^x\Big(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}\Big)\Big]'+B\frac{\mathrm{e}^x}{x},$$

于是只要求出待定系数中的 B, 然后令 $B=0$ 就得到本题的答案.

计算上述恒等式右边的第一项, 然后约去两边的 e^x, 并等置两边的 x 的同幂次项的系数, 就得到 $a_0=b_0$ 和关于其他 n 个未知数 $b_1,\cdots,b_{n-1},B$ 的线性代数方程组为

$a_1=b_1+B,$

$a_2=b_2-b_1,\ a_3=b_3-2b_2,\ a_4=b_4-3b_3,\ \cdots,a_{n-1}=b_{n-1}-(n-2)b_{n-2},$

$a_n=-(n-1)b_{n-1}.$

用矩阵向量记号, 并按照 $B,b_1,\cdots,b_{n-1}$ 的顺序, 可将线性方程组写成为下列形式:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&0&\cdots&0&0\\0&0&-2&1&\cdots&0&0\\0&0&0&-3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&-(n-2)&1\\0&0&0&0&\cdots&0&-(n-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_{n-2}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}.$$

由于系数矩阵的行列式等于 $(-1)^{n-1}(n-1)!$, 从而保证了上述待定系数的解存在且唯一.

用克莱姆法则知道, 未知数 B 是两个行列式之商, 其中分子的行列式是将系数矩阵的行列式的第一列换为方程组右边的向量而得到的. 将该行列式按照第一列展开, 除以系数矩阵的行列式, 就可写出 B 的表达式为:

$$B=a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_4}{3!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(n-2)!}+\frac{a_n}{(n-1)!},$$

因此本题所求的条件是

$$a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_4}{3!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(n-2)!}+\frac{a_n}{(n-1)!}=0.\quad\Box$$

3.5.4 对数函数和反三角函数的求积 (习题 2098–2115)

这里的主要工具仍然是分部积分法和代换法. 在分部积分法的使用中, 本节末补充的经验规则"反对代三指"是有参考价值的.

习题 2098 求 $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解 1 (概要) 按照下列方式作分部积分;

$$\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\ln^n x-\int x\,\mathrm{d}(\ln^n x)=x\ln^n x-n\int \ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x,$$

并继续下去, 直到将对数函数 $\ln x$ 的幂指数降为 0. ($n=1$ 时即 §3.1.6 的习题 1791.) $\Box$

解 2 作代换 $t=\ln x$, 则 $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, 于是积分变换为

$$\int \ln^n x\,\mathrm{d}x=\int t^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

应用 §3.5.1 的习题 2066 提供的公式, 就可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \ln^n x\,\mathrm{d}x&=\int t^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{e}^t(t^n-nt^{n-1}+\cdots+(-1)^n n!)+C\\&=x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+\cdots+(-1)^n n!]+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2104 求 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $x=\tan t$, 则有 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{\ln\tan t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int \cos t\ln\tan t\,\mathrm{d}t\\&=\int \ln\tan t\,\mathrm{d}(\sin t)=\sin t\ln\tan t-\int \sin t\cdot\frac{\sec^2 t}{\tan t}\,\mathrm{d}t\\&=\sin t\ln\tan t-\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\\&=\sin t\ln\tan t-\ln|\tan t+\sec t|+C\\&=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 先用三角代换 $x=\tan t$ 求出

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^3 t}=\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C,$$

然后分部积分如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x&=\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2110 求 $\displaystyle\int\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $x=t^2$, 则可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\int\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}(t^2)\\&=t^2\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-\int t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2t/(1+t^2))^2}}\cdot\frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\\&=t^2\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-2\int\frac{t^2(1-t^2)}{|1-t^2|\cdot(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=t^2\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-2\,\mathrm{sgn}(1-t^2)\int\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=t^2\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-2\,\mathrm{sgn}(1-t^2)(t-\arctan t)+C.\end{aligned}$$

因为 $t>0$, $\operatorname{sgn}(1-t^2)=\operatorname{sgn}(1-t)=\operatorname{sgn}(1-x)$, 所以得到

$$\int\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-2\operatorname{sgn}(1-x)(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C.\quad\square$$

解 2 用分部积分法有

$$\int\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-\int x\,\mathrm{d}\left[\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right].$$

这里需要仔细计算下列导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x}{(1+x)^2}}}\cdot\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}$$

$$=\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\cdot\frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

从题意可知 $x\geqslant 0$, 然而当 $x>1$ 时上述导数小于 0 ①. 于是可继续计算如下:

$$\int\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\mathrm{d}x=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}+\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-2\operatorname{sgn}(1-x)\sqrt{x}+2\operatorname{sgn}(1-x)\arctan\sqrt{x}+C$$

$$=x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)-2\operatorname{sgn}(1-x)(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C.\quad\square$$

3.5.5 双曲函数的求积 (习题 2116–2125)

对于双曲函数不是非常熟悉的读者可以先回顾前面的 §3.1.8, 其中包含了双曲函数的基本公式 (3.8)–(3.13), 以及有关的基本积分题.

由于双曲函数是通过指数函数来定义的, 因此如果用其定义将问题化为指数函数的积分, 则往往也是比较方便的一条途径. 这时前几个小节中的方法经常有效.

此外, 当然还可以利用双曲函数与三角函数的相似性, 将 §3.4 中的方法移植过来.

习题 2122 求 $\displaystyle\int\sqrt{\tanh x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用双曲函数的基本公式 (见 §3.1.8 的 (3.10)–(3.13)), 令 $\tanh x=t^2$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}=2t\,\mathrm{d}t$, 即 $\mathrm{d}x=\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{1-t^4}$, 于是可求积如下:

$$\int\sqrt{\tanh x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{1-t^4}=\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\tanh x}}{1-\sqrt{\tanh x}}\right|-\arctan(\sqrt{\tanh x})+C.\quad\square$$

---

① 从第一册附录一的习题 323(b) 中函数 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的图像可知这确实如此.

解 2 将双曲正切函数用指数函数表出后可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\tanh x}\,\mathrm{d}x&=\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-2x})^2}}\\&=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(\mathrm{e}^{-2x})+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2123 (d) 求 $\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{3\sinh x-4\cosh x}$.

解 1 仿照 §3.4.4 的习题 2042, 从

$$A(3\sinh x-4\cosh x)+B(3\cosh x-4\sinh x)=\cosh x$$

确定出待定系数 $A=-\frac{4}{7}$, $B=-\frac{3}{7}$, 然后即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{3\sinh x-4\cosh x}&=-\frac{4}{7}\int\mathrm{d}x-\frac{3}{7}\int\frac{3\cosh x-4\sinh x}{3\sinh x-4\cosh x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\sinh x-4\cosh x|+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用双曲正弦和双曲余弦的定义, 即可将积分转化为有理指数函数的积分:

$$\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{3\sinh x-4\cosh x}=\int\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{-\mathrm{e}^x-7\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+7}\,\mathrm{d}x.$$

作代换 $t=\mathrm{e}^x$, 就可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{3\sinh x-4\cosh x}=-\int\frac{t^2+1}{t(t^2+7)}\,\mathrm{d}t=-\int\Big(\frac{1}{7t}+\frac{6t}{7(t^2+7)}\Big)\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{7}\ln t-\frac{3}{7}\ln(t^2+7)+C=-\frac{1}{7}x-\frac{3}{7}\ln(\mathrm{e}^{2x}+7)+C.\quad\square\end{aligned}$$

关于分部积分法的补充

这里根据美国数学月刊, 90 卷 (1983) 210–211 页上的材料对分部积分法的公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int u(x)\,\mathrm{d}(v(x))=u(x)v(x)-\int v(x)\,\mathrm{d}(u(x))\tag{3.18}$$

作一点补充.

如公式 (3.18) 所示, 在用分部积分法时, 需要将被积函数 $f(x)$ 分解为 $u(x)v'(x)$ 的乘积形式. 一般而言, 这里有两条原则:

(1) 容易从 $v'(x)$ 求出 $v(x)$,

(2) (3.18) 右边的 $\int v(x)\,\mathrm{d}(u(x))$ 要比左边的 $\int u(x)\,\mathrm{d}(v(x))=\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 容易求.

对于 $f(x)$ 是不同种类函数的乘积的情况, 有人总结出一条经验规则“对反代三指”(其英语的首字母缩略字为 LIATE), 即是按照对数函数、反三角函数、代数函数 (其特例就是幂函数)、三角函数和指数函数的顺序, 对于被积函数中出现两种类型的函数

乘积的情况, 应当将排序在前的留下来作为 $u(x)$, 而将排序在后的与 $\mathrm{d}x$ 凑成为微分 $\mathrm{d}(v(x)) = v'(x)\,\mathrm{d}x$.

在初次接触分部积分法的 §3.1.6 中, 就有许多符合这条经验规则的例子, 例如习题 1791, 1799, 1824, 1828, 1829 等等, 而在本节中则有更多的例子. 例如一开始的习题 2066 和 2067 所提供的有用公式, 它们的证明就完全是按照这条规则来做的, 其中习题 2066 的被积函数是多项式 $P(x)$ 与指数函数 e^{ax} 的乘积, 而习题 2067 的被积函数是多项式 $P(x)$ 与正余弦函数 $\sin ax$ 和 $\cos ax$ 的乘积.

对这条规则可解释如下. 由于对数函数和反三角函数的导数是代数函数, 而代数函数的原函数在多数情况是代数函数 (见 §3.2 和 §3.3), 特别其中的幂函数 (除了 x^{-1} 之外) 是如此, 因此将后者选为 $v'(x)$, 就可能使得 (3.18) 右边的积分的被积函数成为代数函数, 它可能比原来的积分容易求. 另一方面, 三角函数 (主要指正余弦多项式) 和指数函数的原函数在多数情况仍然属于相同的类型, 因此与代数函数相比更适合于被选为 $v'(x)$.

考虑到如 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 这样简单的不定积分都积不出来, 因此上述规则只能是一条经验规则, 其中的各种函数一般都属于所说类型中的最简单情况, 更谈不上它们的复合函数等情况了. 也容易举出用这条规则反而会将简单问题复杂化的例子. 仍然从经验出发, 例如从本节的大量例子来看, 我们可以说这条规则还是有用的, “有比没有好”!

§3.6 求函数积分的各种例子 (习题 2126–2180)

内容简介 本节是不定积分一章的总结, 其中的习题含有前面各节的各种类型, 可作为复习用. 此外, 本节还有少量带有理论性质的计算题和证明题.

3.6.1 有理函数与无理函数的求积 (习题 2126–2138)

本小节的习题是对 §3.2 和 §3.3 的复习和补充.

如 §3.2 所说, 有理函数是最重要的一类可积函数, 其求积方法主要是通过部分分式的分解而展开求积 (见命题 3.2), 除此之外还有奥斯特罗格拉茨基的待定系数法. 此外, 也不排除对于特殊问题需要采用配对法或递推法等求积. 下面只看一个例子.

习题 2127 求 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

解 1 若用标准的部分分式展开, 则计算过程较长. 下面采用奥斯特罗格拉茨基方法. 按照 §3.2.2 的公式 (O'), 即有

$$\frac{x^2}{(1-x^2)^3}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(1-x^2)^2}\right)'+\frac{Ex+F}{1-x^2},$$

由此计算得到 $A=C=-F=\dfrac{1}{8}$, $B=D=E=0$. 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3+x}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\\ &= \frac{x^3+x}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C. \quad\square\end{aligned}$$

解 2 (概要) 先将积分写成为

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-(1-x^2)}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2},$$

然后可以用 §3.2.3 中习题 1921 的递推公式求积. □

注 若用三角代换 $x=\sin t$, 先将积分写成为

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\cos^5 t}\\ &= \int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^5 t}\,\mathrm{d}t=\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t-\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

然后可以用 §3.4.1 中习题 2012(b) 的递推公式求积. 这个代换的缺点是只适用于 $|x|\leqslant 1$.

以下看无理函数的积分, 这时的不定积分未必为初等函数. 下面只举出主要的可积类型, 其中的被积函数一般为 $R(x,\sqrt[n]{f(x)})$, R 为有理函数. $f(x)$ 为多项式或线性分式函数. 这里的主要途径是有理化.

有理化的可能性与开根的次数 n 和根号下的多项式次数有密切关系. 可有理化的无理函数中最主要的有以下两类: (1) $n>1$, $f(x)$ 为一次函数或线性分式函数, 这时用代换 $f(x)=t^n$ 即可有理化; (2) $n=2$, $f(x)$ 为二次三项式. 这时除了欧拉代换是普遍

有效的方法之外, 根据具体情况还有许多其他方法可用. 在 §3.3.2 中对于被积函数为 $P(x)/y$ 和 $R(x)/y$ 的情况提供了许多方法, 其中 $P(x)$ 为多项式, $R(x)$ 为有理函数.

此外, 微分二项式的三种可积情况也是常见的. 判定属于可积情况的同时也就提供了可有理化的代换.

习题 2132 求 $\int\sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 写为微分二项式的标准形式 $x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{2}}$, 可知属于第二类可积情况, 且用 $1-x^{\frac{3}{2}}=t^2$ 即可有理化. 这时有

$$x=(1-t^2)^{\frac{2}{3}},\ \mathrm{d}x=-\frac{4}{3}(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}t\,\mathrm{d}t,$$

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x&=-\frac{4}{3}\int\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{3}}}{t}\cdot(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}t\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{4}{3}\int\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}t+C=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用 $\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\,\mathrm{d}(x\sqrt{x})$ 即可凑微分求积如下:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(1-x\sqrt{x})}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.\quad\square$$

习题 2135 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

解 (概要) 将积分改写为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{x^3\sqrt{1+x^3+(x^3)^2}},$$

然后用代换 $t=x^3$ 化为 §3.1.7 的习题 1856, 再用倒代换就可积出 (还可参见 §3.1.3 的习题 1682 和 §3.1.7 的习题 1858 等). □

习题 2138 求 $\int\dfrac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

解 1 (概要) 对于这类被积函数来说, 首先将分母有理化是一个较好的方法. (可参看 §3.3.3 关于欧拉代换的几个习题, 其中都有不用欧拉代换而用分母有理化的解法.) 这样就有

$$\begin{aligned}\int\frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}&=\int\frac{(1+x)(\sqrt{x+x^2}-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\Big(-x-1+\sqrt{x+x^2}+\frac{\sqrt{x+x^2}}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\\&=\int\Big(-x-1+\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{x+x^2}}\Big)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

以下已无困难, 从略. □

解 2 (概要) 本题可以用第一种欧拉代换 $\sqrt{x+x^2}=t-x$, 这时有

$$x=\frac{t^2}{2t+1},\ \mathrm{d}x=\frac{2t(1+t)}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t,\ x+1=\frac{(t+1)^2}{2t+1},$$

于是积分变换为

$$\begin{aligned}\int\frac{(1+x)\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x+x^2}}&=\int\frac{2(t+1)^3}{(2t+1)^3}\,\mathrm{d}t\\&=\int\Big(\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2t+1)}+\frac{3}{4(2t+1)^2}+\frac{1}{4(2t+1)^3}\Big)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

以下计算从略. □

3.6.2 超越函数的求积 (习题 2139–2165)

本小节的习题是对 §3.4 和 §3.5 的复习和补充.

在以下遇到需要分部积分的习题时, 一般都是按照在 §3.5 最后的补充中的"对反代三指"的经验规则来进行的.

习题 2140 求 $\displaystyle\int(2x+3)\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $t=\arccos(2x-3)$, 则 $2x-3=\cos t$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}&\int(2x+3)\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int t(\cos t+6)\sin t\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}t\Big(-\frac{1}{2}\cos^2 t-6\cos t\Big)-\frac{1}{8}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t-3\int\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}t\cos^2 t+3t\cos t-\frac{t}{8}-\frac{1}{16}\sin 2t-3\sin t+C\\&=t\Big(\frac{1}{4}\cos^2 t+3\cos t-\frac{1}{8}\Big)-\Big(\frac{1}{8}\cos t+3\Big)\sin t+C\\&=\arccos(2x-3)\Big(x^2+3x-\frac{55}{8}\Big)-\Big(\frac{2x+21}{4}\Big)\sqrt{-x^2+3x-2}+C.\end{aligned}$$ □

解 2 先用分部积分法得到

$$\begin{aligned}\int(2x+3)\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}x&=\int\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}(x^2+3x)\\&=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int(x^2+3x)\,\mathrm{d}(\arccos(2x-3))\\&=(x^2+3x)\arccos(2x-3)+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对最后一个积分可用 §3.3.2 中的各种方法求积. 这里比较合适的是用命题 3.3 提供的待定系数法 (参见该处的习题 1943 等). 于是可设有

$$\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,\mathrm{d}x=(Ax+B)\sqrt{-x^2+3x-2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+3x-2}},$$

然后两边求导, 确定出 $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{21}{4}$ 和 $\lambda=\dfrac{55}{8}$. 这样就可求积如下:

$$\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,\mathrm{d}x = (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \left(\frac{1}{2}x+\frac{21}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{55}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$= (x^2+3x)\arccos(2x-3) - \left(\frac{1}{2}x+\frac{21}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{55}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= (x^2+3x-\frac{55}{8})\arccos(2x-3) - \left(\frac{1}{2}x+\frac{21}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2} + C. \quad \square$$

习题 2142 求 $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $t=\arcsin x$, 则有 $x=\sin t$, $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是可求积如下:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{t}{\sin^2 t}\cdot(1+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} + \int t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - t\cot t + \int\cot t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 - t\cot t + \ln|\sin t| + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x\left(\arcsin x - 2\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \ln|x| + C. \quad \square$$

解 2 展开为两个积分后分别处理. 这样就有

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$

右边的第一个积分可利用 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x)$ 凑微分得到. 对第二个积分作代换 $t=\arcsin x$, 就有 $x=\sin t$, $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$\int\frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\int t\,\mathrm{d}(\cot t)$$

$$= -t\cot t + \int\cot t\,\mathrm{d}t = -t\cot t + \ln|\sin t| + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + C.$$

合并以上就得到本题的答案为

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin^2 x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + C. \quad \square$$

习题 2143 求 $\displaystyle\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用 $\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$, 即可用分部积分法求积如下:

$$\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\ln(1+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}[\ln(1+\sqrt{1+x^2})]$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

然后再计算上式右边的最后一个积分, 其计算量较大, 从略. □

解 2 利用 $\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$, 则可以再利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u + C$ 而得到:

$$\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \ln(1+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$$
$$= \ln(1+\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \quad \square$$

注 将解 1 和解 2 比较, 可见若有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}(u(x)),$$

则同时也成立

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\,\mathrm{d}(v(x)+c) = u(x)(v(x)+c) - \int (v(x)+c)\,\mathrm{d}(u(x)),$$

其中的常数 c 可以根据需要选取. 当然这种技巧在积分计算中是经常有用的, 也不限于分部积分法, 例如 §3.1.3 的习题 1675 就是如此.

习题 2146 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}$.

解 1 (概要) 用 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, 将被积函数的分母变成 $(2+\cos t)^2$, 然后即归结为 §3.4.4 的习题 2063. □

解 2 用三角函数积分中的万能代换 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ (见 §3.4.3), 积分变换为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

然后用奥斯特罗格拉茨基方法. 根据等式

$$\frac{1+t^2}{(t^2+t+1)^2} = \left(\frac{At+B}{t^2+t+1}\right)' + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}$$

可确定出 $A = \dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{2}{3}$, $C = 0$, $D = \dfrac{4}{3}$.

最后即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2} = \frac{\frac{1}{6}t + \frac{1}{3}}{t^2+t+1} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$$
$$= \frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \quad \square$$

习题 2147 求 $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 先将分子写为

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x,$$

然后将分子分母同除以 $\cos^8 x$ 后用代换 $t = \tan x$ 即可求积如下:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4(t-t^3)(1+t^2)}{1+t^8}\,\mathrm{d}t \quad (\text{再作代换 } u=t^2)$$

$$= \int \frac{2(1-u^2)\,\mathrm{d}u}{1+u^4} = 2\int \frac{\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{u^2}}$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan^4 x+\sqrt{2}\tan^2 x+1}{\tan^4 x-\sqrt{2}\tan^2 x+1}\right|+C. \quad \square$$

解 2 将分母转换为自变量为 $2x$ 的三角函数:

$$\sin^8 x+\cos^8 x = (\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= [(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= (1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= 1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x,$$

于是可积分如下:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 2x)}{1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x}$$

$$= 4\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 2x-4)}{(\sin^2 2x-4)^2-8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin^2 2x-4-2\sqrt{2}}{\sin^2 2x-4+2\sqrt{2}}\right|+C. \quad \square$$

解 3 还可以将分母转换为自变量为 $4x$ 的三角函数:

$$\sin^8 x+\cos^8 x = 1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= 1-\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+\frac{1}{32}(1-\cos 4x)^2$$

$$= \frac{1}{32}(\cos^2 4x+14\cos 4x+17),$$

于是可积分如下:

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = 32\int \frac{\sin 4x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 4x+14\cos 4x+17}$$

$$= -8\int \frac{\mathrm{d}(\cos 4x+7)}{(\cos 4x+7)^2-32}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}\right|+C. \quad \square$$

习题 2154 求 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 作代换 $x=\cos t$ 可积分如下[①]:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t\cos^3 t}{\sin t}\cdot(-\sin t)\,\mathrm{d}t = -\int t\cos^3 t\,\mathrm{d}t\\
&= -\int t\Big(\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{3}{4}t\sin t-\frac{t}{12}\sin 3t+\int\Big(\frac{3}{4}\sin t+\frac{1}{12}\sin 3t\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{3}{4}t\sin t-\frac{t}{12}\sin 3t-\frac{3}{4}\cos t-\frac{1}{36}\cos 3t+C\\
&= -\frac{3}{4}t\sin t-\frac{t}{12}\Big(-4\sin^3 t+3\sin t\Big)-\frac{3}{4}\cos t\\
&\qquad -\frac{1}{36}\Big(4\cos^3 t-3\cos t\Big)+C\\
&= -t\sin t+\frac{t}{3}\sin^3 t-\frac{2}{3}\cos t-\frac{1}{9}\cos^3 t+C\\
&= -\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2+x^2}{3}-\frac{6x+x^3}{9}+C. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 2158 求 $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解 1 按照 $\sqrt{1-x^2}$ 的积分公式 (见 §3.1.6 的 (3.6)) 可分部积分如下:

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \int \arcsin x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\Big)\\
&= \arcsin x\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)-\int\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\mathrm{d}(\arcsin x)\\
&= \arcsin x\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)-\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x\\
&= \arcsin x\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\arcsin^2 x+C\\
&= \arcsin x\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x\right)-\frac{1}{4}x^2+C. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 作代换 $x=\sin t$, 则可积分如下:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x &= \int t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int t(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t+C\\
&= \frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{8}(1-2x^2)+C\\
&= \arcsin x\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x\Big)-\frac{1}{4}x^2+C. \quad \square
\end{aligned}$$

---

① 其中多次利用正弦和余弦函数的下列公式:

$$\sin 3x = -4\sin^3 x+3\sin x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x.$$

习题 2160 求 $\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$.

提示 回忆对数求导法 (见 §2.1.2 的习题 884 及其注), 即有 $(x^x)' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$. □

习题 2163 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{x+1}+1)^2-(\mathrm{e}^{x-1}+1)^2}$.

解 作代换 $t=\mathrm{e}^x$, 则有 $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 于是可积分如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{x+1}+1)^2-(\mathrm{e}^{x-1}+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^{x-1})(\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{x-1}+2)}$$
$$= \frac{1}{4\sinh 1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{-x}+\cosh 1)} = \frac{1}{4\sinh 1}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2(t\cosh 1+1)}$$
$$= \frac{1}{4\sinh 1}\int\left(-\frac{\cosh 1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{\cosh 1}{t+\dfrac{1}{\cosh 1}}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\sinh 1}\left(-\cosh 1\cdot\ln t-\frac{1}{t}+\cosh 1\cdot\ln\left|t+\frac{1}{\cosh 1}\right|\right)+C$$
$$= -\frac{\coth 1}{4}x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{4\sinh 1}+\frac{\coth 1}{4}\cdot\ln(\mathrm{e}^x\cosh 1+1)+C. \quad \square$$

习题 2164 求 $\int \sqrt{\tanh^2 x+1}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用双曲函数的性质 (见 §3.1.8 的 (3.10) 和 (3.12) 等) 即可求积如下:

$$\int\sqrt{\tanh^2 x+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\tanh^2 x+1}{\sqrt{\tanh^2 x+1}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{2-\dfrac{1}{\cosh^2 x}}{\sqrt{\tanh^2 x+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sinh^2 x+\cosh^2 x}}-\int\frac{\mathrm{d}(\tanh x)}{\sqrt{\tanh^2 x+1}} = \sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\sinh x)}{\sqrt{1+2\sinh^2 x}}-\int\frac{\mathrm{d}(\tanh x)}{\sqrt{\tanh^2 x+1}}$$
$$= \sqrt{2}\ln|\sqrt{2}\sinh x+\sqrt{1+2\sinh^2 x}|-\ln|\tanh x+\sqrt{\tanh^2 x+1}|+C. \quad \square$$

解 2 利用双曲函数的定义并作代换 $t=\mathrm{e}^{2x}$ 求积如下:

$$\int\sqrt{\tanh^2 x+1}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+1}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+1}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\sqrt{t^2+1}}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(1-\frac{t-1}{t(t+1)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+1}}+\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}\right|+\ln\left|\frac{1-t+\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}}{t+1}\right|+C$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+1})}{1+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+1}}\right|+\ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+1}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right|+C. \quad \square$$

习题 2165 求 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解 1 可用分部积分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x - \int \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 利用半角公式

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x},$$

$$\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\cos x},$$

则就可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \int \left[\left(\tan\frac{x}{2}\right)' + \tan\frac{x}{2}\right]\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\right)'\mathrm{d}x \\ &= \tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x + C. \quad \square\end{aligned}$$

3.6.3 分段定义函数的求积 (习题 2166–2175)

本小节是在区间上分段定义的连续函数的求积问题.

所谓分段定义函数的意思是: 将函数的定义区间分为有限或无限个子区间, 然后在每个子区间上分别给出函数的表达式. 分段定义函数为连续的条件表明, 该函数不仅在每个子区间内连续, 而且在相邻子区间的分界点处也连续.

根据今后在定积分中将会学到的定理, 连续函数必定有原函数, 于是这时的原函数当然是连续可微函数. 因此区间上分段定义的连续函数的原函数也是如此.

就计算方面来看, 由于在区间上的原函数可以相差任意常数, 因此只要分段求出原函数之后, 适当调整各个子区间上的任意常数, 就可以得到在整个定义区间上的一个连续可微的原函数, 然后对它加以任意常数就得到了所要求的不定积分.

习题 2166 求 $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

解 1 绝对值函数 $y=|x|$ 可认为是最简单的分段连续函数之一. 在 $x \geqslant 0$ 时 $y=x$, 而在 $x \leqslant 0$ 时 $y=-x$, 因此在 $x \geqslant 0$ 时有

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

而在 $x \leqslant 0$ 时则有

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

为了求出 $y=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的不定积分, 只需要求出一个原函数 $F(x)$ 后加以任意常数即可. 另一方面, 由于不定积分中含有任意常数, 因此满足上述要求的 C_1, C_2 的解不是唯一的.

由于被积函数 $y=|x|$ 是偶函数, 因此它的原函数中有一个为奇函数 (见命题 3.1). 这样我们可以按照 $F(0)=0$ 的条件来确定它. 从 $x \geqslant 0$ 时所得到的表达式来看, 应取 $C_1=0$; 而从 $x \leqslant 0$ 时所得到的表达式来看, 应当取 $C_2=0$. 这样就得到原函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & x \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

再将此 $F(x)$ 写为 $\frac{1}{2}x|x|$, 则本题的答案为

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x|x| + C. \quad \square$$

解 2 对于绝对值函数 $y=|x|$, 可以利用 $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$ 求积如下:

$$\begin{aligned} \int |x|\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sgn} x \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{sgn} x \int x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \\ &= \frac{1}{2}x|x| + C. \quad \square \end{aligned}$$

注 解 2 表面上很简单, 但在理论上存在缺陷. 其中将 $\operatorname{sgn} x$ 从积分号下提出到积分号前, 这似乎是不定积分性质

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

的应用. 然而 $\operatorname{sgn} x$ 并非是常值函数, 因此解 2 的这一步只对 $x>0$ 和 $x<0$ 分别有效, 而对于 $x=0$ 是没有意义的.

具体来说, 这里有偶然性. 由于 $F(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{2}x^2$ 分别在区间 $x<0$ 和 $x>0$ 上是 $|x|$ 的原函数, 同时这个表达式恰巧又在点 $x=0$ 有定义, 且连续, 因此提供了正确的答案.

习题 2170 求 $\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

解 在 $x<0$ 和 $x>0$ 时分别求积得到

$$F_1(x) = \mathrm{e}^x + C_1,\ x<0,$$

$$F_2(x) = -\mathrm{e}^{-x} + C_2,\ x>0.$$

与习题 2166 类似, 不妨按照在点 $x=0$ 处等于 0 的延拓要求选取常数 C_1, C_2, 于是得到 $C_1=-1$, $C_2=1$. 由此可得到原函数 (为奇函数) 为:

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x<0, \\ -\mathrm{e}^{-x} + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

于是本题的答案为

$$\int e^{-|x|}\,dx = -\operatorname{sgn} x\cdot(e^{-|x|}-1)+C. \quad \square$$

习题 2171 求 $\int \max\{1,x^2\}\,dx$.

解 1 将 x^2 与 1 比较, 可见本题的被积函数可以在三个区间 $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ 和 $(1,+\infty)$ 上分别定义为 $x^2, 1$ 和 x^2. 于是可分别积分得到 $\frac{1}{3}x^3+C_1$, $x+C_2$ 和 $\frac{1}{3}x^3+C_3$. 其中三个常数 C_1,C_2,C_3 应当选择使得函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x>1\end{cases}$$

在子区间的两个分界点 ±1 处连续.

由于不定积分中含有一个任意常数, 因此满足上述要求的三个常数 C_1,C_2,C_3 的解不是唯一的. 由于被积函数为偶函数, 与习题 2166, 2170 类似, 不妨从条件 $F(0)=0$ 开始. 由此可见应取 $C_2=0$. 然后从 $F(-1-0)=F(-1)=-1$ 可以确定 $C_1=-\frac{2}{3}$. 最后从 $F(1+0)=F(1)=1$ 可以确定 $C_3=\frac{2}{3}$. 加上任意常数 C 后, 本题的答案为:

$$\int\max\{1,x^2\}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}+C, & x<-1,\\ x+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}+C, & x>1.\end{cases} \quad \square$$

解 2 以下方法中存在陷阱, 它表明在使用习题 2166 的解 2 中的方法时必须小心.

写出以下恒等式 (参看第一册习题 749 的解 2):

$$\max\{1,x^2\}=\frac{1}{2}(1+x^2)+\frac{1}{2}|1-x^2|,$$

于是就有

$$\begin{aligned}\int\max\{1,x^2\}\,dx &= \int\left[\frac{1}{2}(1+x^2)+\frac{1}{2}|1-x^2|\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\Big(x+\frac{x^3}{3}\Big)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1-x^2)\int(1-x^2)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big(x+\frac{x^3}{3}\Big)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(1-x^2)\Big(x-\frac{x^3}{3}\Big)+C.\end{aligned}$$

但这显然是错误的, 因为上述第二项在 $x=\pm1$ 处均不连续. 上式左边是原函数全体, 而右边是在 ±1 处均不连续的一个函数与任意常数之和, 等式不能成立.

问题在于运算过程中的等式

$$\int\operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot(1-x^2)\,dx=\operatorname{sgn}(1-x^2)\int(1-x^2)\,dx$$

不能成立. 再回顾习题 2166 的解 2 中的类似等式, 可见它在那里成立是有偶然性的, 因为在那里不连续点是 $x=0$, 将 $\operatorname{sgn} x$ 与积分 $\int x\,dx$ 相乘 (且在 $x=0$ 延拓) 之后恰好使得最后得到的函数连续.

按照解 1 的类似方法可以计算得到

$$\int \operatorname{sgn}(1-x^2)\cdot(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-x+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{4}{3}+C, & x<-1,\\ x-\dfrac{x^3}{3}+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}+C, & x>1,\end{cases}$$

然后与前面的结果合并, 就可以得到与解 1 相同的答案. 但这样一来本解法就没有什么优点了. □

习题 2172 求 $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 到最近整数的距离①.

解 1 由于 $\varphi(x)$ 是周期等于 1 的周期函数, 因此先讨论区间 $[0,1]$ 上的情况.

在 $[0,1]$ 上有

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

因此可直接求出在 $[0,1]$ 上的原函数, 记为

$$F_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+C_0, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{4}+C_0, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 $-\dfrac{1}{4}$ 来自于 $F_0(x)$ 在点 $x=\dfrac{1}{2}$ 的连续性, C_0 可取任意常数. 设要求 $F(0)=0$, 则取常数 $C_0=0$. 以下根据这个要求来求出定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

利用 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的周期函数, 对每一个整数 n, 在区间 $[n,n+1]$ 上用代换 $t=x-n$, 就可以求出在该区间上的原函数, 记为

$$F_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-n)^2+C_n, & n\leqslant x\leqslant n+\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{(x-n)^2}{2}+(x-n)-\dfrac{1}{4}+C_n, & n+\dfrac{1}{2}<x\leqslant n+1,\end{cases}$$

其中 C_n 为待定常数.

根据连续性要求, 对每一个整数 n 应当满足条件

$$F_n(n+1)=F_{n+1}(n+1),$$

利用上述表达式即可得到 $\dfrac{1}{4}+C_n=C_{n+1}$. 由于已取定了 $C_0=0$, 因此就可以归纳地确定出 $C_n=\dfrac{n}{4}$.

这样就得到了满足条件 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-[x])^2+\dfrac{[x]}{4}, & [x]\leqslant x\leqslant [x]+\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{(x-[x])^2}{2}+(x-[x])-\dfrac{1}{4}+\dfrac{[x]}{4}, & [x]+\dfrac{1}{2}<x\leqslant [x]+1,\end{cases}$$

① 函数 $\varphi(x)$ 的几何表示见第一册附录一中的习题 362(e) 的图像. 只是在那里用记号 (x) 表示本题的 $\varphi(x)$, 而在本题的求解与答案中我们用 (x) 表示实数 x 的小数部分, 即有 $(x)=x-[x]$.

而不定积分为 $F(x)+C$. □

解 2 按照第三章一开始证明的命题 3.1, 本题的被积函数是周期为 1 的周期函数 $\varphi(x)$, 因此它的原函数由周期为 1 的周期函数与线性函数之和组成. 以下只要分别求出它们再相加即可.

在周期长度的区间 $[0,1]$ 上, 直接积分就得到满足 $F(0)=0$ 的原函数的表达式为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{4}, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

从命题 3.1 可知, 利用 $T=1$ 和 $F(1)-F(0)=\dfrac{1}{4}$, 就可确定出上述线性项为 $\dfrac{1}{4}x$. 它对于每一个原函数都是相同的.

从 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的表达式减去线性项, 然后再按照周期 1 作周期延拓, 得到在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 1 的周期函数. 从具体操作来说, 只要将 $[0,1)$ 上的 x 换为 $x-[x]=(x)$ 即可. 这样就得到原函数的周期项, 记为 $T(x)$:

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x)^2-\dfrac{1}{4}(x), & 0\leqslant(x)\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{1}{2}(x)^2+\dfrac{3}{4}(x)-\dfrac{1}{4}, & \dfrac{1}{2}<(x)<1.\end{cases}$$

于是本题的答案就是

$$\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x=T(x)+\frac{1}{4}x+C. \quad \square$$

注 本题的答案还可以如下写成更紧凑的形式.

用 $(x)-\dfrac{1}{2}$ 来写出 $F(x)$, 则在 $0\leqslant(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时有

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2}(x)^2-\frac{1}{4}(x)+\frac{1}{4}x\\&=\frac{1}{2}[(x)-\frac{1}{2}]^2+\frac{1}{4}[(x)-\frac{1}{2}]+\frac{x}{4},\end{aligned}$$

而在 $\dfrac{1}{2}<(x)<1$ 时则有

$$\begin{aligned}F(x)&=-\frac{1}{2}(x)^2+\frac{3}{4}(x)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x\\&=-\frac{1}{2}[(x)-\frac{1}{2}]^2+\frac{1}{4}[(x)-\frac{1}{2}]+\frac{x}{4}.\end{aligned}$$

合并以上, 就可以将答案改写成在 $(-\infty,+\infty)$ 上的统一表示为

$$\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}|(x)-\frac{1}{2}|\cdot[(x)-\frac{1}{2}]+\frac{1}{4}[(x)-\frac{1}{2}]+\frac{x}{4}+C.$$

3.6.4 杂题 (习题 2176–2180.1)

这里是一些带有理论性的或特殊类型的计算题.

习题 2176 求 $\int xf''(x)\,\mathrm{d}x$.

解 用分部积分法就有

$$\int xf''(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(f'(x)) = xf'(x) - \int f'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= xf'(x) - f(x) + C. \quad \square$$

习题 2179(b) 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ x, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 设 $t = \ln x$, 利用对数函数的严格单调性即可求出导函数的表达式为

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^t, & 0 < t < +\infty, \end{cases}$$

然后将 t 改记为 x, 问题就是从分段定义的导函数求其原函数.

在两个子区间上分段求积, 可见函数 $f(x)$ 的分段表达式为

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x + C_2, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 待定. 根据条件 $f(0) = 0$ 可见 $C_1 = 0$, 又根据连续性 $f(+0) = f(0)$ 可见 $C_2 = -1$, 于是得到分段定义的函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x - 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases} \quad \square$$

习题 2180 (反函数的求积公式) 设 $f(x)$ 为严格单调的连续函数, $f^{-1}(x)$ 为其反函数. 证明: 若

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

则

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C. \tag{3.19}$$

研究例子:

(a) $f(x) = x^n\ (x > 0)$; (b) $f(x) = \mathrm{e}^x$;

(c) $f(x) = \arcsin x$; (d) $f(x) = \operatorname{arctanh} x$.

解 本题表明, 反函数的求积运算可以通过公式 (3.19) 来实现, 其中只分别用到乘法、减法和函数的复合运算.

对该公式左边用分部积分法, 或对公式右边直接求导, 都容易证明所要的等式. 但用求导方法时要假设函数 $f(x)$ 还是分段可导函数, 即其定义区间可分为有限或无限个子区间, 使得 f 在每个子区间的内部都是可导的. 由于 f 同时又严格单调连续, 因此其反函数 f^{-1} 也是分段可导函数.

根据 §3.6.3 开始时的分析, 我们只需要对子区间内部证明 (3.19) 成立, 也就保证它在子区间的分界点上成立.

用分部积分法, 则有

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int x\,\mathrm{d}[f^{-1}(x)].$$

作代换 $t = f^{-1}(x)$, 则有 $x = f(f^{-1}(x)) = f(t)$, 于是上式右边的积分就是 $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, 这样就得到

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &= xf^{-1}(x) - \int f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= xf^{-1}(x) - F(t) + C\\ &= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.\end{aligned}$$

以下的 4 个例子用于说明公式的用法. 由于其中的反函数的不定积分都是熟知的, 因此实际上只是对于公式 (3.19) 的正确性起到了验证的作用.

(a) 这时 $f(x) = x^n$ $(x > 0)$, 反函数 $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ $(x > 0)$. 取 $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(x > 0)$, 则就有

$$\int \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x = x\sqrt[n]{x} - \frac{1}{n+1}[\sqrt[n]{x}]^{n+1} = \frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x} + C.$$

这显然是正确的.

(b) 这时 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 反函数 $f^{-1}(x) = \ln x$ $(x > 0)$. 取 $F(x) = \mathrm{e}^x$, 则就有

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \mathrm{e}^{\ln x} + C = x\ln x - x + C.$$

这与 §3.1.6 的习题 1791 中用分部积分法求得的答案相同.

(c) 这时 $f(x) = \arcsin x$, $-1 < x < 1$, 反函数 $f^{-1}(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. 从

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,\mathrm{d}x &= x\arcsin x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

可取 $F(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$, 这样就得到

$$\begin{aligned}\int \sin x\,\mathrm{d}x &= xf^{-1}(x) - \left[f^{-1}(x)\cdot\arcsin(f^{-1}(x)) + \sqrt{1-(f^{-1}(x))^2}\right] + C\\ &= x\sin x - \sin x\cdot x - \sqrt{1-\sin^2 x} + C = -\cos x + C.\end{aligned}$$

可见用反函数求积公式所得到结果与直接计算相同.

(d) 这时 $f(x) = \operatorname{arctanh} x$, $-1 < x < 1$. 其反函数为 $f^{-1}(x) = \tanh x$, $-\infty < x < +\infty$. 按照 §3.1.8 关于反双曲函数的反函数公式 (3.11), 有表达式

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ x \in (-1,1),$$

于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctanh} x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] + C \\ &= \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C.\end{aligned}$$

以下取

$$F(x) = \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2).$$

然后按照反函数的积分公式得到

$$\begin{aligned}\int \tanh x \,\mathrm{d}x &= xf^{-1}(x) - \left\{\frac{1}{2}f^{-1}(x)\ln\left(\frac{1+f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln[1-(f^{-1}(x))^2]\right\} \\ &= x\tanh x - \frac{1}{2}\tanh x \cdot \ln\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right) - \frac{1}{2}\ln(1-\tanh^2 x).\end{aligned}$$

利用双曲正切函数的恒等式 $1-\tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ (见 §3.1.8 的 (3.10)), 就容易计算得到如下等式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right) &= \ln(\sinh x + \cosh x) = x, \\ \frac{1}{2}\ln(1-\tanh^2 x) &= -\ln\cosh x.\end{aligned}$$

合并以上结果就得到

$$\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \ln\cosh x + C,$$

而这与直接计算左边的积分所得到的结果完全相同. □

第四章 定积分

内容简介 本章是一元积分学的核心, 其中 §4.1–§4.3 为定积分的基本理论, §4.4 为广义积分, §4.5–§4.10 为定积分在几何与物理方面的应用, §4.11 为定积分的近似计算.

§4.1 定积分是积分和的极限 (习题 2181–2205)

内容简介 本节的习题可分为以下部分: 关于积分和 (即黎曼和) 及其极限的计算题、有关积分的一些理论题和关于函数可积性判定等习题.

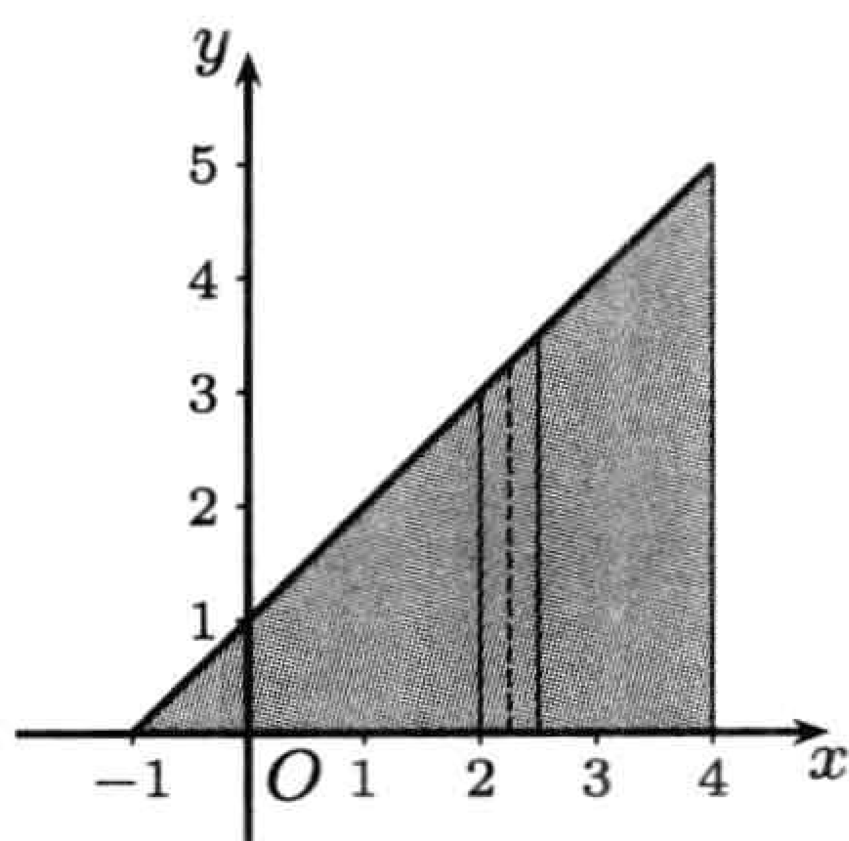
4.1.1 黎曼和及其极限 (习题 2181–2192)

定积分是通过黎曼和的极限来定义的. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 若对任意分划 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 以及与分划相容的任意介点集 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 当分划的细度 $\|P\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$ 时, 黎曼和收敛于某个数 I, 则称 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上可积, 并将这个极限值定义为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = I.$$

在 f 于区间 $[a,b]$ 上可积的前提下, 只要取细度趋于 0 的一列特殊分划, 同时取定与分划相容的介点, 这样得到的一列黎曼和 S_n 就收敛于定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 下面从最简单的黎曼和计算开始.

习题 2181 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作为介点 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的值. 求函数 $f(x) = 1 + x$ 在此区间上的黎曼和 S_n.



习题 2181 的附图

解 子区间长度为 $\Delta x = \dfrac{5}{n}$, 第 i 个子区间为 $\left[-1 + \dfrac{5}{n}(i-1), -1 + \dfrac{5}{n}i\right]$, 取介点 ξ_i 为子区间的中点, 即

$$\xi_i = -1 + \frac{5}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right),\ i = 1, \cdots, n,$$

则即可求出由此分划和介点确定的黎曼和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \left(-1 + \frac{5}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right)\right] \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

从附图可见, 由于每个子区间对应的直角梯形面积恰好等于 Δx 与 $f(\xi_i)$ 的乘积 (在附图中标出了一个直角梯形及其中线), 因此所得到的黎曼和已经是附图中涂以灰色的等腰直角三角形的面积, 也就是定积分 $\int_{-1}^{4} (1+x)\,\mathrm{d}x$. □

习题 2185 按照定积分的定义计算 $\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$.

解 将区间 $[-1,2]$ 作 n 等分, 则子区间长 $\Delta x=\dfrac{3}{n}$. 取介点 ξ 为子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的右端点, 即 $\xi_i=-1+\dfrac{3i}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则就得到黎曼和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{6}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\Big)=3-\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$
$$=3-\frac{9(n+1)}{n}+\frac{9}{2}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2},$$

其中利用了前 n 个正整数之和及其平方之和的公式, 即《习题集》的习题 1 和 2.

对以上黎曼和取极限, 可见有 $\int_{-1}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3-9+9=3$. □

习题 2187 按照定积分的定义计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 将区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 作 n 等分, 子区间长 $\Delta x=\dfrac{\pi}{2n}$. 取介点为子区间 $[\dfrac{(i-1)\pi}{2n},\dfrac{i\pi}{2n}]$ 的右端点, 即 $\xi_i=\dfrac{i\pi}{2n}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则就得到黎曼和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sin\xi_i\,\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^{n}\sin(i\Delta x)=\frac{\Delta x}{\sin\frac{\Delta x}{2}}\sum_{i=1}^{n}\sin(i\Delta x)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$=\frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\sum_{i=1}^{n}\Big[\cos\Big(i-\frac{1}{2}\Big)\Delta x-\cos\Big(i+\frac{1}{2}\Big)\Delta x\Big]$$
$$=\frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\Big[\cos\Big(\frac{1}{2}\Delta x\Big)-\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Delta x\Big].$$

(参见 §2.1.4 的习题 1024(b) 中对和式 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ 的计算.)

在上述黎曼和中代入 $\Delta x=\dfrac{\pi}{2n}$, 令 $n\to\infty$, 即有

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}S_n=\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}=1.\quad\square$$

习题 2189 按照定积分的定义计算 $\int_{a}^{b}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0<a<b)$.

解 1 将区间 $[a,b]$ 作非等距分划, 使得其分点的横坐标成为等比数列, 即有

$$P=\{a,aq,aq^2,\cdots,aq^n\},$$

其中 $aq^n=b$, 公比 $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$. 又取介点 ξ_i 为子区间 $[aq^{i-1},aq^i]$ 的右端点, 即 $\xi_i=aq^i$. 则黎曼和为:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i^2}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}a^{-2}q^{-2i}(aq^i-aq^{i-1})$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}q^{-i-1}(q-1)=\frac{1}{a}(q^{-1}-q^{-n-1})=\frac{1}{aq}\Big(1-\frac{1}{q^n}\Big).$$

将 $q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$ 代入, 令 $n \to \infty$, 就得到

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a}\Big(1 - \frac{a}{b}\Big) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \quad \square$$

解 2 按照《习题集》的提示, 对于分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \cdots, n$, 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中取介点 $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$, $i = 1, \cdots, n$. 这样就有

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2}\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i} = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\Big) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

这表明对这样的分划和介点来说, 黎曼和为常值, 因此若以 n 为参数的分划当 $n \to \infty$ 时的细度趋于 0 (最简单的就是区间 $[a, b]$ 的等距分划), 也就有 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. $\square$

注 习题 2189 的两种方法对一般的幂函数的求积都有效, 参见《习题集》的习题 2190 (求 $\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x$ $(0 < a < b, m \neq -1)$) 和习题 2191 (求 $\int_a^b x^{-1}\,\mathrm{d}x$ $(0 < a < b)$).

解 1 使用分点成为几何数列的分划, 介点取为子区间的右端点 (或左端点), 从而使得黎曼和的计算比较容易. 解 2 则采取特殊选择的介点, 而分划可以是任意的. 在本小节最后还会指出它的进一步的意义.

习题 2192 (泊松积分) 计算

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x,$$

考虑两种情形: (a) $|\alpha| < 1$; (b) $|\alpha| > 1$.

解 将区间 $[0, \pi]$ 作 n 等分, 并取介点 ξ_k 为 $[x_{k-1}, x_k]$ 的右端点, 即有 $\Delta x = \dfrac{\pi}{n}$, $\xi_k = \dfrac{k\pi}{n}$, $k = 1, \cdots, n$, 于是黎曼和为

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - 2\alpha\cos\xi_k + \alpha^2)\,\Delta x = \frac{\pi}{n}\cdot\ln\Big(\prod_{k=1}^n\Big(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\Big)\Big). \qquad (4.1)$$

这里需要了解表达式 $1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2$ 的几何意义. 将它写为

$$\begin{aligned}1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2 &= (\alpha - \cos x)^2 + (\sin x)^2\\ &= [\alpha - (\cos x + \mathrm{i}\sin x)]\cdot[\alpha - (\cos x - \mathrm{i}\sin x)] = (\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\cdot(\alpha - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),\end{aligned}$$

即在复平面中的实数轴上的点 $(\alpha, 0)$ 到单位圆上点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 的距离平方, 它又可表示为一对共轭复数的乘积. 由于 $|\alpha| \neq 1$, 这个乘积总是大于 0 的.

利用方程 $\alpha^{2n} - 1 = 0$ 的 $2n$ 个根是单位圆上从 $\alpha = 1$ 开始的 $2n$ 个等分点对应的复数, 去掉其中的 ±1 两个根之后, 就是 $\mathrm{e}^{\frac{\pm\mathrm{i}k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\xi_k}$, $k = 1, \cdots, n-1$. 它们是与介点 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 对应的 $n-1$ 对共轭复数. $\xi_n = \pi$ 则对应于单位圆上的点 -1.

于是可以利用下列因式分解

$$\alpha^{2n} - 1 = (\alpha^2 - 1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_k})(\alpha - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_k}),$$

将 (4.1) 式中的乘积表示为

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-2\alpha\cos\frac{k\pi}{n}+\alpha^2\right)=\left[\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_k})(\alpha-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_k})\right]\cdot(\alpha+1)^2$$
$$=\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha-1)(\alpha-(-1))}\cdot(\alpha+1)^2=(\alpha^{2n}-1)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right).$$

将此式代入 (4.1), 并令 $n\to\infty$, 就得到

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\ln|\alpha^{2n}-1|+\ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|\right)$$
$$=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\alpha^{2n}-1|}{n}.$$

由此可得到: (a) $|\alpha|<1$ 时, 积分为 0; (b) $|\alpha|>1$ 时, 积分为 $2\pi\ln|\alpha|$. □

注 利用

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x=2\pi\ln|\alpha|+\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x$$

即可看出, 在 $|\alpha|<1$ 和 $|\alpha|>1$ 的两个结果中, 只要知道一个, 就可以推出另一个.

小结 如前所说, 用黎曼和来计算定积分时, 只要选取一列特殊的分划和介点即可, 但如何求其极限则往往相当困难. 除了特别简单的一些习题 (例如习题 2181) 之外, 都需要针对具体的被积函数和积分区间采取特殊的方法.

值得注意的是习题 2189 的解 2, 其中对任意分划采取巧妙选择的介点就解决了问题. 下面讨论这种方法是否能够推广到一般的定积分计算.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且有原函数 $F(x)$, 于是在区间上处处成立 $F'(x)=f(x)$.

回顾习题 2189 的解 2, 可见它相当于在取定分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 之后, 在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内选取的介点 ξ_i 满足等式

$$f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})=F(x_i)-F(x_{i-1}).$$

根据拉格朗日微分中值定理, 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中这样的介点 ξ_i 是一定存在的.

然而这是在已知原函数的前提下才能得到的结论. 在习题 2189 中的被积函数是 $\dfrac{1}{x^2}$, 因此可取原函数 $F(x)=-\dfrac{1}{x}$. 这样上述等式就变成为

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{\dfrac{1}{x_{i-1}}-\dfrac{1}{x_i}}{x_i-x_{i-1}}=\frac{1}{x_{i-1}x_i}=\frac{1}{\xi_i^2},$$

从而得到 $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$.

对于知道 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 的一般情况, 这时就有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=F(b)-F(a),$$

于是若用细度趋于 0 的一列分划, 并取极限, 这样就推导出

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

这就是定积分计算的主要工具——牛顿–莱布尼茨公式, 也称为微积分学基本定理.

由此可见, 在能够求出被积函数 f 的原函数的前提下, 只需要用上述公式即可计算出定积分. 一般来说, 利用习题 2189 的解 2 中的方法是不必要的, 也是不切实际的, 因为拉格朗日微分中值定理并不能提供中值的计算方法 (参见 §2.6.2 中的有关习题).

4.1.2 若干证明题 (习题 2193.1–2193.4, 2198–2199, 2204)

这里都是与定积分有关的理论证明题, 习题 2205 则放到最后一个小节中解决. 这方面的习题很多, 例如可参看 [34] 的第十章和第十一章的练习题和参考题.

习题 2193.1 (**布利斯–杜阿梅尔定理**) 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i,\ x_{i-1}\leqslant\theta_i\leqslant x_i\ (i=1,\cdots,n)$, 且 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (x_0=a, x_n=b)$.

解 由于等式左边的和式中出现了两组介点, 因此它不是黎曼和.

利用 $f(x)\cdot\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 可将上述和式与 $f(x)\cdot\varphi(x)$ 的黎曼和作比较. 如果当分划的细度趋于 0 时, 两个和式之差的极限为 0, 则就得到了所要的结论.

记 M 是 $|f|$ 在区间 $[a,b]$ 上的上界, 又记 ω_i 是 φ 在分划 P 确定的子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, $i=1,\cdots,n$, 则就有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i\Big| &\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\Delta x_i\\ &\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令 $\|P\|=\max|\Delta x_i|\to 0$ 即知上述极限为 0. □

注 本题中的两个函数 f,φ 在 $[a,b]$ 上连续的条件可减弱为可积, 而在证明两个和式之差趋于 0 时, 对于 f 只用到其有界性.

习题 2193.2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界且单调, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)=O\Big(\frac{1}{n}\Big)\ \ (n\to\infty).$$

解 根据大 O 记号的定义, 应当证明上式左边是一个有界量与 $\dfrac{1}{n}$ 的乘积.

不妨设 f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 这时即可对上式左边的表达式估计如下:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| &\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big|f(x)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big[f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{n}[f(1)-f(0)].\quad\square\end{aligned}$$

注 在有界闭区间上的单调函数必定有界, 因此题设中的有界性条件是多余的.

习题 2193.3 (阿达马不等式) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为凹函数, 证明:

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

(关于凹凸函数的定义和基本知识见 §2.8, 特别是 §2.8.2 的习题 1312.)

解 分别证明题中的左边和右边的两个不等式.

利用凹函数定义中的不等式, 即

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

在定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 中作代换 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$, 当 x 从 a 递增到 b 时, λ 从 1 递减到 0, 且有 $\mathrm{d}x=(a-b)\,\mathrm{d}\lambda$, 就可以如下得到左边的不等式:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (b-a)\int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)\,\mathrm{d}\lambda \\ &\geqslant (b-a)\int_0^1 [\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)]\,\mathrm{d}\lambda = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

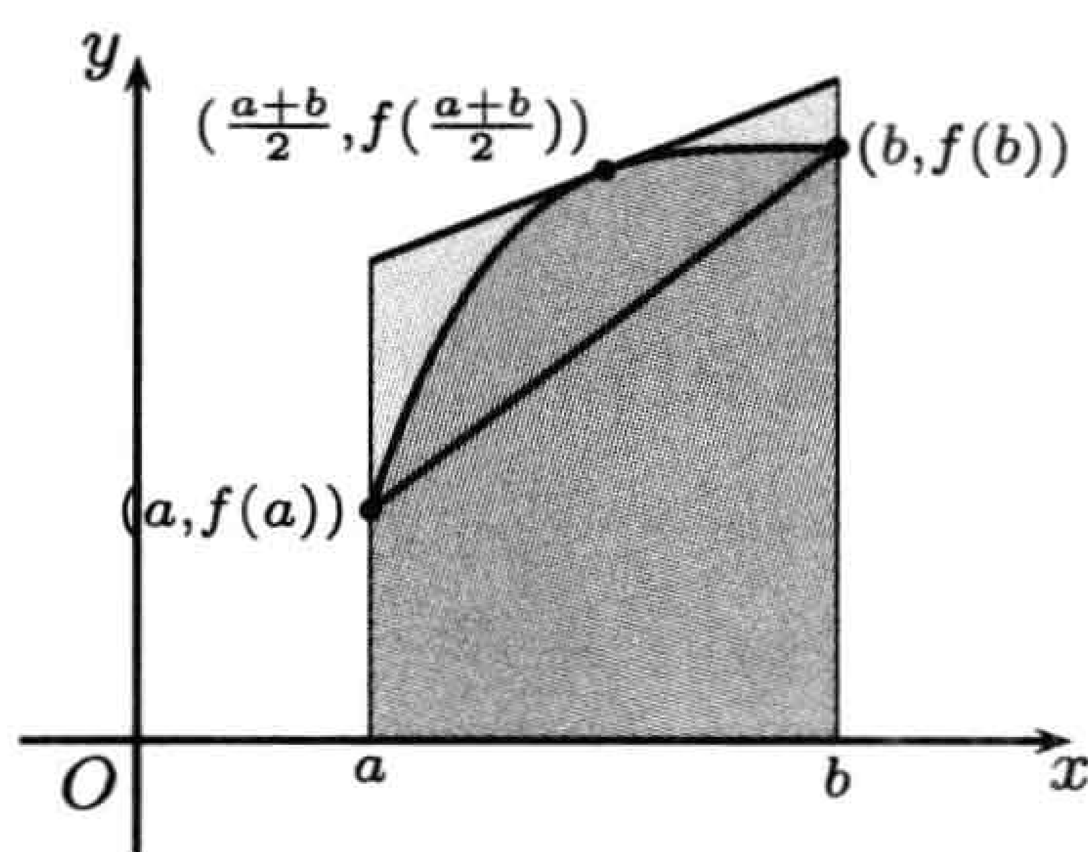
又利用凹函数的支撑线定理 (参见 §2.8.3 的命题 2.3), 存在经过点 $\Big(\frac{a+b}{2}, f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)$ 的支撑线, 设其斜率为 k, 则在 $[a,b]$ 上就成立不等式

$$f(x) \leqslant f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+k\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big).$$

将这个不等式的两边对 x 从 a 到 b 积分, 并注意到右边第二项在 $[a,b]$ 上的积分等于 0, 就得到所要的右边的不等式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big). \quad \square$$

注 1 如附图所示, 阿达马不等式在几何上有非常直观的几何意义, 即是由 $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 确定的曲边梯形被夹在两个直角梯形之间, 它们分别由联结 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线和在点 $\Big(\frac{a+b}{2}, f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)$ 的支撑线生成. 于是它们的面积之间也成立相应的不等式, 即阿达马不等式.



习题 2193.3 的附图

这里附带说一下若不利用支撑线及其命题 2.3, 则可以如下证明右边的不等式.

利用 $\frac{a+b}{2}$ 不仅是点 a 和 b 的中点, 也是 $a+\lambda(b-a)$ 和 $b-\lambda(b-a)$ 的中点, 这对每一个 $\lambda \in [0,1]$ 都是如此. 于是对于凹函数 f 成立不等式

$$\frac{1}{2}[f(a+\lambda(b-a))+f(b-\lambda(b-a))] \leqslant f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

然后将不等式两边对 λ 从 0 积分到 1, 并对左边的两个积分分别作代换 $x=a+\lambda(b-a)$ 和 $x=b-\lambda(b-a)$, 即可得到右边的不等式.

注 2 本题不仅是凹函数的基本不等式之一, 而且还可以证明, 若在区间 I 上定义的函数 f 对区间中任何两点都成立阿达马不等式中的右边的不等式 (或左边的不等式), 则 f 是区间 I 上的凹函数. 换言之, 阿达马不等式中的每一个都是函数为凹函数的充分必要条件 (见 [34] 第十一章第二组参考题 7). 此外, 若将 f 换为 $-f$, 不等式反向, 则就得到凸函数的阿达马不等式.

注 3 由习题 2193.3 的附图可以推知, 有界闭区间上的凹函数 (和凸函数) 必定有界, 因此原题中的有界性条件是多余的.

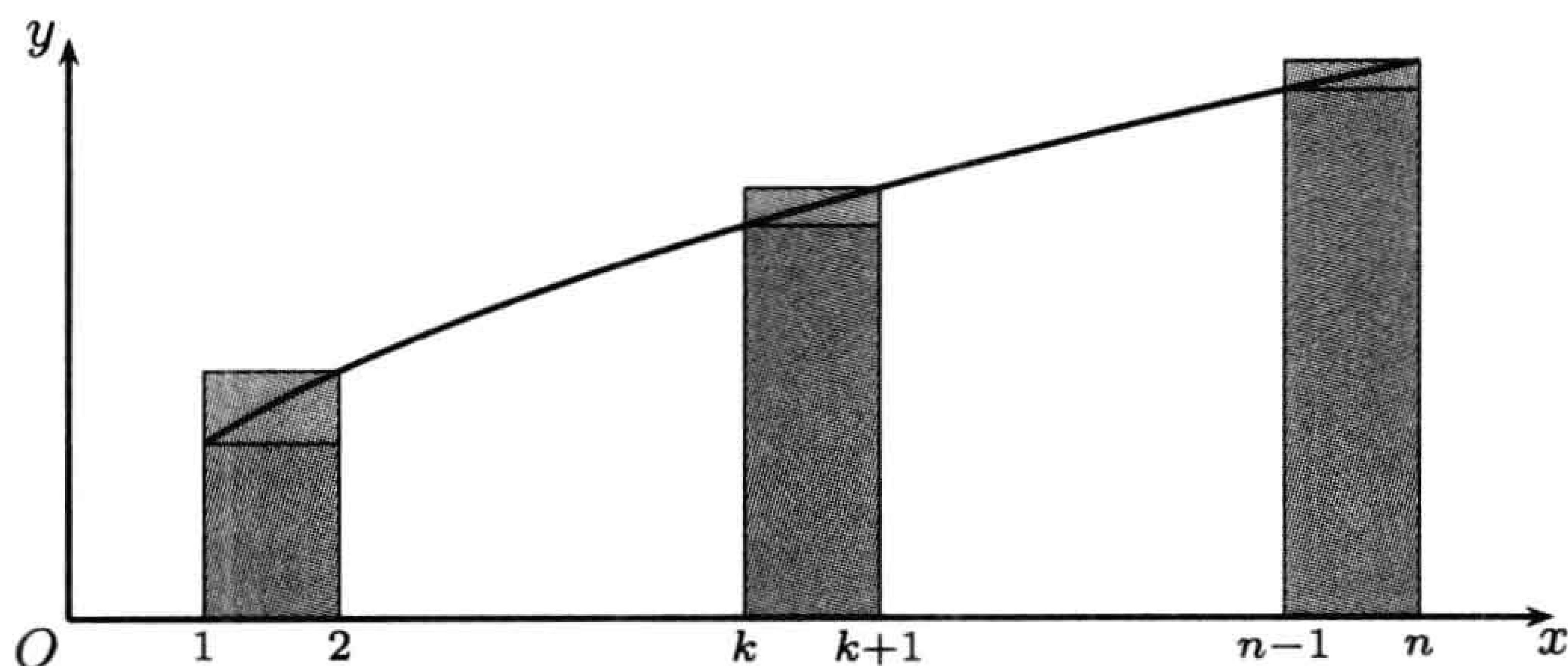
习题 2193.4 设 $f(x) \in C^{(2)}[1,+\infty)$, 且当 $x \in [1,+\infty)$ 时 $f(x) \geqslant 0, f'(x) \geqslant 0, f''(x) \leqslant 0$. 证明: 当 $n \to \infty$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + O(1).$$

解 从题设条件可知, 函数 $y = f(x)$ 的图像在 Ox 轴的上方, 单调递增, 为凹函数. 如附图所示, 积分 $\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ 代表了曲线 $y = f(x)$ $(1 \leqslant x \leqslant n)$ 下方的曲边梯形的面积, 它可以分解为 $n-1$ 个宽度为 1 的曲边梯形. 利用 f 单调递增, 就有不等式

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k+1).$$

然而这对于本题还是不够的. 为了得到所要求的估计, 还要利用 f 为凹函数的条件. 为此要对每一个宽度为 1 的曲边梯形使用上一个习题中的阿达马不等式.



习题 2193.4 的附图

这样就对 $k = 1, \cdots, n-1$ 有

$$\frac{f(k) + f(k+1)}{2} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k + \tfrac{1}{2}).$$

将这 $n-1$ 个不等式相加, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) &\leqslant \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) + \cdots + f(\tfrac{2n-1}{2}).\end{aligned}$$

这样一方面有

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} f(n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2} f(1),$$

另一方面再次利用 f 的凹性和递增性, 可得到

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(n)&\leqslant\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}[f(\frac{3}{2})+f(\frac{5}{2})]+\cdots\\&\quad+\frac{1}{2}[f(\frac{2n-3}{2})+f(\frac{2n-1}{2})]+\frac{1}{2}f(\frac{2n-1}{2})+\frac{1}{2}f(n)\\&\leqslant\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)\\&\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)+[\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})-f(1)].\end{aligned}$$

合并以上就得到所要的结论:

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(n)-\sum_{k=1}^n f(k)=O(1).\quad\square$$

习题 2193.5 设 $f(x)\in C^{(1)}[a,b]$,

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\Delta_n$.

解 将 $[a,b]$ 作等距分划, 记分点 $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$, $k=0,1,\cdots,n$, 则有 $\Delta x_k=\dfrac{b-a}{n}$ $(k=1,\cdots,n)$, 然后将 $n\Delta_n$ 作分拆:

$$\begin{aligned}n\Delta_n&=n\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Big)=n\Big(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\,\mathrm{d}x\Big)\\&=n\Big(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\xi_k)(x-x_k)\,\mathrm{d}x\Big).\end{aligned}$$

利用 f' 在 $[a,b]$ 上连续, 记 m_k 和 M_k 为 $f'(x)$ 在子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值和最大值, 则就有

$$\begin{aligned}-n\sum_{k=1}^n M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,\mathrm{d}x\leqslant n\Delta_n&=n\Big(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\xi_k)(x-x_k)\,\mathrm{d}x\Big)\\&\leqslant-n\sum_{k=1}^n m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于对 $k=1,\cdots,n$ 均有

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\Delta x_k)^2=\frac{b-a}{2n}\Delta x_k,$$

因此就有不等式

$$-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k\leqslant n\Delta_n\leqslant-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k.$$

由于上式左右两边的和式都是 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼和, 因此当 $n\to\infty$ 时有相同的极限, 从而就得到

$$\lim_{n\to\infty}n\Delta_n=-\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(b-a)[f(b)-f(a)].\quad\square$$

习题 2198–2199 表明, 在积分逼近的意义上, 任何可积函数都可以分别用阶梯函数和连续函数来逼近, 这在理论上和计算上都是重要的. (参见这两个习题的附图.)

习题 2198 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \ \ (x_{i-1} \leqslant x < x_i,\ i = 1, \cdots, n),$$

其中 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$ $(i = 0, 1, \cdots, n; n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

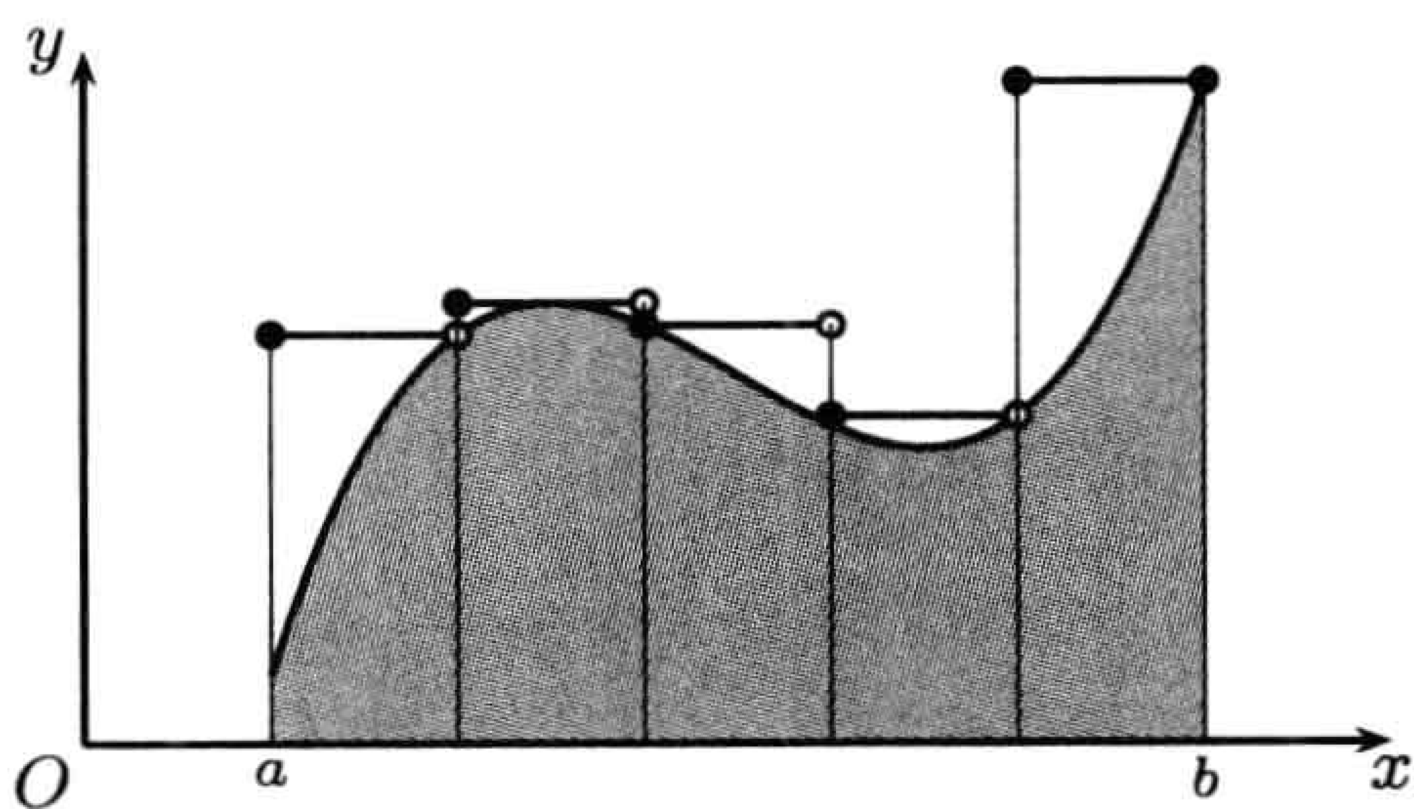
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 在每一个子区间上 (可能除了端点之外) 取值为常数的函数称为阶梯函数.

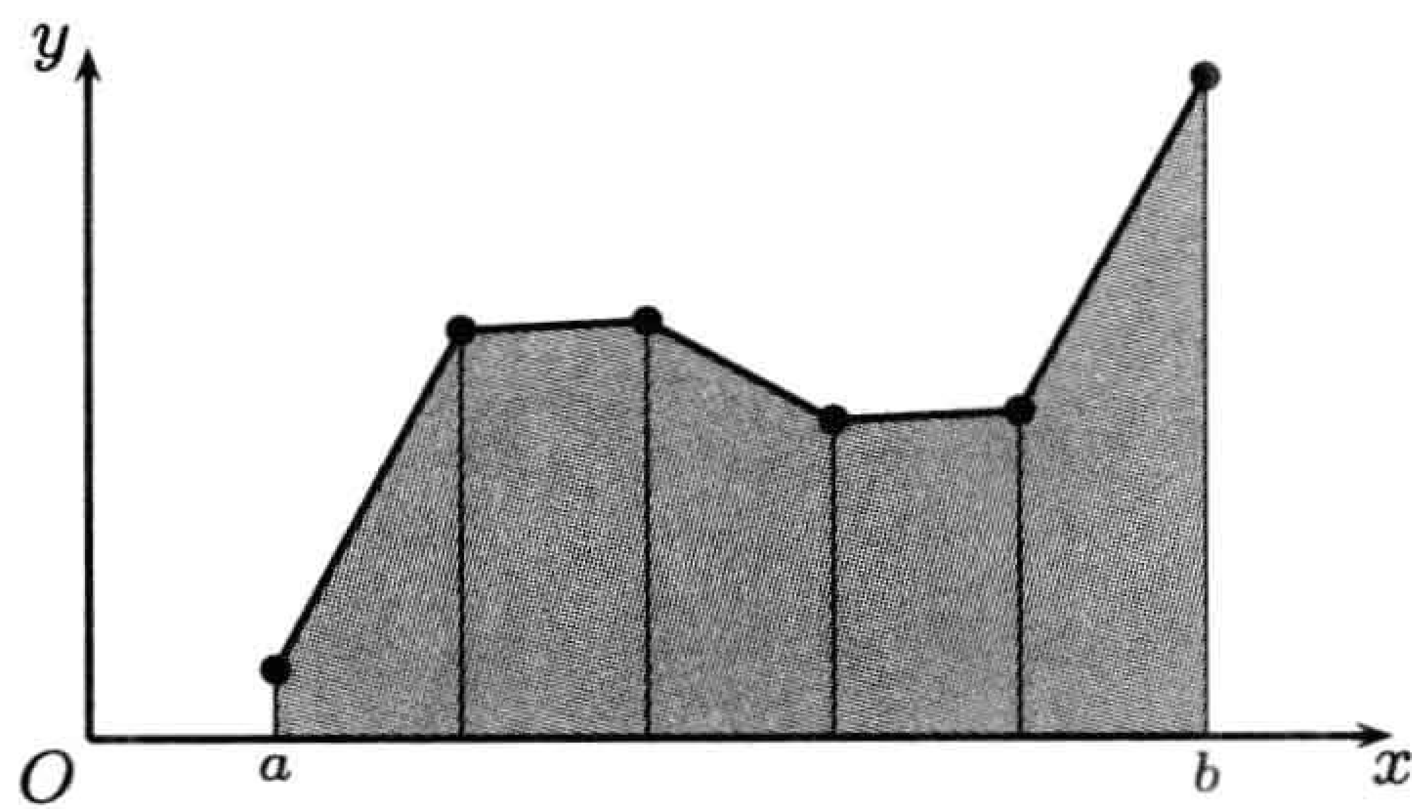
由于在 $[x_{i-1}, x_i)$ 上的 $f_n(x)$ 的取值就是 $f(x)$ 在该子区间上的上确界, 因此除了端点 x_i 之外, f_n 与 f 之差不会超过 f 在这个子区间上的振幅 ω_i, 这样就可以估计 f 和 f_n 的积分之差如下:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i\,\Delta x_i,$$

因此从 f 在 $[a,b]$ 上可积就知道当 $n \to \infty$ 时上式极限为 0. □



习题 2198 的附图



习题 2199 的附图

习题 2199 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则存在连续函数序列 $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得在 $a \leqslant c \leqslant b$ 时

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 记 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

对于 $i = 1, \cdots, n$, 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上用联结点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和点 $(x_i, f(x_i))$ 的直线来逼近曲线 $y = f(x)$, 这就是定义

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}[f(x_i) - f(x_{i-1})],\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i.$$

由于这样定义的函数 $\varphi_n(x)$ 不仅在 $[a,b]$ 上连续, 而且在每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的取值都介于 $f(x)$ 在同一个子区间上的上确界和下确界之间, 因此 $|\varphi_n(x) - f(x)|$ 不超过 f 在子区间上的振幅 ω_i. 于是当 $a \leqslant c \leqslant b$ 时就可以估计 φ_n 和 f 的积分之差如下:

$$\left|\int_a^c \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^c |\varphi_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_a^b |\varphi_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i\,\Delta x_i,$$

因此从 f 在 $[a,b]$ 上可积就知道当 $n\to\infty$ 时上式的极限为 0. □

习题 2204 (积分的连续性) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上可积, 证明: 函数 $f(x)$ 有积分连续性, 即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $[a,b]\subset(A,B)$.

解 (本题有几种证明方法. 以下的思路是利用习题 2199, 将问题归结为对于连续函数来证明积分连续性, 这是比较容易的.)

条件 $[a,b]\subset(A,B)$ 也就是 $A<a<b<B$. 它保证, 在 $|h|<\min\{a-A, B-b\}$ 时, $f(x+h)$ 在 $x\in[a,b]$ 时总有意义①.

设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[A,B]$ 上可积, 则从不等式

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant |f(x+h)-\varphi(x+h)| + |\varphi(x+h)-\varphi(x)| + |\varphi(x)-f(x)|$$

可见, 它们的积分有相应的不等式:

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |\varphi(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

下面我们将要证明, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 和某个 $\varphi\in C[A,B]$, 使得当 $|h|<\delta$ 时, 上述不等式的右边的每一项都小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$, 从而就证明了所要的结论.

首先根据习题 2199, 存在区间 $[A,B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使得成立

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这时就有不等式

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同时, 只要 $|h|<\min\{a-A,B-b\}$, 就有 $[a+h,b+h]\subset[A,B]$, 从而也成立不等式

$$\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|\,\mathrm{d}x = \int_{a+h}^{b+h} |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这样在 (4.2) 右边的第一和第三项就都小于 $\varepsilon/3$.

最后考虑 (4.2) 右边的第二项. 利用 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续, 因而一致连续, 从而对同一个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in[A,B]$, 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 这样当 $|h|<\min\{\delta,a-A,B-b\}$ 时, 就有

① 原题中的条件 $[a,b]\subset[A,B]$ 不够, 应当改为 $[a,b]\subset(A,B)$.

$$\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

这样就完成了所要求的证明. □

4.1.3 函数的可积性判定 (习题 2194–2197, 2200–2203)

首先看判定区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 为黎曼可积的几种常用方法.

由于定积分的值事先未必知道, 要按照定积分的定义, 用黎曼和来判定一个函数是否可积是很困难的, 甚至是无法做到的. 为此在一般的数学分析教科书中都叙述并证明了这方面最为常用的充分必要条件, 我们将它列为下面的命题.

命题 4.1 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 使得函数 $f(x)$ 的振幅面积小于 ε, 即有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中 $\omega_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}-\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}$ 是 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, $i=1,\cdots,n$.

命题 4.1 的最大特色是只要找到一个分划满足上述条件, 因此是比较好用的可积性准则. 在大多数教科书中都是用它来证明区间上的连续函数、单调函数和存在有限多个不连续点的函数均为黎曼可积.

由命题 4.1 可导出下一个充要条件, 它在许多判定可积的问题中更为方便.

命题 4.2 在区间 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 为黎曼可积的充分必要条件是: 对于任意给定的一对正数 $\varepsilon,\eta>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分划, 使得振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 ε.

由此可见, 无论是定积分的定义, 还是上述两个可积的充要条件, 都是与分划的概念相联系的. 那么是否有只根据函数本身的性质直接判定其可积与否的方法呢?

这样的可积准则是存在的. 这方面我们举出以下两个结果. 其中第一个是很便于使用的充分性条件.

命题 4.3 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界, 如果 f 的所有不连续点可以用总长度任意小的有限个区间覆盖, 则 f 可积.

这方面最强的是下列著名结果.

命题 4.4 (勒贝格定理) 在区间 $[a,b]$ 上有界的函数 f 可积的充分必要条件是: f 的所有不连续点可以用总长度任意小的至多可列个区间覆盖.

注 对于可以用总长度任意小的至多可列个区间覆盖的点集, 我们称为零测度集, 简称为零集. 若某个性质在去掉一个零集之外的每个点上成立, 则称此性质几乎处处成立. 于是勒贝格定理可叙述成为: 区间上有界函数黎曼可积的充要条件是几乎处处连续.

命题 4.1 和 4.2 的证明在一般的数学分析教科书中都有. 命题 4.4 是实分析课程中必有的内容, 也见于部分较新的数学分析教科书中, 例如 [8, 27, 36] 等. 此外还可以参见 [34] 的 §10.1. 下面给出命题 4.3 的证明.

命题 4.3 的证明 设在区间 $[a,b]$ 上成立 $|f(x)|<M$. 对于给定的 $\varepsilon>0$, 取总长度不超过 $\dfrac{\varepsilon}{4M}$ 的有限个开子区间覆盖 f 的所有不连续点. 这些开区间的补集是有限个闭子区间. 由于 f 在其中的每一个子区间上处处连续, 因此存在分划, 使得 f 与这有限个闭子区间对应的振幅面积之和小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$. 最后将这些分划与前面的有限个开子区间合并, 得到 $[a,b]$ 的一个分划, 与它对应的 f 的振幅面积即小于 ε. □

这里要指出定积分的一个经常用到的性质, 我们将它写成为一个推论.

推论 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积与否, 以及在可积情况时的定积分值, 都和 $f(x)$ 在该区间内的有限个点上有无定义或者有定义时的取值无关.

证 先设 f 在 $[a,b]$ 上有定义且可积. 这时若修改 f 在有限个点上的函数值, 则用上述 4 个命题中的任何一个都可以证明修改后的函数仍然可积. 至于这时的积分值, 则利用在至多有限个点上不等于 0 的函数的积分值必定是 0, 就可见修改前后的函数的两个定积分值相同.

由此可见, 若 f 在 $[a,b]$ 内的有限个点上没有定义时, 我们可以任意指定 f 在这些点上的取值, 然后考虑其可积性和在可积时的积分值. 由于这两者与上述有限个点上 f 的取值无关, 因此对于在有限个点上没有定义的函数仍然可以考虑其可积性和在可积时计算其积分值.

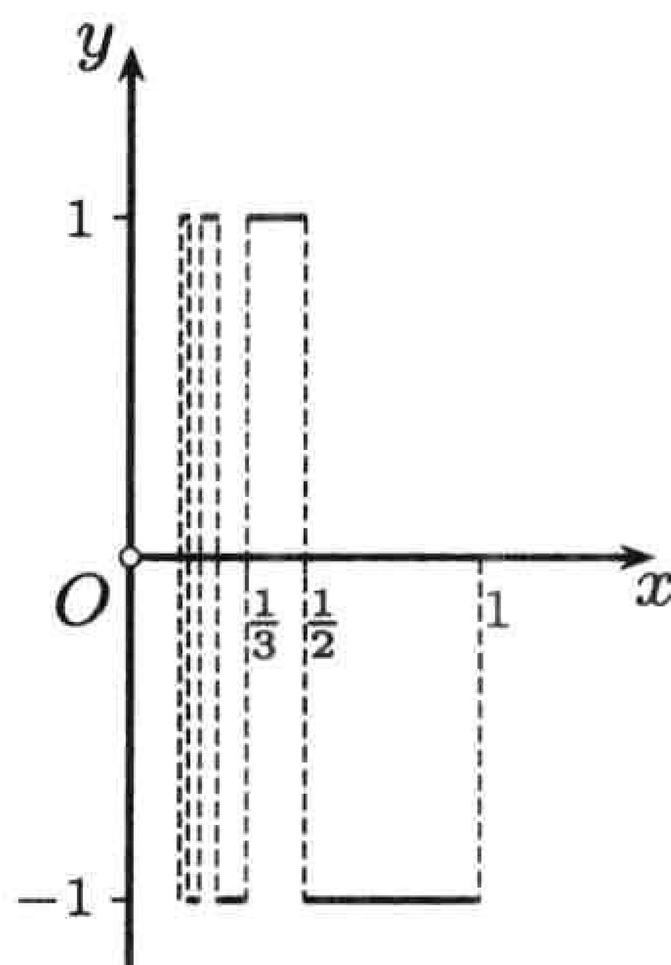
对于不可积情况只要用反证法即可. 从略. □

下面我们给出本小节中几个习题的解答.

习题 2194 证明: 不连续函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

在区间 $[0,1]$ 上可积.



习题 2194 的附图

解 1 (用命题 4.1) (如前述推论所示, $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义不影响下面的讨论.) 从函数 $f(x)$ 的表达式可见点 $1, \dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ 是可列个第一类不连续点, 而 $x=0$ 是第二类不连续点. 由于这些不连续点只有一个聚点 $x=0$, 而 f 在包含该点的任意子区间上的振幅为 2, 因此可如下构造分划 (参见附图).

对于给定的 $\varepsilon>0$ (不妨设它已小于 1), 取 $x_1=\dfrac{\varepsilon}{4}$. 这时在区间 $[x_1,1]$ 上 f 只有有限个不连续点, 因此存在这个区间的分划 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 其中 $x_n=1$, 使得

$\sum\limits_{i=2}^{n}\omega_i\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$.

合并以上就得到 $[0,1]$ 的分划 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得 f 的振幅面积

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\Delta x_i = \omega_1\,\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n}\omega_i\,\Delta x_i = 2x_1 + \sum_{i=2}^{n}\omega_i\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这样就证明了所要的结论. □

解 2 (用命题 4.2) f 在包含 $x=0$ 的子区间上的振幅为 2, 在包含其他不连续点的闭子区间上的振幅不超过 2, 而在不含不连续点的闭子区间上的振幅都是 0.

对于给定的 $\varepsilon, \eta > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$ 和 $\eta < 2$. 取 x_1 使得 $0 < x_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, 且使得 x_1 不是 f 的不连续点. 这时, f 在 $[x_1, 1]$ 中只有 f 的有限个不连续点, 因此可积. 由命题 4.2 的必要性可知, 存在区间 $[x_1, 1]$ 的分划 P, 使得振幅不小于 η 的子区间的长度之和小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 对于 P 的分点加入点 0 即可得出区间 $[0,1]$ 的一个分划, 使其中振幅不小于 η 的子区间是 P 中原有的这类子区间加上子区间 $[0, x_1]$, 因此它们的长度之和小于 ε. □

解 3 (用命题 4.3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 先用小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的开区间覆盖 $x=0$, 这样余下的不连续点只有有限多个, 因此可以被有限个开区间覆盖, 且使得它们的总长度也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 根据命题 4.3 可知 f 在 $[0,1]$ 上可积. □

解 4 (用命题 4.4) 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 由于 f 的不连续点有可列个, 只要用长度小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的区间覆盖不连续点 $x=0$, 用长度小于 $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ 的区间覆盖不连续点 $x=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 这样就用总长度小于 ε 的可列个区间覆盖了所有的不连续点. 根据命题 4.4 可知 f 在 $[0,1]$ 上可积. □

习题 2195 证明: 黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n} \ (m \text{ 及 } n\ (n \geqslant 1) \text{ 为互素的整数}) \end{cases}$$

在任何有限的区间上可积.

解 1 (用命题 4.2) 由于黎曼函数是周期 1 的周期函数, 因此只需证明它在 $[0,1]$ 上可积就够了 (参见 §1.7.3 的习题 736 的附图).

对于给定的 $\varepsilon, \eta > 0$, 不妨设 $\eta \in (0,1)$. 如习题 736 (该题讨论黎曼函数的连续性) 所示, 在 $[0,1]$ 中以既约分数 m/n 表示的有理点中, 只有有限个点的分母 $n \leqslant \frac{1}{\eta}$ (其中包含点 $0, 1$). 凡是不含这些点的子区间上的函数振幅都小于 η. 然后取足够细的分划, 使得包含以上有限个点的子区间长度之和小于 ε 即可. □

解 2 (用命题 4.4) 根据习题 736, 黎曼函数的不连续点全体就是有理点全体, 而有理点全体只有可列多个, 又知可列点集为零测度集, 因此用勒贝格定理就知道黎曼函数在任何有界区间上可积. □

习题 2197 证明: 狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数},\\ 1, & x \text{ 为有理数}\end{cases}$$

在任何区间上不可积.

解 1 (用命题 4.1) 由于在任何子区间上 $\chi(x)$ 的振幅为 1, 因此无论用什么样的分划, 所得到的振幅面积只能是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1,$$

因此根据命题 4.1 (或命题 4.2), 函数 $\chi(x)$ 在任何区间上不可积. □

解 2 (用命题 4.4) 由于 $\chi(x)$ 处处不连续 (见第一册的 §1.7.3 的习题 734), 因此在任何区间上 $\chi(x)$ 的不连续点全体就是该区间本身, 它不可能用总长度为任意小的至多可列个区间覆盖. 根据勒贝格定理就知道 $\chi(x)$ 在任何区间上不可积. □

下面两个习题在一般的数学分析教科书中都有, 这里只作简单分析.

习题 2200 证明: 若有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 则其绝对值 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

分析 (由于可积函数必定有界, 题中的"有界"条件不必说.) 本题有两部分, 即证明 $|f(x)|$ 可积和关于积分的不等式. 在 $|f|$ 可积的前提下, 只要将不等式 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上积分即可得到所要的不等式.

下面看前半题.

一种方法是用三点不等式

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\leqslant|f(x')-f(x'')|,$$

这样就可以知道对于同样的分划, 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $|f(x)|$ 的振幅不会超过 $f(x)$ 的振幅. 用命题 4.1 就可以从 $f(x)$ 可积推出 $|f(x)|$ 可积.

另一种方法是证明, 若 x_0 是 $f(x)$ 的连续点, 则也是 $|f(x)|$ 的连续点 (参见 §1.7.3 的习题 746), 因此 $|f(x)|$ 的不连续点一定是 $f(x)$ 的不连续点. 于是覆盖 $f(x)$ 的不连续点集的区间全体也一定覆盖了 $|f(x)|$ 的不连续点集, 然后用勒贝格定理即可.

此外, 前半题也可以看成为下面关于复合函数的可积性习题 2202 的特例. □

习题 2201 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积, 即积分 $\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 存在. 这个函数在 $[a,b]$ 上是否为可积函数? 研究例子:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ -1, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

分析 从习题所提供的例子可知, 本题的答案是不一定, 即存在于某个区间上不可积的函数 $f(x)$, 然而取绝对值后得到的 $|f(x)|$ 却可积.

由于在数学分析课程中于区间上不可积的函数例子本来就很少, 因此我们经常以狄利克雷函数为出发点来构造不可积的其他例子. 上面提示的例子实际上就是

$$f(x) = 2\Big(\chi(x) - \frac{1}{2}\Big),$$

当然还可以构造出具有如此性质的其他例子. □

习题 2202 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上有定义并连续, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 并且当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时 $A \leqslant f(x) \leqslant B$. 证明: 函数 $\varphi(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

解 1 (**用命题** 4.2) 对于任意给定的 $\varepsilon, \eta > 0$, 利用 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上连续, 因而一致连续, 对 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x', x'' \in [A, B]$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 成立 $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \eta$.

利用命题 4.2 中条件的必要性, 由于 f 在 $[a, b]$ 上可积, 对于 $\varepsilon, \delta > 0$ 存在区间 $[a, b]$ 的分划, 使得在此分划下函数 $f(x)$ 的振幅超过 δ 的子区间长度之和小于 ε.

由 δ 的取法就知道, 在使得 $f(x)$ 的振幅不超过 δ 的子区间上, 函数 $\varphi(f(x))$ 的振幅不会超过 η. 由此可见, 在这同一个分划下, 使得函数 $\varphi(f(x))$ 的振幅超过 η 的子区间长度之和小于 ε. 利用命题 4.2 中条件的充分性就知道 $\varphi(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积. □

解 2 (**用命题** 4.4) 若 $x_0 \in [a, b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 则它也是 $\varphi(f(x))$ 的连续点. 因此 $\varphi(f(x))$ 的不连续点一定是 $f(x)$ 的不连续点. 从而覆盖了 $f(x)$ 的不连续点集的区间全体也覆盖了 $\varphi(f(x))$ 的不连续点集. 用勒贝格定理就知道从 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积即可推出 $\varphi(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积. □

下一个习题表明, 在习题 2202 中函数 $\varphi(x)$ 的连续性条件是本质的. 若将它减弱为可积, 则结论不再成立.

习题 2203 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积, 则函数 $f(\varphi(x))$ 是否也必定可积? 研究例子:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 为黎曼函数 (见习题 2195).

解 不一定. 由习题所提供的例子可见, 这时复合函数 $f(\varphi(x))$ 是狄利克雷函数, 它在任何区间上都不可积. □

4.1.4 补注 (习题 2205)

由于习题 2205 的充分性涉及可积函数的相当深刻的性质, 因此在这里讨论.

习题 2205 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 证明: 等式
$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$$
成立的充分必要条件是: 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续点处都有 $f(x)=0$.

解 对必要性和充分性分别作出证明. 前者比较容易, 后者则相当难.

必要性 用反证法. 设题中的积分为 0, 然而却存在 $x_0\in[a,b]$, 它是 $f(x)$ 的连续点, 但 $f(x_0)\neq 0$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时, 成立 $f^2(x)>\dfrac{1}{2}f^2(x_0)>0$.

由于 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时证明更容易, 下面不妨只讨论 x_0 是区间 $[a,b]$ 的内点的情况, 且设已取 $\delta>0$ 充分小, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$. 于是就有
$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^{x_0-\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}f^2(x_0)\cdot 2\delta=f^2(x_0)\delta>0,\end{aligned}$$
这与条件 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

充分性 通俗地说, 这里的关键在于要证明可积函数的连续点足够多, 因此 f 在所有连续点上等于 0 就保证了积分为 0.

从 §4.1.3 的命题 4.4 (即勒贝格定理) 知道, 可积函数必定几乎处处连续. 然而对于本题来说, 只需要证明 $f(x)$ 的连续点全体在区间 $[a,b]$ 上稠密就足够了. 这就是要证明, 在 $[a,b]$ 的任意子区间内都存在这样的连续点.

这里需要分两步: (1) 证明可积函数的连续点稠密, (2) 可积函数在其所有连续点上等于 0 就保证其积分为 0.

先证明 (2). 为此只要利用黎曼和的定义中取介点的任意性. 由于连续点稠密, 因此无论什么样的分划, 在每一个子区间中总能取到连续点作为介点. 由于 f (以及 f^2) 在连续点处为 0, 因此黎曼和为 0. 由此可见作为黎曼和极限的定积分也必定等于 0.

现在来证明 (1). 由于 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 记其定积分值为 I, 则根据定义, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分划, 以及与分划相容的任何介点集, 使得相应的黎曼和满足不等式
$$I-\frac{\varepsilon}{4}(b-a)<\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i<I+\frac{\varepsilon}{4}(b-a).$$
由于介点 $\xi\in[x_{i-1},x_i]$ 的任意性, 因此上述黎曼和的上下确界就满足相应的不等式:
$$I-\frac{\varepsilon}{4}(b-a)\leqslant\sum_{i=1}^n m_i\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n M_i\,\Delta x_i\leqslant I+\frac{\varepsilon}{4}(b-a),$$
其中 M_i,m_i 是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界. 记 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 f 在该子区间上的振幅, 将上式中的两个和式相减, 则就得到不等式
$$\sum_{i=1}^n\omega_i\,\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}(b-a)<\varepsilon(b-a).$$

这时可以看出, 至少对某一个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 成立不等式 $\omega_i < \varepsilon$. (否则, 若每一个 $\omega_i \geqslant \varepsilon$, 则上述和式将大于等于 $\varepsilon(b-a)$ 了.)

现在从 $[a, b]$ 开始, 取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 对于 $n = 1$, 在 $[a, b]$ 中取子区间, 使得在这个区间上 f 的振幅小于 1/2. 将它记为区间 $[a_1, b_1]$. 不仅如此, 在必要时缩小该区间, 这时 f 的振幅不会增加, 总可以使得 $a < a_1 < b_1 < b$.

接下来在 $[a_1, b_1]$ 中取子区间 $[a_2, b_2]$, 使得 f 在该区间上的振幅小于 1/4. 同时使得满足 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. 如下继续下去, 就可以归纳地构造出一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 使得在 $[a_n, b_n]$ 上, f 的振幅小于 $1/2^n$, $n = 1, 2, \cdots$. 同时闭区间套的左端点所成数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 而右端点所成数列 $\{b_n\}$ 严格单调递减.

根据闭区间套原理, 存在点 $\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$. 我们来证明 f 在 ξ 处连续.

任意给定 ε, 存在 N, 使得 $1/2^N < \varepsilon$. 于是 $[a_N, b_N]$ 上函数 f 的振幅小于 ε. 由于 ξ 满足不等式 $a_N < \xi < b_N$, 因此只要取正数 $\delta < \min\{\xi - a_N, b_N - \xi\}$, 就保证当 $|x - \xi| < \delta$ 时, $|f(x) - f(\xi)| \leqslant 1/2^N < \varepsilon$.

这样就对于可积函数 f 找到了 $[a, b]$ 中的一个连续点.

由于当 f 在 $[a, b]$ 上可积时, 也一定在 $[a, b]$ 内的每一个子区间上可积, 因此上述证明也就保证了每一个子区间中都有 f 的连续点, 即 f 的连续点在 $[a, b]$ 中稠密. □

注　习题 2205 的结论不仅对于 f^2 成立, 而且对于一般的非负可积函数也成立, 证明是类似的 (可参看 [34] 第十章的第一组参考题的题 8, 9 等).

§4.2 利用不定积分计算定积分的方法 (习题 2206–2315)

内容简介 本节将分几个小节介绍定积分的各种计算方法. 此外, 还在 §4.2.2 中介绍定积分在数列极限计算中的应用.

4.2.1 用牛顿–莱布尼茨公式计算定积分 (习题 2206–2218, 2237–2238)

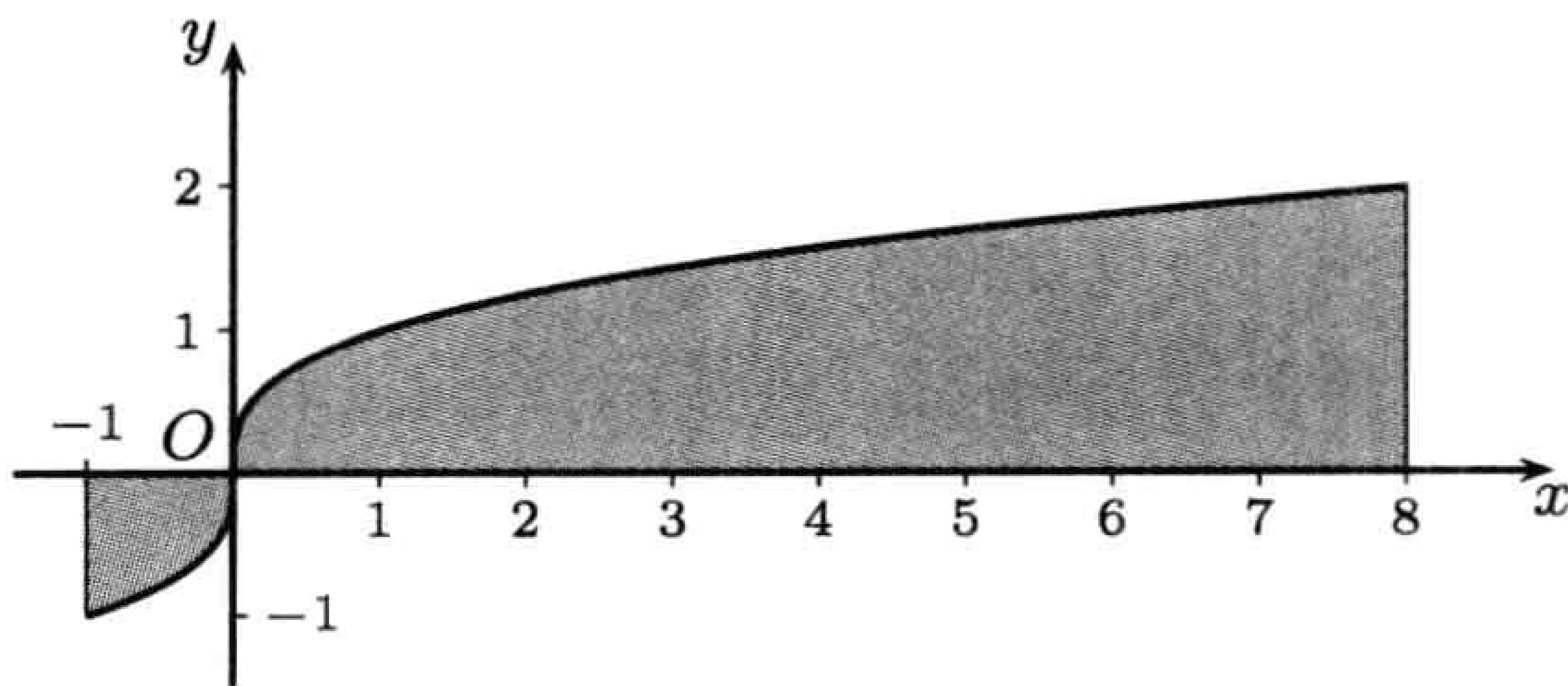
牛顿–莱布尼茨公式不仅在理论上建立了微分与积分之间的联系, 还同时提供了定积分的最基本的计算方法, 即只要求出定积分中的被积函数的原函数之后, 就可以用原函数在两个积分限处的值之差得到定积分的值. 本小节即是这方面的训练. 关于定积分的其他计算方法将在后面学习.

习题 2206 求 $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$, 并绘出对应的曲边图形的面积.

解 利用 $x^{\frac{1}{3}}$ 的原函数 $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$, 就可用牛顿–莱布尼茨公式得到

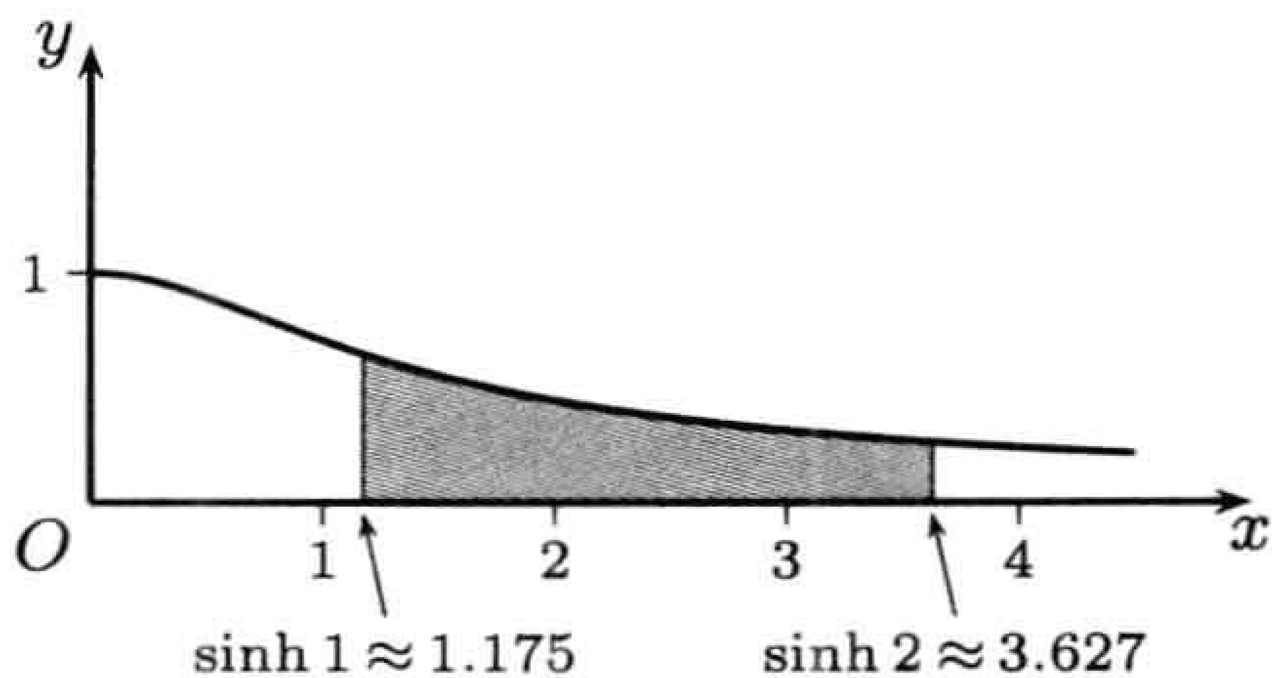
$$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}.$$

如附图所示, 这是在 x 轴上方的面积减去在 x 轴下方的面积所得的值. □



习题 2206 的附图

习题 2210 求 $\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$, 并绘出对应的曲边图形的面积.



习题 2210 的附图

解 1 用牛顿–莱布尼茨公式计算如下:

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{\sinh 1}^{\sinh 2}$$

$$= \ln\left[\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}\right)^2}\right]$$

$$- \ln\left[\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \ln(\mathrm{e}^2) - \ln \mathrm{e} = 2-1 = 1. \quad □$$

解 2 若利用双曲函数代换 $x = \sinh t$, 则就有 $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$, 于是得到

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^2 \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{\cosh t} = \int_1^2 \mathrm{d}t = 2-1 = 1. \quad □$$

解 3 若利用反双曲正弦函数的表达式 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (参见 §3.1.8 的 (3.11)), 且利用 $[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = 1/\sqrt{x^2+1}$, 则就有

$$\int_{\sinh 1}^{\sinh 2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arcsinh}x\Big|_{\sinh 1}^{\sinh 2}=2-1=1.\quad\square$$

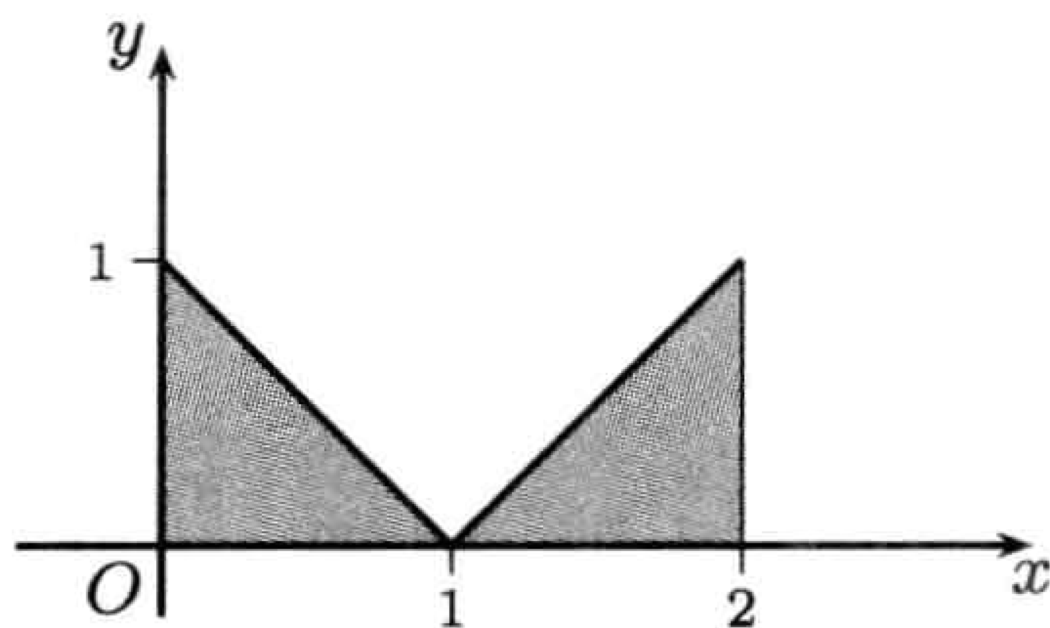
习题 2211 求 $\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x$, 并绘出对应的曲边图形的面积.

解 1 按照 §3.6.3 的习题 2166 的解 2 中的方法, 可以直接计算原函数并用牛顿–莱布尼茨公式计算如下:

$$\begin{aligned}\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x&=\operatorname{sgn}(1-x)\int_0^2(1-x)\,\mathrm{d}x\\&=\operatorname{sgn}(1-x)\cdot\Big(-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big)\Big|_0^2\\&=\Big(-\frac{1}{2}|1-x|(1-x)\Big)\Big|_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 由 §3.6.3 开始的分析和习题 2171 解 2 可知, 对于出现绝对值的被积函数求不定积分时容易出现问题. 因此对于分段定义的被积函数的积分, 一般还是分段求积为好. 这样就简单地得到 (参见附图):

$$\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\quad\square$$



习题 2211 的附图

习题 2216 对下列定积分, 说明为什么直接运用牛顿–莱布尼茨公式会得到不正确的结果:

$$\text{(a)}\ \int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x};\quad \text{(b)}\ \int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\,\mathrm{d}x}{2+\tan^2x};\quad \text{(c)}\ \int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\arctan\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

解 (a) 形式上的计算为

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^1=0-0=0,$$

然而从原函数的概念来考虑, $\Big(\ln|x|\Big)'=\dfrac{1}{x}$ 只能分别在 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 上成立, $\ln|x|$ 在 $[-1,1]$ 上并非是 $\dfrac{1}{x}$ 的原函数, 因此不能在 $[-1,1]$ 上用牛顿–莱布尼茨公式①. 由于被积函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上无界, 因此本题的定积分不存在. $\square$

(b) 形式上的计算为

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\,\mathrm{d}x}{2+\tan^2x}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\Big(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

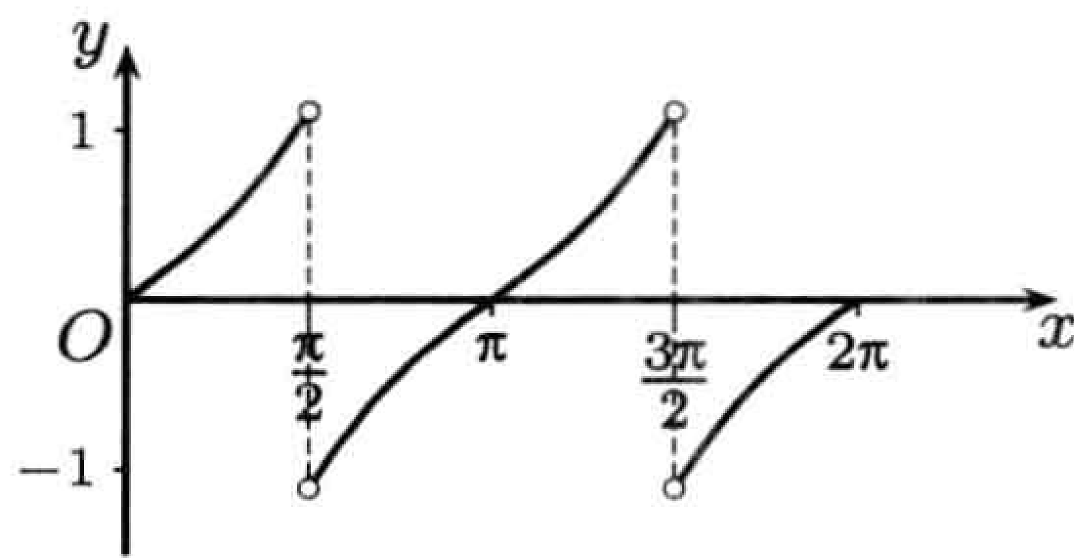
① 在牛顿–莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 的一种推广形式中, 允许 $F'(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的有限个点上不成立, 且称 $F(x)$ 为被积函数 $f(x)$ 的广义原函数, 然而 $F(x)$ 必须是 $[a,b]$ 上的连续函数, 这个条件不能随意去掉. 否则就需要利用 §4.2.7 的习题 2301 中的公式.

然而本题的被积函数在积分区间上处处大于 0, 因此其积分必定大于 0 ①, 可见上述计算必定是错误的.

从原函数的概念来考虑, 等式

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\right]'=\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}$$

只能在 $\tan x$ 有定义的点上成立. 在积分区间 $[0,2\pi]$ 上原函数有两个第一类不连续点 (跳跃点) $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$, 因此不能在 $[0,2\pi]$ 上用牛顿–莱布尼茨公式 (参见附图, 其中不连续点处的两侧极限值为 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\approx 1.11$).



习题 2216(b) 的原函数图像

本题若将积分区间分解为 $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 和 $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$, 然后用牛顿–莱布尼茨公式分段计算, 就可以得到正确的答案②. 另一个方法是利用对称性, 就有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+2}$$

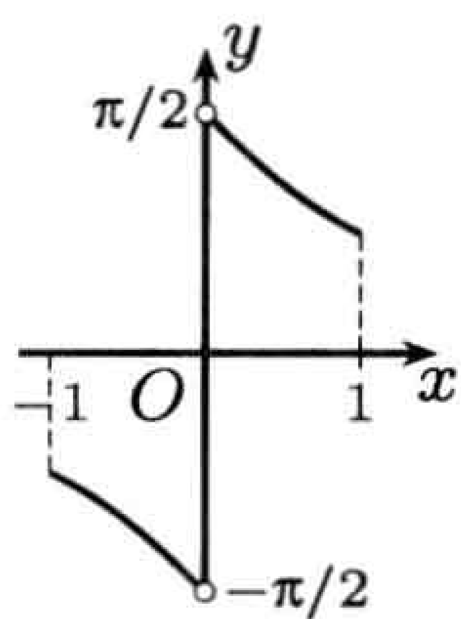
$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\,\pi.\quad\square$$

(c) 形式上的计算为

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2},$$

然而本题的被积函数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{x^2+1}\quad(x\neq 0),$$



习题 2216(c) 的原函数图像

因此在区间 $[-1,1]$ 上的积分小于 0, 可见上述计算是错误的.

从原函数的概念出发, $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的第一类不连续点, 在该点两侧分别有极限 $f(\pm 0)=\pm\frac{\pi}{2}$ (见左边的附图), 因此对本题的被积函数来说, 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 既不是原函数, 也不是广义原函数, 因为后者至少还必须连续.

本题也可以用分段计算方法, 这时仍可用 $\arctan\frac{1}{x}$ 为原函数:

$$-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=-\left(\int_{-1}^{0}+\int_0^1\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-0}+\arctan\frac{1}{x}\Big|_{+0}^{1}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}.\quad\square$$

注 容易直接验证有恒等式

① 从 §4.1.4 的习题 2205 的必要性及其注可见, 在区间上的非负可积函数只要在一个连续点上的函数值大于 0, 就足以保证其积分大于 0.

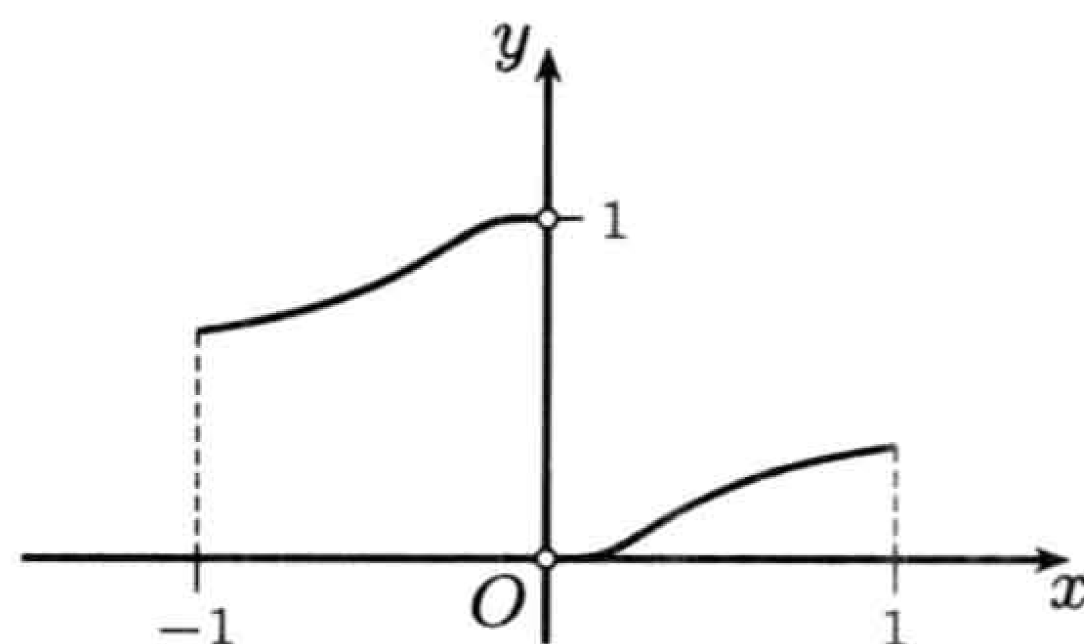
② 由此开始有许多积分计算中需要分段计算. 在分点处被积函数可以没有定义, 这在 §4.1.3 的几个命题后的推论中已得到解决. 还要注意, 在计算中我们经常需要用到后面 §4.2.7 的习题 2301 中的公式, 即在有限个点处 (广义) 原函数有第一类不连续点时的推广的牛顿–莱布尼茨公式.

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0),$$

可见 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 是被积函数 $-\dfrac{1}{x^2+1}$ 在区间 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 上的原函数, 但不是区间 $[-1,1]$ 上的原函数 (可从几何上来理解以上恒等式), 而 $-\arctan x$ 则是区间 $[-1,1]$ 上的原函数.

习题 2217 求 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x.$

分析 如附图所示, $F(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 在点 $x=0$ 的两侧分别有极限 $F(-0)=1$ 和 $F(+0)=0$, 因此不能在 $[-1,1]$ 上用这个函数作为原函数来用牛顿–莱布尼茨公式, 但可以分段计算得到正确的结果. 与习题 2216(b), (c) 类似, 这就是 $[F(-0)-F(-1)]+[F(1)-F(+0)]$, 计算从略. □



习题 2217 的原函数图像

习题 2238(b) 求下列积分并作出其对参数 α 的函数关系 $I=I(\alpha)$ 的图像:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x.$$

解 1 (不定积分方法) 在 $\alpha=0$ 时直接可求出 $I(0)=\pi/2$. 在 $|\alpha|=1$ 时, 则有

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{2(1\pm\cos x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1\mp\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\mp\sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

以下在 $|\alpha|\neq 0,1$ 的条件下通过先求不定积分的方法来计算 $I(\alpha)$.

先求不定积分. 用万能代换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ (见 §3.4.3), 就可将不定积分变换为

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2[(1-\alpha)^2t^2+(1+\alpha)^2]}.$$

对这类积分, 除了用部分分式分解方法之外, 比较方便的是用 §3.2.2 的奥斯特罗格拉茨基方法. 写出含有待定系数的等式:

$$\frac{8t^2}{(t^2+1)^2[(1-\alpha)^2t^2+(1+\alpha)^2]} = \left(\frac{At+B}{t^2+1}\right)' + \frac{Ct^3+Dt^2+Et+F}{(t^2+1)[(1-\alpha)^2t^2+(1+\alpha)^2]}.$$

通过计算得到

$$A=-\frac{1}{\alpha},\ D=-\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha},\ F=\frac{1}{\alpha}(1+\alpha)^2,\ B=C=E=0.$$

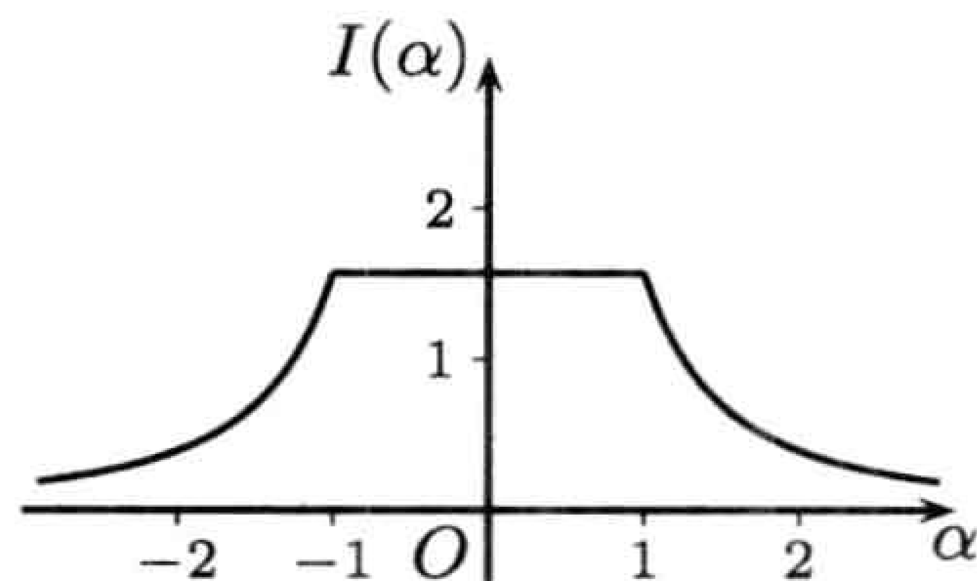
然后即可积分得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2[(1-\alpha)^2t^2+(1+\alpha)^2]}\\
&= -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \int\left(\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}\cdot\frac{1}{t^2+1} - \frac{(\alpha^2-1)^2}{2\alpha^2}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)^2t^2+(1+\alpha)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha^2}\right)\arctan t - \frac{|1-\alpha^2|}{2\alpha^2}\arctan\frac{t|1-\alpha|}{|1+\alpha|} + C\\
&= -\frac{1}{2\alpha}\sin x + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha^2}\right)\frac{x}{2} - \frac{|1-\alpha^2|}{2\alpha^2}\arctan\left(\frac{|1-\alpha|}{|1+\alpha|}\tan\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

最后用牛顿–莱布尼茨公式得到

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha^2}\right)\frac{\pi}{2}-\frac{|1-\alpha^2|}{2\alpha^2}\frac{\pi}{2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |\alpha|<1,\\ \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & |\alpha|\geqslant 1.\end{cases}$$



习题 2238(b) 的附图

其中已经融入了 $\alpha=\pm1$ 时的计算结果. 可看出 $I(\alpha)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 其图像见附图. □

解 2 直接计算定积分. 如解 1 所示只讨论 $|\alpha|\neq 0,1$ 的情况. 先将被积函数的分母写成为 $(1+\alpha^2)(1+\varepsilon\cos x)$, 其中 $\varepsilon=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ 满足条件 $0<|\varepsilon|<1$; 然后将分子改写为

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{\varepsilon^2}(1-\varepsilon^2\cos^2 x)+\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right),$$

这样就可以将积分展开为两项如下:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{(1+\alpha^2)\varepsilon^2}\int_0^{\pi}(1-\varepsilon\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{1+\alpha^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$$
$$=\frac{\pi}{(1+\alpha^2)\varepsilon^2}+\frac{1}{1+\alpha^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}.$$

对最后一个积分可以分拆如下:

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x},$$

然后对右边的第二个积分作代换 $x=\pi-t$, 并在变换后又将 t 重记为 x, 这样就得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}+\frac{1}{1-\varepsilon\cos x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\varepsilon^2\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+(1-\varepsilon^2)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

将此结果代入前面并加整理即可得到与解 1 相同的答案. □

4.2.2 定积分在数列极限计算中的应用 (习题 2219–2230)

在第一册的 §1.5.6 的习题 631 提供了一个定理, 它可以在一定条件下计算如下类型的数列极限:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{nn})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_{kn}, \tag{4.3}$$

以及它的一种变型

$$\lim_{n\to\infty}(x_{1n}\cdot x_{2n}\cdot\cdots\cdot x_{nn})=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}x_{kn}. \tag{4.4}$$

(在每一个 $x_{kn}>0$ 时, 只要取对数就可以将问题 (4.4) 归结到问题 (4.3).)

以下主要讨论类型为 (4.3) 的数列极限.

在习题 631 的条件中, 要求 (4.3) 中的 $x_{kn}=\varphi(\alpha_{kn})$, 且 $\alpha_{kn}\rightrightarrows 0\ (n\to\infty)$ 关于 $k=1,2,\cdots$ 一致. 这时若有 $\varphi(x)\sim\psi(x)\ (x\to 0)$, 且 $\psi(x)>0$, 则就得到

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})],$$

其中假设右边的极限存在.

由此可见, 习题 631 的定理有一定的局限性. 一方面, 它只能适用于 x_{kn} 为特殊类型的情况; 另一方面, 它只是将 (4.3) 中 $x_{kn}=\varphi(\alpha_{kn})$ 的情况归结为同样类型的问题, 其中的 $x_{kn}=\psi(\alpha_{kn})$, 而后者如何计算则是另一个问题了.

下面我们将要利用定积分知识, 对于类型为 (4.3) (以及 (4.4)) 的数列极限问题, 在一定的条件下可以将它看成为某个函数的黎曼和, 从而通过定积分计算来求出其极限.

为了便于理解这种方法, 我们不按照《习题集》原有的顺序, 先看下列习题, 它实际上是这种方法的一般形式.

习题 2226 利用定积分求下列和的极限值:

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big)\Big].$$

解 将方括号内的表达式乘以 $b-a$ 之后, 可以看成是在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的一个黎曼和, 其中对区间作 n 等分分划, 且在每个子区间中取其右端点为介点.

因此只要假设 f 在区间 $[a,b]$ 上可积, 就知道上述极限等于 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

注 由此可见, 可用定积分方法求类型为 (4.3) 的极限的一个充分条件是: 能够找到区间 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$, 使得成立

$$x_{kn}=\frac{1}{n}f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

这就是说, 在 (4.3) 中的 x_{kn} 应当使得乘积 nx_{kn} 是 $\dfrac{k}{n}$ 的函数, 或者说是 k 和 n 的零次齐次函数, 即当 k 和 n 乘以同一个常数 c 时, nx_{kn} 保持不变.

当然也可以将 x_{kn} 看成为某个函数 f 在 n 等分的分划中的每个子区间的左端点或其他介点上的函数值.

总之, 这种方法就是在 (4.3) 的和式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_{kn}$ 能够看成为黎曼和时, 则就可以用定积分的计算来求出这类数列极限.

习题 2219 利用定积分求下列和的极限值:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\Big).$$

解 将括号内的和式改写为

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\Big),$$

即可将它看成为区间 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x$ 的一个黎曼和, 其中对区间取 n 等分的分划, 同时取每个子区间的左端点为介点. 于是就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\quad\square$$

注 本题当然可以直接计算如下:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

习题 2220 利用定积分求下列和的极限值:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

解 将括号内的和式改写为

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

即可将它看成为区间 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的一个黎曼和, 于是就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.\quad\square$$

注 这个极限在第一册中已经遇到. 在 §1.2.3 的习题 147 中给出了两个解法, 其中解 1 依赖于欧拉常数, 解 2 则依赖于习题 75(a) 中的不等式. 在 §1.5.6 末, 利用习题 631 的定理和 $x\sim\ln(1+x)$ $(x\to 0)$ 又给出了第三个解法. 然而应该说, 这三个解法都相当特殊, 很难推广于解决更一般性的 (4.3) 类型的极限计算问题.

习题 2223 利用定积分求下列和的极限值:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ \ (p>0).$$

解 将和式改写为

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right],$$

即可将它看成为区间 $[0,1]$ 上的函数 x^p 的一个黎曼和, 因此就得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.\quad\square$$

注 本题的极限也可以用 §1.2.7 的施托尔茨定理来求得. 这就是《习题集》§1.2 的习题 145(a).

习题 2225 利用定积分求极限值: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 取对数后即可计算其极限如下:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

然而这里有两个问题. 首先, 由于对数函数 $\ln x$ 在 $(0,1]$ 上无界, 因此最后一个积分不是普通的定积分, 而是 §4.4 介绍的广义积分. 其次, 广义积分一般不能通过黎曼和来计算 (这就是 §4.4.3 的习题 2385), 因此上述推导需要有后面 §4.4.3 的习题 2388 的支持才能成立. 这样就有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)&=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left((x\ln x-x)\Big|_\varepsilon^1\right)\\&=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=-1.\end{aligned}$$

于是本题的答案是 e^{-1}. □

注 本题的极限在 §1.2.7 的习题 142 中已经遇到 (以倒数形式出现), 那里的方法是以乘积形式的柯西命题 (即该处的习题 141) 为基础的.

由习题 2226 总结的定积分方法虽然很有用, 但仍然有较大的局限性, 因为它必须要求和式能够看成为黎曼和. 以下的习题 2227–2230 表明, 在这个条件不满足时, 还可以结合习题 631 中的思想来计算所要求的极限, 这就是证明所讨论的和式与一个黎曼和之差在取极限后消失. 下面只看其中的第一题.

习题 2227 弃掉一致的高阶无穷小, 求下列和的极限值:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$$

解 作为类型 (4.3) 的极限, 本题的

$$x_{kn}=\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2},\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

它不满足 nx_{kn} 关于 k,n 为零次齐次函数的要求, 因此不是黎曼和.

借用习题 631 的思想, 如果利用 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$, 将本题的 x_{kn} 中出现的正弦函数 $\sin x$ 换为 x, 则就可以用定积分方法 (或其他方法) 求极限如下:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{n}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2\pi}{n}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\frac{(n-1)\pi}{n}\right]\\&=\pi\int_0^1(1+x)x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

余下的问题就是要证明, 在 $k=1,\cdots,n-1$ 的每一项中用 x 取代 $\sin x$ 时弃去的 $o(x)\ (x\to 0)$ 的总和, 当 $n\to\infty$ 时的极限为 0.

利用无穷小增量公式

$$\sin x=x+o(x)=x+o(1)x\ \ (x\to 0),$$

对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x|<\delta$ 时, 成立 $|\sin x-x|<\varepsilon|x|$.

利用当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时有 $\dfrac{k\pi}{n^2}\leqslant\dfrac{\pi}{n}$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, 对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 一致地成立 $\dfrac{k\pi}{n^2}<\delta$.

于是就可以估计得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\left|\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right|$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2\pi}{n^3}\Big)<2\pi\varepsilon,$$

其中最后一步是将所有 $k=1,2,\cdots,n-1$ 换为 n 而得到的简单估计.

这样就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\right]=0.$$

综合以上就得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}\right]+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$
$$=0+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi.\quad\square$$

注　若将本题看成为求下列两个极限之和:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\sin\frac{k\pi}{n^2},$$

则对第一个极限可直接应用习题 631 而将其中的 $\sin x$ 换为 x, 而对第二个极限则可以从习题 631 的证明过程看出, 将其中的 $\sin x$ 换为 x 的计算方法也是正确的.

4.2.3　对变动积分限的求导 (习题 2231–2236)

首先注意定积分与不定积分之间的本质差异.

定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个实数, 而不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 则是 f 的原函数全体所成的集合.

与此相联系, 定积分中的积分变量用什么符号表示都是一样的. 换言之, 我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\cdots.$$

然而, 不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 中的积分变量 x 一旦给定, 则被积函数 $f(x)$ 的原函数的自变量只能是 x. 因此在第三章用换元法计算不定积分时, 无论其中间过程用了什么其他变量, 最后必须回代, 得到以 x 为自变量的不定积分.

若定积分的积分上限或下限是某个变量 (或变量的函数), 则定积分就成为函数. 这是在数学中引进新的函数的重要手段之一.

只是这里要注意, 若将积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的上限 (下限) 换成为变量 x 之后, 这个变量与积分号下的积分变量具有完全不同的意义. 为了避免混淆, 应当将原有的积分变量改用其他符号来表示. 例如 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_x^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 等等.

我们将关于变动积分限的最基本性质列为下面的命题. 由于在数学分析教科书中都有它们的证明, 这里从略.

命题 4.5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则有以下结论:

(1) 以下两个变动积分限的积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad G(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}x$$

都是 $[a,b]$ 上的连续函数;

(2) (**微积分学基本定理的微分形式**) 若 $f(x)$ 在点 $x_0\in[a,b]$ 处连续, 则在 (1) 中定义的 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在点 x_0 处可微, 且有

$$F'(x_0)=f(x_0),\quad G'(x_0)=-f(x_0).$$

习题 2231 求 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b \sin t^2\,\mathrm{d}t$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$; (3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

解　(1) 定积分 $\int_a^b \sin t^2\,\mathrm{d}t$ 在 a,b 固定时只是一个确定的实数. 本小题要求它关于变量 x 的导数, 则只能是将这个实数看成为关于 x 的常值函数, 因此导数等于 0, 即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin t^2\,\mathrm{d}t=0.$$

此外, 这里的变量 x 和积分号下的积分变量没有任何关系. 如前所述, 为避免误解, 题中将积分变量用符号 t 表示.

(2) 由题意可见这时的积分下限 a 为自变量, 因此从命题 4.5 即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x=-\sin a^2.$$

(3) 由题意可见这时的积分上限 b 为自变量, 因此从命题 4.5 即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x=\sin b^2.\quad\square$$

在命题 4.5 的基础上, 再结合复合函数导数计算的链式法则, 就容易在积分限为可微函数的情况下, 计算定积分的导数. 这方面看一个例子.

习题 2232(b) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

解　用命题 4.5 和链式法则即可计算如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}&=\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)\Big|_{t=x^3}\cdot(x^3)'-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)\Big|_{t=x^2}\cdot(x^2)'\\&=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2233(a) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$.

解 根据命题 4.5(1), 分子是 x 的连续函数, 于 $x=0$ 处等于 0, 因此本题是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 根据命题 4.5(2), 分子对 x 可导, 因此可以用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1.\quad\square$$

习题 2233(d) 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 求

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x.$$

解 1 作变量代换 $t=nx$, 这时有 $x=\dfrac{1}{n}t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\,\mathrm{d}t$, 且当 x 从 0 到 1 时, t 从 0 到 n. 因此问题转化为求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}{n},$$

于是成为 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的极限计算问题①.

这虽然是一个数列的极限问题, 但可以将 n 看成为连续变量, 从而可以用命题 4.5 和洛必达法则得到:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}{n}=\lim_{n\to+\infty}f(n)=A.\quad\square$$

解 2 在解 1 的后一半也可以用施托尔茨定理, 即得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}{n}=\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

为证明最后一个极限存在且等于 A, 只要对给定的 $\varepsilon>0$, 取 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $|f(t)-A|<\varepsilon$, 于是就有

$$\left|\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t-A\right|=\left|\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_n^{n+1}A\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_n^{n+1}|f(t)-A|\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon,$$

可见结论成立. $\square$

解 3 在区间 $[0,1]$ 上, 除了在端点 $x=0$ 之外, 对于每一个点 $x_0>0$, 当 n 充分大时的函数值 $f(nx_0)$ 必定与 A 充分接近. 这样就可以猜测到本题的极限值为 A. 以下是其严格证明.

由题设条件知道 f 在 $[0,+\infty)$ 上有界 (见 §1.7.4 的习题 751), 即有 $M>0$, 使得当 $x\geqslant 0$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$. 又由此可知也有 $|A|\leqslant M$.

于是可以估计如下:

① 若 $A\neq 0$, 则可以肯定是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式, 然而当 $A=0$ 时就不能肯定分子是否是无穷大量. 这时使用在 §2.9.4 的命题 2.10 是合适的.

$$\left|\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x - A\right| = \left|\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 A\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(nx) - A|\,\mathrm{d}x.$$

由于无论取多大的 n, 在 $x=0$ 处 $f(0)$ 未必与 A 相等 (除非恰好 $f(0)=A$), 因此以下采取“分而治之”的方法, 即将上述最后一个积分分拆如下:

$$\int_0^1 |f(nx) - A|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4M}} |f(nx) - A|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(nx) - A|\,\mathrm{d}x.$$

利用 $|f(nx) - A| \leqslant 2M$, 可见上式右边的第一个积分不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$.

为了使得上式右边的第二个积分充分小, 需要分几步来做.

先利用条件 $f(+\infty) = A$, 对于同一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 使得当 $x \geqslant K$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 为了使得在第二个积分的积分区间 $[\frac{\varepsilon}{4M}, 1]$ 上的每一个点 x 都满足 $nx \geqslant K$, 只要在这个区间的左端点处满足这个不等式就足够了. 这样就可确定正整数

$$N = \left[\frac{4MK}{\varepsilon}\right],$$

使得当 $n > N$ 时有

$$n \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \geqslant (N+1) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} > \frac{4MK}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = K,$$

从而使得当 $n > N$ 时, 对于所有的 $x \in [\frac{\varepsilon}{4M}, 1]$ 同时成立 $|f(nx) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 这样就得到所要的估计

$$\int_{\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(nx) - A|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

合并以上就知道当 $n > N$ 时成立

$$\left|\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这就是 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x = A$. □

注 解 3 虽然较为复杂一点, 但其中的“分而治之”的思想具有方法论上的意义, 它在许多极限问题中是有用的. 例如见 §4.3 的习题 2326.1(b).

4.2.4 换元法和分部积分法 (习题 2239–2256, 2260–2262, 2264, 2268–2275, 2277–2280)

除了在本节的第一小节 §4.2.1 中用不定积分和牛顿–莱布尼茨公式计算定积分的方法之外, 还可以将不定积分中的分部积分法和换元法移植到定积分的计算中来.

在定积分计算中所用的分部积分法的推导比较简单, 只要利用函数乘积的求导公式与牛顿–莱布尼茨公式即可得到. 在具体应用分部积分法时, 如何将被积函数写成 $u(x)\,\mathrm{d}v(x)$ 的选择原则与不定积分是类似的. 这里同样可以参考 §3.5 末提出的“对反代三指”的经验规则.

定积分计算中所用的换元法则要复杂一点. 下面我们以两个命题的形式分别列出最常用的两种情况, 并给出其证明.

命题 4.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $x=x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调可微, 其导函数 $x'(t)$ 可积, 且满足条件 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, 则成立下列换元公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.5}$$

证 不妨只给出 $x(t)$ 为严格单调递增情况的证明.

设 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 的一个分划, $\xi=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 是与 P 相容的介点集, 则就得到 (4.5) 右边的被积函数 $f(x(t))x'(t)$ 的一个黎曼和

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i))x'(\xi_i)\Delta t_i.$$

由于 $x(t)$ 严格单调递增, 因此从 $[\alpha,\beta]$ 的分划 P 可诱导出区间 $[a,b]$ 的一个分划 $P'=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 其中 $x_i=x(t_i)$, $i=0,1,\cdots,n$. 同时从介点集 ξ 又生成与 P' 相容的介点集 $\xi_i'=x(\xi_i)$, $i=1,\cdots,n$. 于是得到 $f(x)$ 的一个黎曼和

$$\sigma'=\sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i))x'(\xi_i^*)\Delta t_i,$$

其中利用拉格朗日微分中值定理, 存在 $\xi_i^*\in(t_{i-1},t_i)$, 使得 $\Delta x_i=x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i^*)\Delta t_i$, $i=1,\cdots,n$.

由于 $x'(t)$ 有界, 存在常数 $M>0$, 使得 $\Delta x_i\leqslant M\Delta t_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 即有 $\|P'\|\leqslant M\|P\|$. 于是当 $\|P\|\to 0$ 时就有 $\|P'\|\to 0$, 即有 $\sigma'\to\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

又利用在布利斯–杜阿梅尔定理 (即 §4.1.2 的习题 2193.1) 中的类似方法, 利用可积函数 $f(x)$ 必有界, 存在 $M_1>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M_1$, 于是有

$$|\sigma-\sigma'|\leqslant\sum_{i=1}^n|f(x(\xi_i))|\cdot|x'(\xi_i)-x'(\xi_i^*)|\Delta t_i\leqslant M_1\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta t_i,$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta t_i$ 是 $x'(t)$ 的振幅面积, 可见当 $\|P\|\to 0$ 时, 两个和式之差 $\sigma'-\sigma\to 0$, 因此黎曼和 σ 收敛, 且成立换元公式 (4.5). □

命题 4.6 中 $x(t)$ 为严格单调的条件使得它成为 $[\alpha,\beta]$ 到 $[a,b]$ 的一一映射. 这是很自然的一个合理要求, 但却并非必要. 下面将看到, 若适当加强对于 $f(x)$ 的条件, 则在 $x(t)$ 不是严格单调时, 换元公式 (4.5) 可以通过两次使用牛顿–莱布尼茨公式得到.

命题 4.7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x=x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 其导函数 $x'(t)$ 可积, 且满足条件 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ 和 $x([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, 则换元公式 (4.5) 成立.

证 这时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 记为 $F(x)$. 于是有 $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 从条件 $x([\alpha,\beta])\subset[a,b]$ 和链式法则可见 $F(x(t))$ 是 $f(x(t))x'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的原函数, 同时从 §4.1.3 的习题 2202 推知 $f(x(t))x'(t)$ 可积, 于是又有

$$F(x(\beta))-F(x(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

最后利用条件 $x(\alpha)=a$ 和 $x(\beta)=b$ 就得到公式 (4.5). □

注 1 在不定积分中有两种换元法 (见 §3.1). 从公式 (4.5) 来看, 若要计算的是右边, 则就有 $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t$, 因此就是用凑微分法 (即第一种换元法) 将右边化为左边. 这同时也表明在定积分记号中的微分符号 $\mathrm{d}x$ 对于计算也是有帮助的. 反之, 从左边化到右边就可以理解为是第二种换元法, 即用 $x=\varphi(t)$ 的代入法.

注 2 从公式 (4.5) 和下面的一系列例子可以看出, 定积分的换元法与不定积分的换元法有以下不同之处:

(1) 必须注意积分限作相应的变换.

(2) 由于定积分只是一个数值, 因此对定积分用换元法时, 最后不必回代以恢复原来的积分变量, 这样就比用不定积分的换元法更方便.

习题 2245 求 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$.

解 1 先用换元法求不定积分 (也可以用分部积分法), 令 $\sqrt{5-4x}=t$, 则有 $x=\dfrac{1}{4}(5-t^2)$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t$. 于是可计算不定积分如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}&=\int\frac{5-t^2}{4t}\cdot\Big(-\frac{t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{8}\int(5-t^2)\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{5}{8}t+\frac{1}{24}t^3+C\\&=-\frac{5}{8}(5-4x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{24}(5-4x)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

然后用牛顿–莱布尼茨公式得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}&=\Big(-\frac{5}{8}(5-4x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{24}(5-4x)^{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_{-1}^{1}\\&=-\frac{5}{8}+\frac{1}{24}+\frac{15}{8}-\frac{27}{24}=\frac{1}{6}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用定积分的换元法, 令 $\sqrt{5-4x}=t$, 则有 $x=\dfrac{1}{4}(5-t^2)$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t$, 且当 x 从 -1 到 1 时, t 从 3 到 1. 于是可计算如下:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}&=-\frac{1}{8}\int_{3}^{1}(5-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{1}^{3}(5-t^2)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{8}\Big(5t-\frac{t^3}{3}\Big)\Big|_{1}^{3}=\frac{1}{8}\Big(6-4\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{6}.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 用定积分的分部积分法可计算如下:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}&=\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}\Big)\\&=-\frac{1}{2}x\sqrt{5-4x}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{5-4x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}(1+3)+\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{1}{4}\Big)\cdot\frac{2}{3}(5-4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}\\&=-2-\frac{1}{12}(1-27)=-2+\frac{13}{6}=\frac{1}{6}.\quad\square\end{aligned}$$

在用换元法计算定积分时,有可能出现积分区间为无界的情况,后者是一种广义积分(见 §4.4). 下面就是这样的一个例子.

习题 2250 令 $x-\dfrac{1}{x}=t$, 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

解 (参见 §3.1.3 的习题 1712.) 由于 $t(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处有间断, 不可能在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上换元. 利用所求积分的被积函数为偶函数, 先将积分变换如下:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

这时从 $t'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$ 可见从 x 到 t (以及从 t 到 x) 为严格单调递增. 然而 x 从 0 到 1 却对应于 t 从 $-\infty$ 到 0, 因此这里出现了广义积分. 由于广义积分是通过将积分限取极限得到的, 因此可作如下计算:

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x&=2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}x=2\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\\&=2\lim_{T\to-\infty}\int_{T}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}\\&=\sqrt{2}\lim_{T\to-\infty}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{T}^{0}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$ □

注 为简便起见, 今后也经常将以上换元计算与取极限的过程写为

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x&=2\int_{0}^{1}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\\&=2\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}\\&=\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

习题 2251 (a) 说明为什么在下列积分中用代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 会引致不正确的结果:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x.$$

解 从 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 来看, 它是 x 的偶函数, $x=\pm1$ 对应于同一个值 $t=1$, 因此代换后的积分只能等于 0. 无论是命题 4.6 还是命题 4.7 都不允许出现这样的情况. 然而本题的积分显然等于 2, 因此不可能用这样的代换来进行正确的计算.

这时有 $x=\varphi(t)=t^{\frac{3}{2}}$, 其值域为 $[0,+\infty)$, 而积分区间为 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 在如下的形式计算中, $\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$, 认为 $x=\pm1$ 时对应于同一个值 $t=1$, 当然只能得到错误的结果:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_{1}^{1}t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=0.$$

改正以上错误的方法之一是在 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 上令 $t = -x^{\frac{2}{3}}$, 而在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上令 $t = x^{\frac{2}{3}}$, 这样即可得到正确的积分结果为 2. □

注 从命题 4.7 可知, 代换 $x = \varphi(t)$ 不是严格单调函数时仍有可能用于定积分的计算. 就本题来说, 如令 $x = \varphi(t) = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{2}$, 则有 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$, 这时有 $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, 从而可以得到正确的答案如下:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$$

习题 2256 设 $f(x)$ 在闭区间 $[A, B]$ 上连续, $[a, b] \subset (A, B)$, 当 $[a-x, b-x] \subset [A, B]$ 时, 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\,\mathrm{d}y$①.

解 作代换 $t = x + y$, 其中 x 为参数, 于是有 $y = t - x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, 当 y 从 a 到 b 时, t 从 $a + x$ 到 $b + x$. 于是有

$$\int_a^b f(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_{a+x}^{b+x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这样就可以通过对于变动积分限求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\,\mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a+x}^{b+x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(b+x) - f(a+x).\end{aligned}$$ □

注 本题的定积分中 y 是积分变量, 而 x 是参变量. 今后在学习了含参变量积分的理论之后 (其习题见 §7.1), 就知道在 f 为连续可微的条件下, 本题对于参变量 x 的求导运算可以与对于 y 的积分运算进行交换, 从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x+y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f'(x+y)\,\mathrm{d}y \\ &= f(x+y)\Big|_{y=a}^{y=b} = f(x+b) - f(x+a).\end{aligned}$$

本题的意义在于, 只要 f 连续, 就可以得到相同的结果.

习题 2260 引入新变量 $t = x + \frac{1}{x}$, 计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x + \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

解 1 (概要) 对于换元法来说, 这是很自然的选择. 然而由于 $t(1/2) = t(2)$, 因此不能用命题 4.6 和 4.7. 通过单调性分析, 知道 $t(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 和 $[1, 2]$ 上分别严格单调, 因此可分别在这两个区间上求积, 具体的计算从略. □

解 2 用分部积分法可计算如下:

① 原题的条件 $[a, b] \subset [A, B]$ 不足以保证当 x 的绝对值充分小时满足 $[a - x, b - x] \subset [A, B]$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\,d(e^{x+\frac{1}{x}})$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,dx+\left(x\,e^{x+\frac{1}{x}}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.\quad\square$$

解 3 从解 2 可看出

$$\frac{d}{dx}\left(x\,e^{x+\frac{1}{x}}\right)=e^{x+\frac{1}{x}}+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}=\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}},$$

于是就可在积分区间 $[\frac{1}{2},2]$ 上用牛顿–莱布尼茨公式得到

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx=\left(x\,e^{x+\frac{1}{x}}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.\quad\square$$

习题 2264 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, 求积分 $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$.

分析 由于 $f(x)$ 在点 $x=0$ 和 $x=2$ 附近无界, 因此 $f'(x)$ 也一定无界 (参见 §2.6.4 的习题 1254), 这表明本题的积分实际上是有两个奇点的广义积分. 在将积分分拆为 $[-1,0]$, $[0,2]$ 和 $[2,3]$ 三个区间上的积分之后, 与前面的习题 2250 相似, 利用 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx=\arctan f(x)+C$, 这时仍然可以用牛顿–莱布尼茨公式来计算其中的每一个积分. $\square$

习题 2274 求积分 $\displaystyle\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

解 1 作代换 $t=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$, 即 $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$. 当 x 从 0 变到 3 时, t 从 0 变到 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 于是可计算如下:

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arcsin t\,d\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)$$
$$=\left(\frac{t^2}{1-t^2}\arcsin t\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$
$$=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\ \text{(这是对前一个积分作代换 } t=\sin\theta \text{ 的结果)}$$
$$=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2\theta-1)\,d\theta=\pi-(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.\quad\square$$

解 2 作代换 $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$, 则有 $x=\tan^2 t$. 当 x 从 0 到 3 时, t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{3}$. 于是可计算如下, 其中第一步用分部积分法:

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\,\mathrm{d}(\tan^2 t) = t\tan^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot 3 - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t = \pi - \tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}. \quad \square$$

4.2.5 对称性及其应用 (习题 2257–2259, 2263, 2265–2267, 2276)

我们将涉及对称性的一些积分题集中在这个小节.

这里所说的对称性是在较广的意义上来理解的, 即泛指在某种变换下保持的不变性 (参见名著 [33]). 例如, 偶函数就是其图像在关于 Oy 轴 (即直线 $x = 0$) 作反射时不变, 奇函数就是其图像在关于原点 O 旋转 180° 时不变, 周期函数就是其图像在 Ox 轴方向作周期长度的平移时不变. 这些不变性在积分计算中都很有用.

不仅如此, 有时还可以通过巧妙的换元手段创造对称性, 从而求出某些较难计算的定积分. 由于这些积分中的被积函数的原函数未必是初等函数, 因此难以通过计算不定积分和牛顿–莱布尼茨公式得到. 在这个意义上本小节突破了本节的标题的限制.

下一题是函数奇偶性的基本积分结果, 其证明从略 (其中连续条件可改为可积).

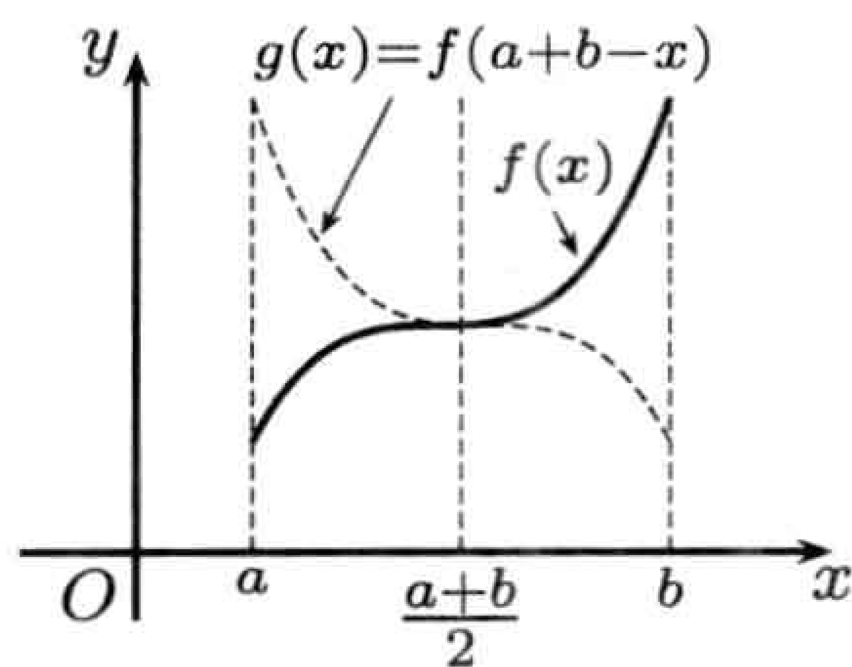
习题 2258 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-l,l]$ 上连续, 则 (1) 当函数 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x$; (2) 当函数 $f(x)$ 为奇函数时, $\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
给出这些事实的几何解释.

现在我们将以上的对称性作进一步推广, 这对于某些积分的计算是很有好处的.

首先可以注意到, 在区间 $[a,b]$ 上有定义的任意函数 $f(x)$, 如果将自变量换为 $a+b-x$ 之后的函数记为 $g(x) = f(a+b-x)$, 则如右图所示, 这两个函数的图像关于 (通过区间 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$ 的) 直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

这种对称性的分析表达为: 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 时成立

$$g(x) = f(a+b-x) = f\Big(\frac{a+b}{2} + \big(\frac{a+b}{2} - x\big)\Big).$$



$f(x)$ 与 $f(a+b-x)$ 的图像

在函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上可积时, 即可证明以下有明显几何意义的等式成立:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

为此只要对于右边的积分作代换 $t = a+b-x$, 并最后将 t 再记为 x 即可:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

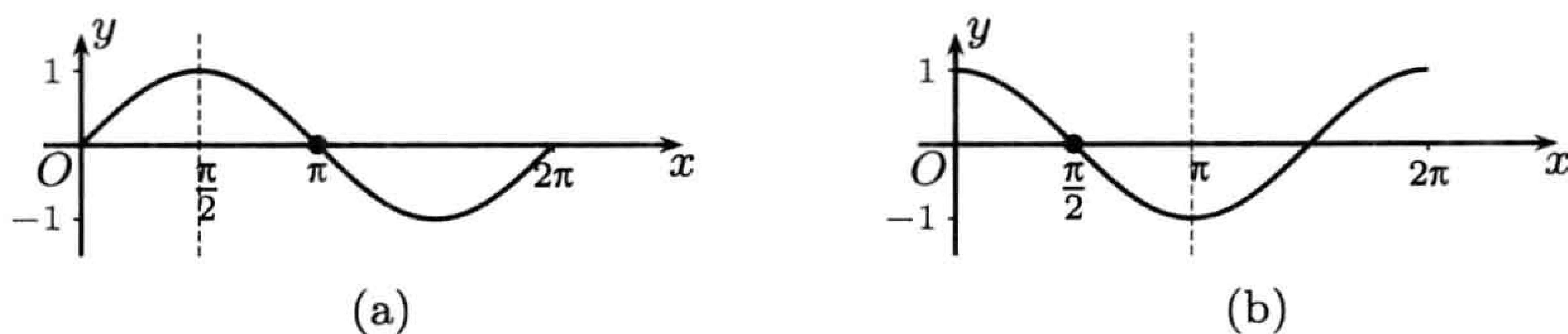
对于区间 $[0,a]$ 上的可积函数 $f(x)$ 则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

这个公式以及相应的代换 $t=a-x$ 是导出以下一系列结果的主要工具.

下面考虑在区间 $[0,a]$ 上的函数的两种新的对称性: (1) 关于区间中点 $\frac{a}{2}$ 的奇对称性, (2) 关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 的偶对称性.

例题 (参见下面的附图) (a) 正弦函数 $\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上关于其中点 $x=\pi$ 为奇函数, 而在区间 $[0,\pi]$ 上关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 为偶函数. (b) 余弦函数 $\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上关于直线 $x=\pi$ 为偶函数, 而在区间 $[0,\pi]$ 上关于其中点 $x=\frac{\pi}{2}$ 为奇函数.



区间 $[0,2\pi]$ 和 $[0,\pi]$ 上的两种对称性的例子

利用 (4.7) 就不难得到以下两个结果.

命题 4.8 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且关于区间中点 $\frac{a}{2}$ 为奇函数, 即对于 $x\in[0,a]$ 有 $f(x)=-f(a-x)$, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证 将 (4.7) 右边的被积函数用条件 $f(a-x)=-f(x)$ 代入即得. □

命题 4.9 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 为偶函数, 即对于 $x\in[0,a]$ 有 $f(x)=f(a-x)$, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 将 $[0,a]$ 上的积分拆为 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, 然后对右边第二个积分作代换 $x=a-t$, 并利用条件 $f(t)=f(a-t)$ 就得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad □$$

注 上述两个定理所利用的对称性在定积分计算中是常见的, 例如

$$\int_0^{\pi}\cos^3 x\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^{\pi}\cos^4 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x.$$

对于在 $[0,a]$ 上不一定具有上述两种对称性的可积函数, 可以用以下命题中的方法生成在 $[0,a]$ 上关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 的偶函数. 这对于某些积分的计算是有用的.

命题 4.10 设 f 在 $[0,a]$ 上可积, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}}[f(x)+f(a-x)]\,\mathrm{d}x. \tag{4.8}$$

证　由于 $g(x)=f(x)+f(a-x)$ 关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 为偶函数, 因此只要联合使用等式 (4.7) 和命题 4.9 即可得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_0^{\frac{a}{2}}[f(x)+f(a-x)]\,\mathrm{d}x.\quad\square$$

注　实际上命题 4.10 和公式 (4.8) 已经覆盖了前两个命题的结论. 此外, 当然还可以将 (4.8) 推广到更一般的 $[a,b]$ 区间上, 得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\,\mathrm{d}x.\qquad(4.8')$$

下面举这类问题中的一个常见例子.

例题　证明: 对任意实数 a 成立恒等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^a x}\equiv\frac{\pi}{4}.$$

证　易证两个积分相等, 因此只需计算第一个. 按公式 (4.8) 计算其被积函数得到

$$\frac{1}{1+\tan^a x}+\frac{1}{1+\tan^a(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1}{1+\tan^a x}+\frac{1}{1+\cot^a x}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^a x}+\frac{\tan^a x}{1+\tan^a x}=1,$$

它在 $[0,\pi/4]$ 上的积分就是 $\frac{\pi}{4}$. $\square$

习题 2257　证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 则

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$;　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

解　(a) 作代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 即有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 当 x 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 时, t 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 0. 于是有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

再将右边的积分变量改记为 x 即可.

(b) 作代换 $x=\pi-t$, 即有 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, 当 x 从 0 到 π 时, t 从 π 到 0. 于是有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

然后将右边的两个积分的积分变量改记为 x, 再将第二个积分移到左边, 两边除 2 即可得到所要的等式. $\square$

注　读者不难验证: (a) 是公式 (4.7) 的特例, (b) 是公式 (4.8) 的特例.

习题 2259　证明: 偶函数的原函数中有一个为奇函数, 而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

注　在第三章一开始的命题 3.1 的 (1),(2) 中已经证明了本题的结果, 其中只需要原函数和不定积分的基本概念.

解 若 $f(x)$ 在关于原点为对称的区间上连续, 则可以用定积分来写出其不定积分, 即有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

其中 C 为任意常数 (参见 §4.2.7 的习题 2302).

这时若 f 为奇函数, 即有 $f(-t) = -f(t)$, 则在上式右边的积分中作代换 $t = -\tau$, 即有 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\tau$, $f(-\tau) = -f(\tau)$, 而当 t 从 0 到 x 时, τ 从 0 到 $-x$. 于是有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{-x} [-f(-\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{-x} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

可见 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 以及加上任意常数后得到的所有原函数都是偶函数.

若 f 为偶函数, 即有 $f(-t) = f(t)$, 则在作同样的代换 $t = -\tau$ 之后, 就有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-x} f(-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_0^{-x} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

可见 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是奇函数. 然而这个奇函数加上任意非零常数后得到的其他原函数都不会是奇函数. 因此在原函数中只有唯一的一个是奇函数. □

下一个题中的积分是利用对称性的典型例子. 苏州大学的刘枫同志告诉编者, 利用 `Risch algorithm, http://en.wikipedia.org/wiki/Risch_algorithm`, 可以严格证明其被积函数的原函数不是初等函数.

习题 2263 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 作代换 $x = \pi - t$, 则有 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, 当 x 从 0 到 π 时, t 从 π 到 0. 于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t} \\
&= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\Big(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 直接用命题 4.10 的公式 (4.8), 则先计算

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x},$$

然后就有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \\
&= -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square
\end{aligned}$$

下面的习题 2265 和 2267 是与周期函数的积分有关的两个最基本的结果.

习题 2265 证明: 若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty < x < +\infty$ 上的周期为 T 的连续周期函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,$$

式中 a 为任意实数.

解 1 利用定积分关于区间的可加性写出

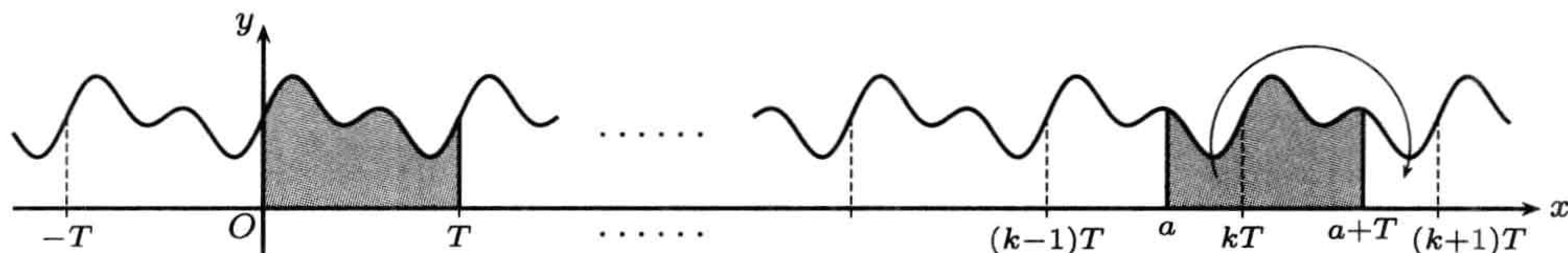
$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

然后对于右边第三个积分 $\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ 作代换 $x = t + T$, 则当 x 从 T 到 $a+T$ 时 t 从 0 到 a, 因此得到

$$\int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

代入前式即得. □

解 2 从几何图像上考虑, 对于积分区间 $[a, a+T]$, 存在整数 k, 使得 $a \leqslant kT < a+T$. 于是如附图所示, 只要将 $[a, kT]$ 上的曲边梯形“移动”到 $[a+T, (k+1)T]$ 上就可以得到 $[kT, (k+1)T]$ 上的曲边梯形, 它“显然”与 $[0, T]$ 上的曲边梯形是相同的.



习题 2265 的附图

以下将上述直观想法用分析语言写出. 先作分解

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{kT} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

然后对上式右边的第一个积分用换元法, 令 $t = x + T$, 则得到

$$\int_a^{kT} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{(k+1)T} f(t-T)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是得到

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

然后再在最后一个积分中令 $x - kT = t$, 就得到

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(t+kT)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中利用了周期条件 $f(t+kT) = f(t)$. □

解 3 以上两个证明中只需要 f 在任何有界区间上可积即可. 由于在本题中的 f 为连续函数, 因此还可以用对积分限求导的方法来证明.

定义 $F(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 a 为自变量. 由于 f 连续, 因此就有

$$F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0,$$

可见 $F(a)$ 关于 a 为常值函数. 这表明对任何 a 有 $F(a)=F(0)$, 而这就是:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

习题 2266 证明: 当 n 为奇数时, 函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n t\,\mathrm{d}t \text{ 和 } G(x)=\int_0^x \cos^n t\,\mathrm{d}t$$

为以 2π 为周期的周期函数; 而当 n 为偶数时, 其中的每一个皆为线性函数与周期函数之和.

提示 由于在下一个习题 2267 中将证明: 任何周期函数的积分可分解为线性函数与周期函数之和, 且若在此分解式中的线性函数的一次项系数为 0, 则就是周期函数, 因此本题只是它的特例. 不妨先做下一题后再来做本题. □

习题 2267 证明: 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续周期函数, 则函数

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在一般情况下是线性函数与周期为 T 的周期函数之和.

分析 (参见第三章开始的命题 3.1(3)) 若结论为真, 则存在分解式:

$$F(x)=cx+g(x),$$

其中 $g(x+T)=g(x)$. 于是就有

$$g(x+T)=F(x+T)-c(x+T)=g(x)=F(x)-cx,$$

这样即可求出

$$cT=F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中利用了习题 2265 的结论, 于是就求出了常数 c 为

$$c=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t. \quad \square$$

解 定义

$$g(x)=F(x)-cx=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t,$$

这时有

$$g(x+T)-g(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

其中再次利用了习题 2265 的结论. 这就证明了如此定义的 $g(x)$ 确实是周期为 T 的周期函数, 因此有分解式 $f(x)=cx+g(x)$. □

注 从证明过程还可以回答一个与本题有关的常见问题, 即周期为 T 的函数 $f(x)$ 的原函数在什么条件下一定是周期函数? 回顾证明, 即可知道这个条件就是 $c=0$, 即 $f(x)$ 在一个周期上的积分为 0. 例如, $\sin x$ 和 $\cos x$ 就是如此 (请与命题 3.1(3) 中的 c 的意义作比较).

习题 2276 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 1 在 §3.4.3 的习题 2035 已经求出了本题的被积函数的不定积分, 其中解 2 与解 3 的答案为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

然而上式右边的表达式并非 $\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的原函数, 因此需先用对称性将积分区间缩小后才能用牛顿–莱布尼茨公式. 三次用命题 4.9 后即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\\&=8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sqrt{2}\pi.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 利用

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x),\end{aligned}$$

即可求积如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}&=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x}\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{2+\tan^2 t}\\&=8\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}=4\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=2\sqrt{2}\pi.\quad\square\end{aligned}$$

4.2.6 含有参数 n 的定积分计算 (习题 2281–2300)

对于含有正整数参数 n (或 m,n 等) 的定积分计算, 一种常用方法是先导出递推公式 (§3.4.4 中的部分习题就是如此), 然后再作递推计算. 当然不通过递推而可直接计算的情况也是很多的.

这方面最有用的结果之一就是在习题 2281–2282 中的 $\sin^n x$ 和 $\cos^n x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的定积分计算. 由于在教科书中都有它们的推导, 这里只列出所得到的公式备用.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot I,\tag{4.9}$$

其中的常数 I 为

$$I=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\tag{4.10}$$

这个公式在今后的许多计算中都会用到, 因此需要记住. 例如, 读者若能记得这个公式, 即可直接写出以下几个等式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 (1 - \cos^2 x) \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{16}{35}.$$

习题 2283 利用递推公式计算含有正整数值的参数 n 的积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$.

解 利用三角恒等式 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 即可递推如下:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \, (\sec^2 x - 1) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n-1} \tan^{2n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

然后从 $I_0 = \frac{\pi}{4}$ 出发即可递推得到

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= (-1)^n \left\{ \frac{\pi}{4} - \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\right]\right\}. \quad \square$$

注 仿照后面 §4.3 的习题 2326.1(b), 不难证明本题的积分 I_n 当 $n \to \infty$ 时的极限为 0, 从而就得到著名的莱布尼茨级数 (又见 §5.5.3 的习题 2869 与 §5.6.1 的习题 2938):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

习题 2286 用递推公式计算含有正整数值的参数 n 的积分 $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx$.

解 用分部积分法得到

$$I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_{+0}^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} \, dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1},$$

然后从 $I_0 = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$ 出发即可递推得到

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \quad \square$$

注 本题的答案对于大于 -1 的任何实数 m 都对. 当 $m \leqslant -1$ 时, 从 §4.4 的广义积分理论可知积分发散.

在《习题集》中指出, 以下的积分计算可以利用欧拉公式在复数域中进行. (在本书前面已经有许多这方面的例子.) 在下面的题解中, 我们将根据哪一种方法更为有效来决定用什么解法.

用欧拉公式和直接计算即可验证下面的两个习题 2288–2289 的结论. 它们是今后计算的基础. 例如, 第二个习题表明, 对于指数函数 e^{kx} $(k \neq 0)$ 的计算公式

$$\int_a^b e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx}\Big|_a^b = \frac{1}{k}(e^{kb} - e^{ka})$$

在 k 为复数的情况仍然成立. 这里只列出这两个习题, 其证明从略.

习题 2288 利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, 证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{若 } m = n, \end{cases}$$

其中 m 和 n 为整数.

习题 2289 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta},$$

其中 α 和 β 为常数.

对于下面的习题 2290–2294, 《习题集》中提出利用欧拉公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

进行计算. 下面的题解则从更广泛的范围来选择方法.

习题 2290 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx$, 其中 n 和 m 为正整数.

解 经过尝试, 本题不用复方法可能更简单一点. 将积分记为 $I(m,n)$, 则可用分部积分法推导其递推公式如下:

$$\begin{aligned}
I(m,n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\cos^{2n-1} x\,d(\sin x) \\
&= \frac{1}{2m+1}\sin^{2m+1} x\cos^{2n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x\cos^{2n-2} x\,dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x(1-\cos^2 x)\cos^{2n-2} x\,dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1}[I(m,n-1) - I(m,n)] \\
&= \frac{2n-1}{2(m+n)}I(m,n-1).
\end{aligned}$$

再利用公式 (4.9) 即有 $I(m,0) = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, 于是就可递推得到

$$\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}\cdot I(m,0) \\
&= \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n}(m+n)!}\cdot\frac{\pi}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

对下一题先给出递推公式的解法, 然后介绍两种直接计算方法.

习题 2291 求 $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 记所求积分为 I_n, 用三角恒等式即可导出递推公式如下 (其中设 $n>2$):

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin(n-1)x\cos x + \cos(n-1)x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{[\sin(n-2)x\cos x + \cos(n-2)x\sin x]\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{(1-\sin^2 x)\sin(n-2)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(n-2)x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= I_{n-2} + \int_0^\pi [\cos(n-2)x\cos x - \sin(n-2)x\sin x]\,\mathrm{d}x \\
&= I_{n-2} + \int_0^\pi \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x = I_{n-2}.
\end{aligned}$$

由 $I_1=\pi$ 和 $I_2=0$ 开始作递推即可得到 $I_{2k+1}=\pi$ 和 $I_{2k}=0$. □

解 2 记所求积分为 I_n. 用欧拉公式, 则有

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-3)x} + \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-3)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}. \tag{4.11}$$

然后分别讨论 n 为奇数和偶数的情况.

当 $n=2k+1$ 时, 在 (4.11) 右边有奇数项, 在各项的指数中, $n-1, n-3, \cdots, -(n-3), -(n-1)$ 都是偶数, 在正中间一项的指数等于 0. 除了这一项在 $[0,\pi]$ 上的积分为 π 之外, 将其中的第 j 项与倒数第 j 项相加, 并再次用欧拉公式, 这样就在 $j=1,2,\cdots,k$ 均有

$$\int_0^\pi [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2j)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2j)x}]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi \cos 2jx\,\mathrm{d}x = 0,$$

可见 $I_{2k+1}=\pi$.

当 $n=2k$ 时, 采取相同的方法得到的 k 个积分也都等于 0, 只是这时在 (4.11) 右边只有偶数项, 每项的指数为奇数, 因此可用相同方法得到 $I_{2k}=0$. □

解 3 (概要) 利用三角函数的积化和差公式, 即可分别得到如下的恒等式 (这里可参考 §2.1.4 的习题 1024(b) 中的计算方法):

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = 1 + 2(\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2kx),$$

$$\frac{\sin(2k)x}{\sin x} = 2[\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2k-1)x],$$

然后在 $[0,\pi]$ 上积分即可得到与解 1 相同的答案. □

注 在区间 $[0,\pi]$ 上有

$$\frac{\sin n(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} = (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{\sin x},$$

因此当 $n=2k$ 时, 被积函数 $\frac{\sin nx}{\sin x}$ 关于区间中点 $\frac{\pi}{2}$ 为奇函数. 利用 §4.2.5 中关于对称性的命题 4.8 即可知其积分 $I_{2k}=0$.

习题 2292 求 $\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 记所求积分为 I_n. 习题 2291 的三个解法都可以用于此题. 例如用其中的解 1 即可得到递推公式 $I_n = -I_{n-1}$. 因有 $I_0 = \pi$, 即得 $I_n = (-1)^n\pi$. 当然除了这三种解法之外也还有分部积分法等可用. □

习题 2293 求 $\int_0^\pi \cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$.

解 1 记所求的积分为 I_n, 用分部积分法计算如下:

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\cos^n x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin nx\cdot\cos^{n-1}x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \cos^{n-1}x\,(\sin nx\sin x + \cos nx\cos x)\,\mathrm{d}x - I_n \\
&= \int_0^\pi \cos^{n-1}x\cos(n-1)x\,\mathrm{d}x - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1},
\end{aligned}$$

再利用 $I_0 = \pi$, 可见就有 $I_n = \frac{\pi}{2^n}$. □

解 2 记所求的积分为 I_n, 引入复积分

$$U_n = \int_0^\pi \cos^n x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,$$

则 I_n 是 U_n 的实部. 利用分部积分法就有

$$\begin{aligned}
I_n = \mathrm{Re}(U_n) &= \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\cos^n x\Big|_0^\pi + \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\cos^{n-1}x\sin x\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\int_0^\pi \cos^{n-1}x[\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}(\cos x - \mathrm{i}\sin x) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\cos x]\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \mathrm{Re}(U_{n-1} - U_n) = I_{n-1} - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1},
\end{aligned}$$

以下与解 1 相同. □

习题 2294 求 $\int_0^\pi \sin^n x\sin nx\,\mathrm{d}x$.

提示 记所求积分为 I_n. 当 $n=1$ 时有 $I_1 = \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. 对于 $n \geqslant 2$, 用习题 2293 的两个方法都可得到递推公式 $I_n = -\frac{1}{4}I_{n-2}$. □

习题 2295 求 $\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解 1 从 $\sin^{n+1}x\cos(n+1)x$ 的积分开始作两次分部积分, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^{n+1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\sin^{n+1}x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^n x\cos x\sin(n+1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos(n+1)x}{n+1}\sin^n x\cos x\Big|_0^\pi - \frac{1}{n+1}\int_0^\pi \cos(n+1)x(n\sin^{n-1}x\cos^2 x - \sin^{n+1}x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1}\int_0^\pi \cos(n+1)x[n\sin^{n-1}x(1-\sin^2 x) - \sin^{n+1}x]\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{n+1}\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \sin^{n+1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

可见本题的积分为 0. □

解 2 [13] 本题可直接求积如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\,(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sin^n x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}(\cos nx)\\ &\quad -\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$ □

解 3 [6] 也可以从

$$\begin{aligned}(\sin^n x\cos nx)' &= n\sin^{n-1}x\cos nx\cos x-n\sin^n x\sin nx\\ &= n\sin^{n-1}x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)\\ &= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x,\end{aligned}$$

即可得到

$$\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sin^n x\cos nx\Big|_0^{\pi}=0.$$ □

习题 2296 求 $\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

提示 习题 2295 的前两个解法在这里都有效. 此外, 还可证明本题的被积函数在 $[0,\pi]$ 上关于其中点 $\frac{\pi}{2}$ 为奇函数, 因此可直接用 §4.2.5 中关于对称性的命题 4.8 得到其积分为 0 (参见习题 2291 的注). □

习题 2297 求 $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解 记所求积分为 I_n, 则不难用分部积分求出递推公式, 然而这个公式比较复杂, 用它进行递推计算似不方便, 还不如像习题 2291 的解 2 或解 3 那样直接积分为好.

用欧拉公式可将 $\cos^{2n}x$ 化为倍角函数之和如下:

$$\begin{aligned}\cos^{2n}x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\Big[\mathrm{C}_{2n}^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}2nx}+\mathrm{C}_{2n}^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2)x}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^n\\ &\qquad +\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2)x}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2nx}\Big]\\ &= \frac{1}{2^{2n}}\left[\mathrm{C}_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\cos 2(n-k)x\right],\end{aligned}$$

然后乘以 e^{-ax} 在 $[0,2\pi]$ 上积分. 这时可以利用 §3.1.6 的习题 1828 的结果, 即公式

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C,$$

或者直接用分部积分法计算定积分, 就可以得到

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos 2(n-k)x\,\mathrm{d}x=\frac{a(1-\mathrm{e}^{-2\pi a})}{a^2+4(n-k)^2}.$$

于是答案为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}{2^{2n}}\left[\frac{1}{a}\mathrm{C}_{2n}^n+2a\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{2n}^k\frac{1}{a^2+4(n-k)^2}\right].$$ □

习题 2298 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\cos 2nx\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

提示 将被积表达式写为 $\ln\cos x\,\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin 2nx}{2n}\right)$ 之后分部积分, 对积分号外的项用洛必达法则计算, 对余下的积分则可归结为习题 2292 中的积分. 该题的积分区间虽然是 $[0,\pi]$, 但其被积函数关于区间中点 $\dfrac{\pi}{2}$ 为偶函数, 因此也就提供了本题的答案. □

习题 2299 (欧拉积分) 多次利用分部积分法, 计算

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

其中 m 和 n 为正整数.

提示 本题的答案为 $\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, 用分部积分法计算没有困难. 这里要指出, 这个欧拉积分也称为贝塔函数, 是用含参变量积分定义的重要的特殊函数. 与它有关的习题见《习题集》的 §7.4, 其标题就是欧拉积分. 只是那里的二元函数 $B(x,y)$ 的定义域为 $x>-1, y>-1$, 而本题只是对于 x, y 为正整数的情况进行计算.

习题 2300 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由以下公式定义:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\ \ (n=0,1,2,\cdots),$$

证明:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & 若\ m=n.\end{cases}$$

证 对于 $m\neq n$, 不妨设 $m<n$, 且不必考虑在定义中的常数因子. 这样就有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left\{[(x^2-1)^n]^{(n)}\cdot[(x^2-1)^m]^{(m)}\right\}\mathrm{d}x&=\left\{[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\cdot[(x^2-1)^m]^{(m)}\right\}\Big|_{-1}^1\\&\quad-\int_{-1}^1\left\{[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\cdot[(x^2-1)^m]^{(m+1)}\right\}\mathrm{d}x\\&=-\int_{-1}^1\left\{[(x^2-1)^n]^{(n-1)}\cdot[(x^2-1)^m]^{(m+1)}\right\}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

可见在 $m+1$ 次分部积分后就有 $[(x^2-1)^m]^{(2m+1)}\equiv 0$, 而由于 $n>m$, 利用 $(x^2-1)^n$ 有 n 重零点 -1 和 1, 因此在积分号外的项总是等于 0 的.

对于 $m=n$, 可以如上面那样先作 n 次分部积分, 利用 $[(x^2-1)^n]^{(2n)}=(2n)!$, 然后再用代换 $x=\sin t$, 并利用公式 (4.9), 即可积分如下:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_n^2(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\cdot(2n)!\int_{-1}^1(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot 2\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$ □

注 这里指出本题的意义. 它表明, 将函数 $f(x), g(x)$ 的积分 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$ 作为两个函数正交的定义时, 勒让德多项式构成在区间 $[-1,1]$ 上的函数空间中的一个正交系. 此外, 还可见 $P_n(x)$ 与所有 $m<n$ 的 m 次多项式正交.

4.2.7 有界不连续函数的积分计算 (习题 2301–2315)

为此首先要推广原函数和牛顿–莱布尼茨公式的适用范围.

习题 2301 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内除了有限个内点 c_i $(i=1,2,\cdots,p)$ 及点 a 与 b 为皆满足等式 $F'(x)=f(x)$, 而这些点是 $F(x)$ 的第一类不连续点 (广义原函数). 证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

解 不妨设 $a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$, 且记 $a=c_0$, $b=c_{p+1}$, 则由定积分关于区间的可加性, 就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{p}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据定积分关于积分限的连续性定理 (见 §4.2.3 的命题 4.5(1)), 对上式右边和式内的每个积分, 即对 $i=0,1,\cdots,p$ 有

$$\begin{aligned}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\eta\to+0}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\eta\to+0}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]=F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0),\end{aligned}$$

其中用到在 $\eta>0$ 充分小时, $F'(x)=f(x)$ 在区间 $[c_i+\eta,c_{i+1}-\eta]$ 上成立, 且 $F(x)$ 在每个点 c_i 处存在两个单侧极限的条件.

合并以上结果, 就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{p}\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]\\ &= \sum_{i=1}^{p+1}F(c_i-0)-\sum_{i=0}^{p}F(c_i+0)\\ &= F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)]. \quad \square\end{aligned}$$

注 由此可见, 为了能够在区间 $[a,b]$ 上使用广义的牛顿–莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a+0),$$

我们要求 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 否则就需要加入与内点 c_i 有关项的计算.

习题 2302 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 而

$$F(x)=C+\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分. 证明: 函数 $F(x)$ 连续, 且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处成立等式

$$F'(x)=f(x).$$

问在函数 $f(x)$ 的不连续点处函数 $F(x)$ 的导数是什么?

研究例子:

(a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1\ (n = \pm1, \pm2, \cdots)$, 当 $x \neq \dfrac{1}{n}$ 时 $f(x) = 0$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 要证明的两点已在前面写成为 §4.2.3 的命题 4.5 的 (1) 和 (2). 由于在微积分的每本教科书中都有它们的证明, 这里从略.

关于 $F(x)$ 在函数 $f(x)$ 的不连续点的可导情况, 可以先看 x_0 是 $f(x)$ 的第一类不连续点的情况. 根据区间上的导函数不可能有第一类不连续点的定理 (见 §2.6.5 中的命题 2.2), 因此在点 x_0 处不可能成立 $F'(x_0) = f(x_0)$.

下面观察题中提供的例子 (a) 和 (b).

例子 (a) 中的函数 $f(x)$ 除去可列个点之外都等于 0, 因此任取区间 $[a, b]$ 都只能得到 $F(x) \equiv C$. 这时在点 $1/n$ 处, $F'(1/n) = 0$, 然而 $f(1/n) = 1$. 由于点 $1/n$ 都是第一类不连续点, 因此这与上面的分析是一致的.

还可看出, 这些点 $1/n$ 都是可去不连续点, 因此只要重新定义 f 在这些点上的值为 0, 就恢复了 f 的连续性. 这也表明, 当 x_0 是 f 的可去不连续点时, $F'(x_0)$ 总是存在的.

然而例子 (a) 中的 $x = 0$ 是第二类不连续点, 这时却有 $F'(0) = f(0) = 0$, 这表明在第二类不连续点处 F' 与 f 的值可以相等 (当然也可以不相等).

例子 (b) 则反映了第一类不连续点的另一种可能性. 容易看到有 $F(x) = |x| + C$, 这时在 $x = 0$ 处 F 不可导. □

习题 2302 的公式表明, 可以用定积分写出广义原函数与不定积分. 下面的习题 2303–2308 就是这方面的计算题. 举一个例子.

习题 2304 求不定积分 $\displaystyle\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

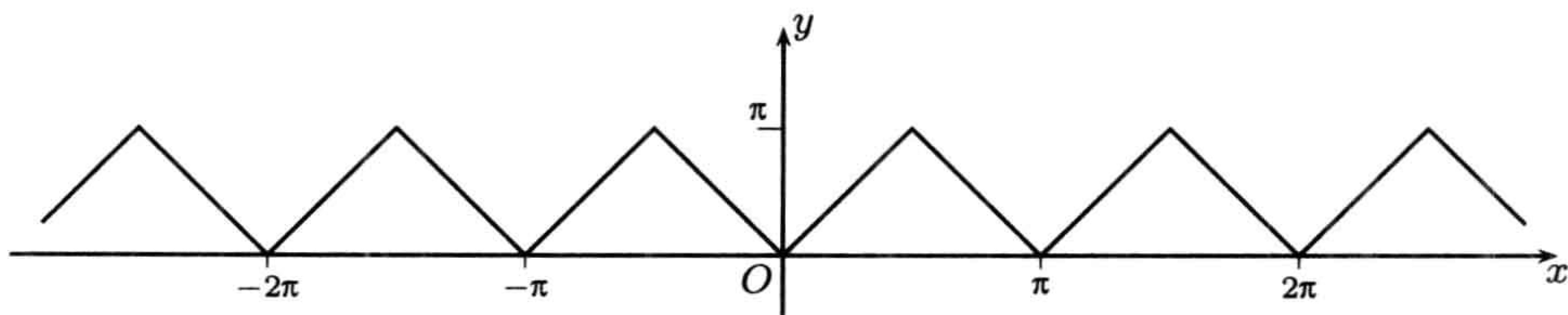
解 由于被积函数是奇函数, 因此其原函数都是偶函数 (见 §4.2.5 的习题 2259 和第三章开始的命题 3.1). 又因被积函数是周期 2π 的周期函数, 且在一个周期长的区间 (例如 $[-\pi, \pi]$) 上的积分为 0, 因此原函数也是有周期 2π 的周期函数 (见 §4.2.5 的习题 2267). 于是只要求出在 $[0, \pi]$ 上的原函数表达式, 然后偶延拓到 $[-\pi, 0]$, 再以周期 2π 延拓到整个实数范围即可.

在 $[0, \pi]$ 上用定积分计算得到

$$F(x) = C + \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin x)\,\mathrm{d}x = C + x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

于是在 $[-\pi, \pi]$ 上的不定积分为 $|x| + C$, 而对每个整数 k, 在 $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ 上的表达式为 $|x - 2k\pi| + C$. 在下面的附图中作出了 $C = 0$ 的原函数的图像. □

注 上述原函数可以有多种表达式. 例如, $\arccos(\cos x) + C$ 就是一个不错的选择 (参见第一册附录一的习题 320 和 §1.8.2 的习题 770 的注). 若定义 (x) 是数 x 到与它最接近的整数的距离, 则也可以用 $(x/\pi) + C$ 来表示这样的不定积分 (参见第一册附录一的习题 362(e) 的图像).



习题 2304 的附图

习题 2309–2315 是定积分的计算题. 在这些习题中的不连续性多数是由于在函数的复合运算中出现了符号函数 sgn(x) 和取最大整数函数 [x] 而引起的, 一般只要分段求积即可. 这方面只举一个例子, 其中的被积函数在积分区间内有无限多个不连续点, 从而需要通过对积分限取极限才能得到最后的结果.

习题 2314 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,\mathrm{d}x$.

解 由于在 $[0,1]$ 上 $\sin(\ln x)$ 的零点都是被积函数的不连续点, 因此就知道存在无限多个不连续点 $x_n = \mathrm{e}^{-k\pi}$, $k=0,1,2,\cdots$. 此外, 作为它们的聚点, $x=0$ 也是一个不连续点. 参照习题 2194 中的函数 $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$, $x\in[0,1]$, 即可证明本题的被积函数可积.

于是根据命题 4.5(1) (或者习题 2302), 即定积分是变动积分限的连续函数, 因此可以通过下列极限来计算所要求的积分:

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathrm{e}^{-k\pi}}^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\int_{\mathrm{e}^{-\pi}}^1 (-1)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}^{-2\pi}}^{\mathrm{e}^{-\pi}}\mathrm{d}x + \cdots + \int_{\mathrm{e}^{-k\pi}}^{\mathrm{e}^{-(k-1)\pi}} (-1)^k\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[-(1-\mathrm{e}^{-\pi}) + (\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}) + \cdots + (-1)^k(\mathrm{e}^{-(k-1)\pi}-\mathrm{e}^{-k\pi})\right]$$

$$= (1-\mathrm{e}^{-\pi})\lim_{k\to\infty}\left[-1+\mathrm{e}^{-\pi}+\cdots+(-1)^k\mathrm{e}^{-(k-1)\pi}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}-1}{\mathrm{e}^{-\pi}+1}. \quad \square$$

§4.3 中值定理 (习题 2316–2333)

内容简介 本节主要学习两个积分中值定理在积分估计和极限计算等方面的应用.

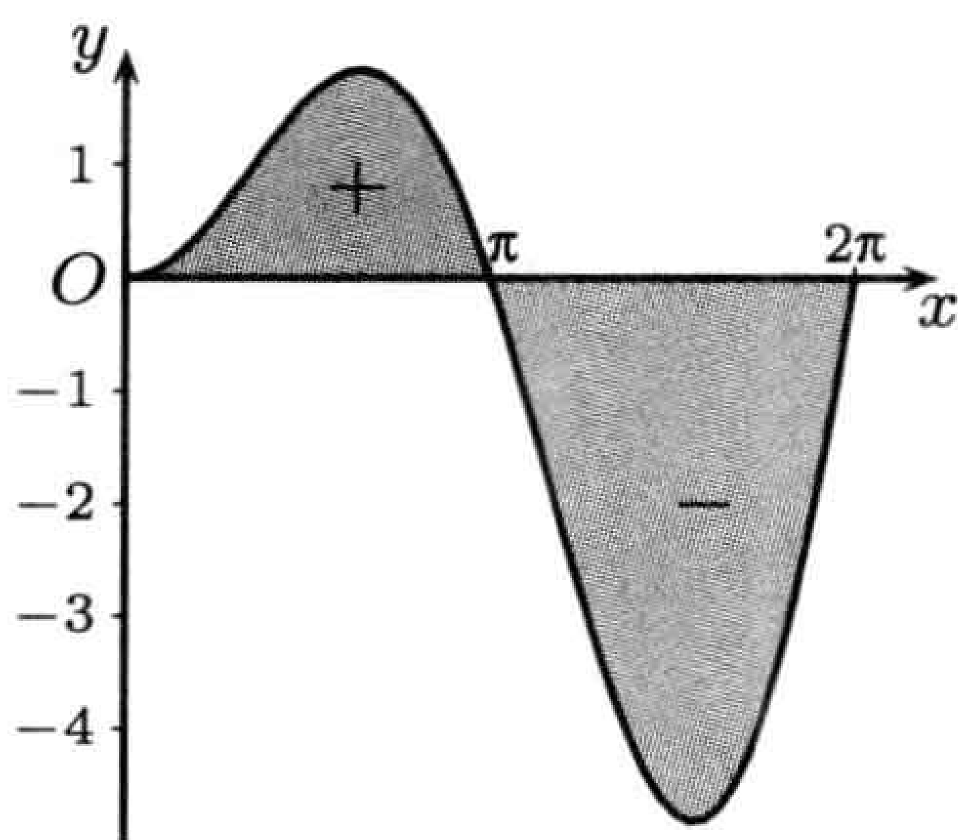
习题 2316 (a) 确定积分 $\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ 的符号.

解 1 考虑到附图中被积函数的图像, 即可看出本题的积分值小于 0, 且提示我们将积分分拆如下:

$$I=\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

然后在第二个积分中作平移代换 $x=t+\pi$, 并在代换后将 t 改记为 x, 这样就得到

$$I=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}(x+\pi)\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$=-\pi\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x<0.\quad\square$$



习题 2316(a) 的附图

注 本题的积分很容易直接计算出来, 而不必作估计. 因此我们提出这样的问题, 即从方法论的角度来看, 若将被积函数中的 x 换为严格单调递增函数 $f(x)$, 则相应的积分是否还是小于 0? 下面将看到, 将解 1 中的方法作推广, 或者利用两个中值定理, 都可以证明这个问题的答案是肯定的①.

解 2 设 $f(x)$ 于区间 $[0,2\pi]$ 上严格单调递增, 则利用解 1 的方法可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} f(x+\pi)\sin(x+\pi)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}[f(x)-f(x+\pi)]\sin x\,\mathrm{d}x<0,\end{aligned}$$

这里最后利用了被积函数处处为负, 因此积分必定小于 0 (参见 §4.1.4 的习题 2205). $\square$

解 3 在 $f(x)$ 于区间 $[0,2\pi]$ 上严格单调递增且连续时, 利用积分分拆和积分第一中值定理即可估计如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\&=f(c_1)\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+f(c_2)\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=[f(c_1)-f(c_2)]\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x<0,\end{aligned}$$

其中利用了 $\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 和 $[\pi,2\pi]$ 上分别保号, 从而可以两次使用积分第一中值定理得到 $c_1\in(0,\pi)$ 和 $c_2\in(\pi,2\pi)$. 由于 f 严格单调递增, 可见 $f(c_1)<f(c_2)$. $\square$

① 在解 3 和解 4 中都需要用到"中值"的内点性. 在积分第一中值定理中, 在 f 连续和 φ 保号的条件下可以保证 $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 中的"中值" c 为区间 $[a,b]$ 的内点, 即有 $a<c<b$. 读者可以参看 [34] 的例题 10.2.2 及其注. 类似的讨论还见 [32, 35] 等参考书. 此外, 对于积分第二中值定理的 ξ 的内点性也有类似的讨论, 见 [35].

解 4 在 $f(x)$ 于区间 $[0,2\pi]$ 上严格单调递增且非负时, 利用积分第二中值定理有 $\xi\in(0,2\pi)$ (见上页的底注), 使得成立

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= f(2\pi-0)\int_\xi^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= f(2\pi-0)\cdot(-\cos x)\Big|_\xi^{2\pi}\\ &= -f(2\pi-0)(1-\cos\xi)<0.\quad\square\end{aligned}$$

习题 2321 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

研究例子 $f(x)=\arctan x$.

分析 本题可以参考 §4.2.3 的习题 2233(d) 的解 1. 如该处所示, 在这里应用关于 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式的洛必达法则 (即 §2.9.4 的命题 2.10) 是合适的.

另一个方法是利用 §1.5.7 之 3 中的习题 608(a), 于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

余下的是只要证明右边的极限存在且等于 A. 这样就可以模仿习题 2233(d) 的解 2 来解决这里的问题. $\square$

习题 2323–2325 是用积分第一中值定理对积分的估计, 下面看其中第三题.

习题 2325 利用第一中值定理估计积分 $\displaystyle\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x$.

解 1 积分第一中值定理的关键条件是在被积函数 $f(x)\varphi(x)$ 的两个因子中有一个保号. 本题的 e^{-x} 和 $\dfrac{1}{x+100}$ 在积分区间 $[0,100]$ 上都是保号的, 因此至少可以有两种方式来应用第一中值定理. 经比较后可知下面的方式所得到的估计比较准确一些.

这时有 $c\in(0,100)$, 使得成立

$$\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{c+100}\int_0^{100}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{c+100}(1-\mathrm{e}^{-100}).$$

由于 $\mathrm{e}^{-100}\approx 3.7\times10^{-44}$ 非常小, 若忽略不计, 则就从 $0<c<100$ 得到估计

$$0.005<\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x<0.01.\quad\square$$

解 2 在解 1 中得到的估计值的上界和下界之比为 2: 1. 其实若再结合分部积分等方法, 就可以得到更精确的估计 (参见 [34] 的 §11.3).

如下在分部积分后再用第一中值定理, 则就有 $c\in(0,100)$, 使得成立

$$\begin{aligned}\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x &= \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\Big|_0^{100}-\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(x+100)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2-\mathrm{e}^{-100}}{200}-\frac{1}{(c+100)^2}(1-\mathrm{e}^{-100}).\end{aligned}$$

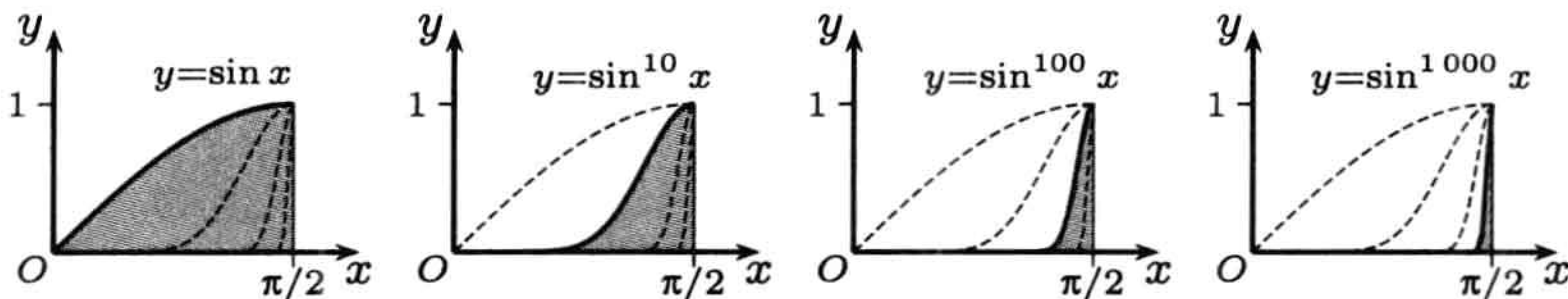
因此就可得到估计

$$0.009\,900 < \int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x < 0.009\,975.$$

用 Mathematica 软件容易计算出这个积分的近似值为 0.009 901 94, 可见上述估计已相当准确. (这样的方法还可继续下去, 参见 §5.8.3 的习题 3050.) □

习题 2326.1(b) 证明等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0.$

分析 这是数列极限问题, 只是数列的每一项是一个定积分. 在附图的 4 幅分图中, 分别用粗黑曲线作出了 $n = 1, 10, 100, 1\,000$ 的 $y = \sin^n x$ 的图像 (同时用虚线描出其他三条曲线), 其下填以灰色的曲边三角形的面积就是定积分 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$. 由此可见, 对任何点 $x \in [0, \pi/2)$, 都有 $\sin^n x \to 0$ $(n \to \infty)$, 但固定 n 时 (不论 n 多大), 在点 $\pi/2$ 的左侧邻近, $\sin^n x$ 总有接近于 1 的值. 于是可用"分而治之"的方法来解决问题. □



习题 2326.1(b) 的附图

解 1 对给定的 $\varepsilon > 0$ (不妨设已有 $\varepsilon < 1$), 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 然后对积分估计如下:

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\Big(\frac{\pi}{2} - \delta\Big) + \delta \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\cos^n \delta + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

利用 $0 < \cos\delta < 1$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $0 < \frac{\pi}{2}\cos^n\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, 这样就证明了数列 $\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x\right\}$ 的极限为 0. □

解 2 能否用第一中值定理给出证明? 若直接用

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \sin^n \xi_n \cdot \frac{\pi}{2},$$

则即使利用中值 ξ_n 的内点性 (见 161 页的底注), 由于 ξ_n 可任意接近于 $\pi/2$, 因此 $\sin\xi_n$ 可任意接近于 1, 从而不能肯定上式的极限为 0.

关键是要使所有 ξ_n 离开点 $\pi/2$ 一个确定 (然而可以很小) 的距离. 如果先作解 1 那样的积分分拆, 然后对 $[0, \pi/2 - \delta]$ 上的积分用第一中值定理, 则在本质上与解 1 没有区别. 以下从略. □

解 3 采用与 n 有关的积分分拆方法. 设数列 $\{\varepsilon_n\}$ 的每一项都属于 $(0, 1)$, 且有 $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 则有分拆

$$
\begin{aligned}
0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n} \sin^n x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \sin^n(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n) + \varepsilon_n \\
&= \frac{\pi}{2} \cos^n \varepsilon_n + \varepsilon_n.
\end{aligned}
$$

于是当 $n \to \infty$ 时上式的第 2 项是无穷小量, 而第一项则是 $\frac{\pi}{2}$ 乘以 1^∞ 型的不定式. 问题在于选择适当的 ε_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得第一项也是无穷小量.

写出

$$\cos^n \varepsilon_n = [1 + (\cos \varepsilon_n - 1)]^n = [1 + (\cos \varepsilon_n - 1)]^{\frac{1}{\cos \varepsilon_n - 1} \cdot [n(\cos \varepsilon_n - 1)]},$$

并利用 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ $(x \to 0)$ (见 §1.5.5 的 (1.32)), 可见只要使得

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \varepsilon_n^2 = +\infty$$

即可. 若取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n^\alpha}$, 则只要令 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. 例如, 取 $\varepsilon_n = 1/\sqrt[3]{n}$ (见 [25] 的例 7.7). □

解 4 在习题 2281 中已经求出积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ 的表达式 (见 §4.2.6 的 (4.9)), 因此本题相当于证明数列 $x_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是无穷小量.

若已经学过沃利斯公式 (见 §5.1.3 的命题 5.1), 则就有

$$x_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n \to \infty),$$

因此这是显然的.

若不用对现阶段来说较深的这个公式, 则可以分别证明 $\{x_n\}$ 的偶数项子列 $\{x_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{x_{2n-1}\}$ 都是无穷小量. 对于 $\{x_{2n}\}$, 在 §1.1.1 的习题 9(b) 中已经有不等式 $x_{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 从而有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = 0$ (即《习题集》的习题 68). 仿照习题 9(b) 的结论及其证明 (参见该题在 §1.1.1 中的解 1 和在 §1.1.6 之 2 中的解 2 和 解 3), 就可以建立不等式 $x_{2n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, 因此就得到 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n-1} = 0$. □

习题 2328 利用积分第二中值定理估计积分 $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

提示 利用 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[100\pi, 200\pi]$ 上单调递减且非负, 即可用第二中值定理得到所要的估计. 此外, 本题与前面的习题 2325 相似, 如果同时使用分部积分法, 则可以得到越来越精确的估计 (参见 §5.8.3 的一般性讨论). □

习题 2331 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积, 证明柯西–布尼亚科夫斯基不等式①

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx \right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \int_a^b \psi^2(x) \, dx.$$

① 在英文文献中这个不等式经常称为施瓦茨不等式. 它对于 §4.4 的广义积分也成立. 此外, 对常义积分来说, 可积即保证了平方可积, 因此题设中的平方可积条件可以去掉.

注 这是积分学中最为基本的不等式, 它同时是 §2.7.2 的习题 1293 的柯西不等式在连续情况的推广. 对于这类推广的证明一般至少有两条途径. 第一种是以离散情况的已知不等式为基础来推出连续情况的对应的不等式, 第二种是将离散情况时的证明方法移植到连续情况中. 如第一册 §1.2.6 中所说, 将它们分别称为归结法和模仿法.

解 1 (归结法) 任取区间 $[a,b]$ 的一个分划和与之相容的介点集, 然后对黎曼和的平方用离散情况写出柯西不等式如下:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\psi(\xi_k)\,\Delta x_k\Big)^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}(\varphi(\xi_k)\sqrt{\Delta x_k}\,)\cdot(\psi(\xi_k)\sqrt{\Delta x_k}\,)\Big)^2$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varphi^2(\xi_k)\,\Delta x_k\sum_{k=1}^{n}\psi^2(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

由于 $\varphi(x)\psi(x),\varphi^2(x)$ 和 $\psi^2(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 令分划的细度 $\|P\|\to 0$, 就得到所要的积分不等式. □

解 2 (模仿法一) 下面模仿习题 1293 的解 1.

对于任意实数 λ, 在区间 $[a,b]$ 上函数 $[\lambda\varphi(x)+\psi(x)]^2$ 非负, 因此有

$$\int_a^b[\lambda\varphi(x)+\psi(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

将上式展开为关于变量 λ 的二次三项式:

$$\lambda^2\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\psi^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

若 $\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x>0$, 则利用二次三项式非负时的判别式非正, 就得到所要的积分不等式.

若 $\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则从 §4.1.4 的习题 2205 知道, $\varphi(x)$ 在其所有连续点上均等于 0. 由于从该题的证明知道可积函数的连续点稠密, 因此即可推出积分 $\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x=0$, 从而所要证明的不等式以等式成立. □

解 3 (模仿法二) 模仿习题 1293 的解 2, 先写出下列自然成立的不等式

$$[\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi(x)]^2\geqslant 0,$$

其中的变量 x,y 都取自区间 $[a,b]$. 将 y 看成为参数, 将 x 看成为自变量, 并将上述不等式对于 x 从 a 积分到 b, 就得到

$$\psi^2(y)\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x-2\varphi(y)\psi(y)\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x+\varphi^2(y)\int_a^b\psi^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

然后将这个以 y 为变量的不等式, 对 y 从 a 积分到 b, 并将定积分中的积分变量统一改用 x, 这样就有

$$\int_a^b\psi^2(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x-2\int_a^b\varphi(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\varphi^2(y)\,\mathrm{d}y\int_a^b\psi^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_a^b\psi^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x-2\Big(\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2\geqslant 0.$$

最后加以整理就可得到所要的不等式. □

习题 2333 证明等式:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0\ \ (p>0).$$

解 如果将 p 看成为一个固定的数, 从估计式

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{p}{n}$$

就知道结论成立. □

注 联系到下一节的广义积分, 本题的结论可以加强为证明这个极限等式关于所有的 $p>0$ 一致.

利用积分第二中值定理, 由于 $\frac{1}{x}$ 在 $[n,n+p]$ 上严格单调递减, 因此存在 $\theta\in(0,1)$, 使得成立

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_n^{n+\theta p}\sin x\,\mathrm{d}x,$$

因此就可以得到与 p 无关的估计:

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}\left|(-\cos x)\Big|_n^{n+\theta p}\right|\leqslant\frac{2}{n},$$

可见本题的极限等式确实是关于所有的 $p>0$ 一致的.

将积分限中的 n 换为任意正实数时上述证明仍然有效, 因此根据函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的柯西收敛准则 (参见 §1.2.5 关于数列极限的柯西收敛准则), 由上述解答中关于 $p>0$ 一致收敛的结论, 可知存在极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

于是按照广义积分的定义, 我们就将上述极限定义为积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (参见 §4.4.2 的习题 2378). 关于这个广义积分的计算见 §5.4.5 的例题 3.

§4.4 广义积分 (习题 2334–2395)

内容简介 本节的习题主要是广义积分的计算和敛散性判别, 此外还有少量理论性的习题和柯西主值计算. 广义积分即反常积分①. 与之对照, 本章前面定义的定积分也称为常义积分. 由定积分的定义可知, 其积分区间必须是有界的 (即有限的), 同时被积函数在积分区间上也必须有界②. 广义积分即是对于这两个限制的突破. 为了方便起见, 经常考虑最为简单的两类广义积分, 即积分区间无界和在有界区间上被积函数无界的两类广义积分. 其他的广义积分一般可以分解为有限个上述两类广义积分之和.

为方便起见, 将广义积分中的 $\pm\infty$ 和被积函数局部无界的点均称为奇点.

4.4.1 广义积分的计算 (习题 2334–2357)

广义积分的定义是通过对积分限取极限而得到的. 因此在被积函数的原函数能够求出的情况下, 就可以按照定义来计算广义积分. 如果极限存在 (为有限数), 则按照定义就知道广义积分收敛. 因此对于这样的情况不需要另行讨论该广义积分的敛散性.

本小节即是从简单到复杂的广义积分的计算题. 此外, 最后还有两个与洛必达法则有关的极限计算题.

习题 2339 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

解 1 利用 §3.2.3 的习题 1921 的递推公式, 就有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

然后根据广义积分的定义就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{b'\to-\infty}\int_{b'}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ b'\to-\infty}}\int_{b'}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ b'\to-\infty}}\left[\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]\bigg|_{b'}^{b}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.\quad\square$$

解 2 和定积分一样, 对广义积分也可以用换元法和分部积分法. 于是可以通过几次换元法求积如下:

① 按全国科学技术名词审定委员会公布的《数学名词》, 应称为反常积分, 这也是我国现在多数数学教材中的称谓. 但因吉米多维奇《习题集》中译本使用了"广义积分"一词, 本书将沿用这一称谓.

② 若 $f(x)$ 在有界区间 $[a,b]$ 上无界, 则在组成黎曼和时, 由于在每一个子区间内取介点的任意性, 黎曼和必定无界, 因此不可能有极限, 其严格证明见后面 §4.4.3 的习题 2385.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Big(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\Big)}{\Big[\Big(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\Big)^2+1\Big]^2}$$

$$=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}\ \ (\text{再令 } t=\tan\theta)$$

$$=\frac{16}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.\quad\square$$

注 其中的代换 $t=\tan\theta$ 将广义积分变换为一个常义积分, 这 (以及反过来的情况) 在换元中是常见的现象.

习题 2341 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用 §3.1.3 的习题 1712 的结果, 就有

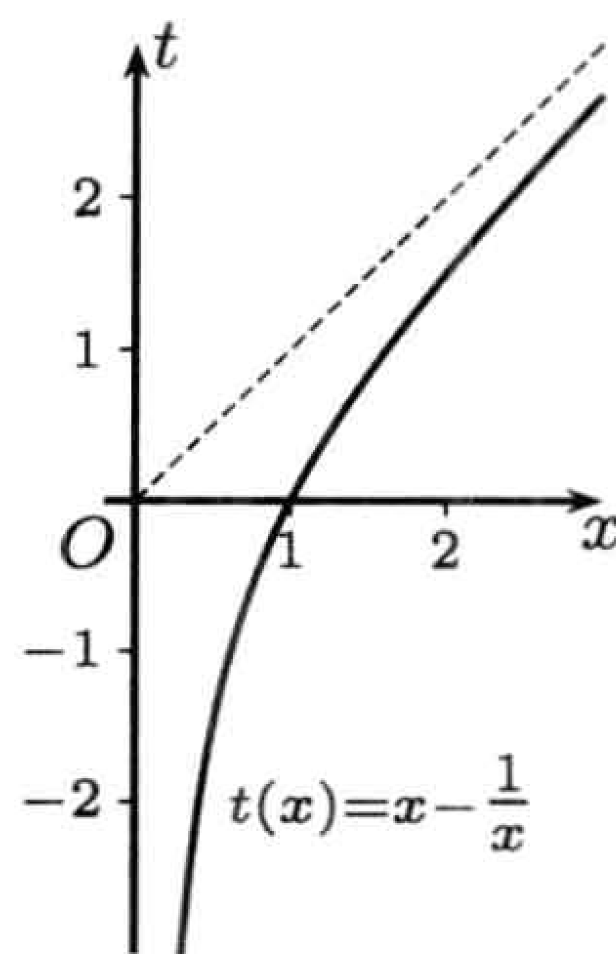
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_{+0}^{b}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\quad\square$$

解 2 利用习题 1712 中的方法, 则可直接计算如下:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Big(x-\frac{1}{x}\Big)}{\Big(x-\frac{1}{x}\Big)^2+2}\ \ (\text{再令 } t=x-\frac{1}{x})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}$$

$$=2\Big(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^b\Big)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\quad\square$$



习题 2341 的附图

注 如附图所示, 当 x 从 0 趋于 $+\infty$ 时, $t(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 从 $-\infty$ 趋于 $+\infty$.

习题 2344 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 1 由于 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$ (参见 §2.9.2 的习题 1341), 因此虽然被积函数于 $x=0$ 处无定义, 但 $x=0$ 并不是奇点.

利用分部积分法容易求出不定积分如下:

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C,$$

然后就可以计算得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\Big(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big)\Big|_{+0}^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\Big(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big)-\lim_{x\to+0}\Big(\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big)$$
$$=0-0=0.\quad\Box$$

解 2 本题有一个特殊解法, 这就是将积分分拆为在区间 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上的两个积分, 即有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

然后对右边第二项的积分作倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$, 即有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{0}\frac{-\frac{1}{t}\ln t}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{1}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

可见恰好与积分分拆后的第一项抵消, 从而答案为 0. $\Box$

注 在解 2 中出现的现象也是一种对称性. 如果作代换 $x=\tan t$, 则就有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t\cdot\ln\tan t}{\sec^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\cdot\ln\tan t\,\mathrm{d}t.$$

由 $\sin(\frac{\pi}{2}-t)\cos(\frac{\pi}{2}-t)\cdot\ln\tan(\frac{\pi}{2}-t)=-\sin t\cos t\cdot\ln\tan t$, 可见被积函数关于积分区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的中点 $t=\frac{\pi}{4}$ 为奇函数, 因此积分等于 0. (这是 §4.2.5 的命题 4.8 在广义积分情况的推广.)

习题 2346 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 1 利用 §3.1.6 的习题 1828 的解 1 的方法, 就可以计算如下:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}.\quad\Box$$

解 2 利用习题 1828 的解 2 的方法 (即复数方法), 直接计算

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}(\cos bx+\sin bx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{a-\mathrm{i}b}=\frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2},$$

等置两边的实部和虚部, 就同时得到了本题的答案和下一个习题 2347 的答案, 即

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}.\quad\Box$$

习题 2348 利用递推公式计算积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

解 $n=0$ 时直接计算得到 $I_0=1$. 然后用分部积分法就有

$$I_n = -\mathrm{e}^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cdot nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = nI_{n-1},$$

可见就得到 $I_n = n(n-1)\cdots 1 \cdot I_0 = n!$. □

注 由此可见, 如果将积分号下的离散参数 n 改为连续参数, 则就可能将阶乘函数 $f(n) = n!$ 延拓成为有连续自变量的函数 (参见 §4.4.2 的习题 2361). 这样的函数就是 §7.4 中的伽马函数 (又见 §5.9.3 的习题 3105 和 §5.9.4 的命题 5.16).

习题 2350 计算积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (n 为正整数).

解 根据有理分式函数的部分分式分解定理 (见 §3.2.1 的命题 3.2), 有

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \cdots + \frac{a_n}{x+n}.$$

利用在习题 1867 的解 2 中的极限方法 (或其他方法), 就有

$$a_0 = \frac{1}{n!}, a_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)}$$
$$= (-1)^k \cdot \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{n!}\mathrm{C}_n^k \ \ (k = 1, \cdots, n).$$

于是就有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \ln(x+k)\right)\Bigg|_1^{+\infty}.$$

在二项式展开 $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$ 中用 $x = -1$ 代入, 即可见 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$. 下面计算上式右边当 $x \to +\infty$ 时的极限值. 由于有等价关系

$$\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{a_k} \sim \prod_{k=0}^{n} x^{a_k} = x^{a_0+a_1+\cdots+a_n} = 1 \ \ (x \to +\infty),$$

因此当 $x \to +\infty$ 时将上式左边取对数后的极限等于 0. 于是就得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = -\sum_{k=0}^{n} a_k \ln(1+k) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k \ln(1+k).$$ □

习题 2352 计算积分 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1} x}$ (n 为正整数).

解 1 利用双曲函数的性质 (参见 §3.1.8 的 (3.10)–(3.13)), 可如下导出递推公式 (其中设 $n > 2$):

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1} x} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\tanh x)}{\cosh^{n-1} x}$$
$$= \frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x}\Big|_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} \frac{\tanh x \sinh x\,\mathrm{d}x}{\cosh^n x}$$
$$= (n-1)\int_0^{+\infty} \frac{(\cosh^2 x - 1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1} x} = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

然后利用 $I_1 = 1$ 和 $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (参见 §3.1.8 的习题 1706), 就得到

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot I,$$

其中当 n 为偶数时 $I = \frac{\pi}{2}$, 而当 n 为奇数时 $I = 1$. □

解 2 利用代换 $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$, 则当 x 从 0 递增趋于 $+\infty$ 时, t 从 $\frac{\pi}{2}$ 递增趋于 π. 这时有 $\cosh x = \frac{1}{\sin t}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$, 因此就得到

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1} x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \,\mathrm{d}\theta,$$

其中最后一步利用了代换 $t - \frac{\pi}{2} = \theta$. 以下用 §4.2.6 的 公式 (4.9)–(4.10) 即可. □

习题 2353 (a)(欧拉积分) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \,\mathrm{d}x$.

解 被积函数在 $x = 0$ 处局部无界, 利用洛必达法则可以证明

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}} = 0,$$

因此根据广义积分的比较判别法可知本题的广义积分收敛.

记积分为 I, 利用 §4.2.5 的命题 4.10 提供的方法, 就有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\ln\sin x + \ln\sin(\frac{\pi}{2} - x)] \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin 2x - \ln 2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x \,\mathrm{d}(2x) - \frac{\pi}{4}\ln 2 \\ &= \frac{1}{2} I - \frac{\pi}{4}\ln 2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2. \quad \square \end{aligned}$$

习题 2355 证明等式:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) \mathrm{d}x,$$

其中 $a > 0, b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

解 1 (分析法) 将等式右边的积分变量改记为 u, 看如何能够得到

$$ax + \frac{b}{x} = \sqrt{u^2 + 4ab}?$$

将上式两边平方, 就可整理得到 $\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2 = u^2$, 可见若取代换

$$u = ax - \frac{b}{x}$$

(或者 $u = -ax + \frac{b}{x}$), 就可达到目的 (其中利用了 $a, b > 0$). 这时有 $\mathrm{d}u = \left(a + \frac{b}{x^2}\right) \mathrm{d}x$, 且当 x 从 0 递增至 $+\infty$ 时, u 从 $-\infty$ 递增至 $+\infty$ (可参考习题 2341 的附图).

从 $u = ax - \frac{b}{x}$ 和 $x > 0$ 解出 $x = \frac{1}{2a}(u + \sqrt{u^2 + 4ab})$, 于是有 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4ab}}) \,\mathrm{d}u$. 这样就可以计算得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{u^2+4ab})(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}})\,\mathrm{d}u.$$

在上式右边作代换 $u=-v$, 且在变换后的积分中又将 v 改记为 u, 则得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{u^2+4ab})(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+4ab}})\,\mathrm{d}u.$$

最后将以上两式相加除 2, 就得到所要的等式:

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\mathrm{d}u. \quad \square$$

解 2 记左边的积分为 I. 因非零数的倒数的倒数即是自身, 作代换 $x=\dfrac{b}{at}$ 得

$$ax+\frac{b}{x}=at+\frac{b}{t},$$

且有 $\mathrm{d}x=-\dfrac{b}{at^2}\,\mathrm{d}t$. 由 $a,b>0$, 当 x 从 0 递增趋于 $+\infty$ 时, t 从 $+\infty$ 递减趋于 0. 又将作代换后的积分中的积分变量 t 改记为 x, 于是得到

$$I=\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\cdot\frac{b}{ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{ax^2}\right)\mathrm{d}x.$$

再作代换 $u=ax-\dfrac{b}{x}$, 则有 $\sqrt{u^2+4ab}=ax+\dfrac{b}{x}$, $\mathrm{d}u=\left(a+\dfrac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, 且当 x 从 0 递增趋于 $+\infty$ 时, u 从 $-\infty$ 递增趋于 $+\infty$. 于是有

$$I=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{u^2+4ab}\right)\mathrm{d}u.$$

利用上式右边积分的被积函数为偶函数, 并将 u 改记为 x, 就得到所要的等式. $\square$

本小节的最后两题都是不定式的极限计算问题. 下面只看一个例子.

习题 2356 (c) 求函数 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的平均值:

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

解 1 这是 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式, 若直接用洛必达法则 (见 §2.9.4 的命题 2.10), 则由于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin x$ 不存在, 因此失效. 然而若先将分子用分部积分作预处理后再用洛必达法则即可成功:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\xi}(-\cos\xi)\Big|_0^x+\displaystyle\int_0^x\frac{\cos\xi}{2\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}\cos x+\displaystyle\int_0^x\frac{\cos\xi}{2\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^x\frac{\cos\xi\,\mathrm{d}\xi}{2\sqrt{\xi}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}=0. \quad \square$$

注 若用广义积分的敛散性判别法, 则可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 因此在解 1 中施行分部积分之后的第二项为有界量, 可不必再用洛必达法则.

解 2 对积分 $\displaystyle\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi$ 用积分第二中值定理, 存在 $0<c<x$, 使得成立

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}(\cos c-\cos x),$$

可见本题的极限等于 0. $\square$

4.4.2 广义积分的敛散性判别 (习题 2358–2383)

由于许多初等函数的原函数不是初等函数, 因此很多广义积分不能通过定义来检验其敛散性. 为此发展出直接从被积函数判定其广义积分是否收敛的判别法是重要的. 就广义积分的计算来说, 在其收敛的前提下, 至少可以计算其近似值.

除了在《习题集》中已经列举的各种常用的比较判别法之外, 这里先介绍在多数教科书中都收入的下列两个判别法 (其证明从略), 并作一些补充说明.

命题 4.11 (阿贝尔判别法) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上以 b 为唯一奇点, 且已知广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

命题 4.12 (狄利克雷判别法) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上以 b 为唯一奇点, 且已知积分 $\displaystyle\int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ 作为 b' 的函数在 $b'\in[a,b)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\displaystyle\lim_{x\to b-0} g(x)=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

以下是对这两个判别法的几点补充说明.

(1) 判别法中的 b 可以是有限奇点, 也可以是无穷奇点 $\pm\infty$.

(2) 已经证明, 这两个判别法都不仅是广义积分收敛的充分条件, 而且还是必要条件. 这就是说, 若 $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ 是以点 b 为唯一奇点的收敛广义积分, 则必定存在某种分解 $F(x)=f(x)g(x)$, 使得 f,g 满足判别法中的条件 (其证明见 [34] 的 §12.2.1).

(3) 由于被积函数保号或绝对收敛的广义积分的收敛性一般不需要用以上两个判别法, 而用于条件收敛的广义积分的收敛性判别主要就是这两个方法, 因此容易产生一种误解, 即能够用以上两个判别法之一判定为收敛的广义积分就一定不是绝对收敛的. 从 (2) 即可见这是错误的, 因此在用以上两个判别法 (之一) 判定变号的被积函数的广义积分收敛之后, 该广义积分有可能绝对收敛, 也有可能条件收敛.

习题 2360 研究积分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的收敛性.

解 在 $x=0$ 邻近被积函数有界, 因此只有一个奇点 $x=1$. 根据广义积分的定义, 应将上述积分在形式上分拆成为

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},$$

且只有当右边的两个积分都收敛的情况下, 左边的积分才收敛, 并使得上述等式成立.

利用

$$\ln x\sim x-1\ \ (x\to 1),$$

可见从 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ 的发散即可推出 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散 (同理可知另一个积分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 也是发散的). 因此本题的广义积分发散. □

注 由 §3.5.3 的习题 2091 可知, $\mathrm{li}(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 是非初等的超越函数, 因此本题的广义积分的发散性不可能按照其定义来验证.

习题 2361 ($\Gamma(p)$ 的积分定义) 研究积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 p 为参数. 将积分分拆如下

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

则右边的第一个积分在 $p \geqslant 1$ 时是常义积分, 而在 $p < 1$ 时有奇点 $x = 0$. 根据 $x^{p-1}\mathrm{e}^{-x} \sim x^{p-1}$ $(x \to +0)$, 用比较判别法就可推出积分在 $0 < p < 1$ 时收敛. 又可看出在 $p \leqslant 0$ 时这个积分发散.

右边的第二个积分只有一个奇点 $+\infty$. 当 $p > 0$ 时, 将被积函数与 $\dfrac{1}{x^2}$ 比较, 由

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

用比较判别法可知在 $p > 0$ 时第二个积分总是收敛的.

合并以上可知本题的答案为 $p > 0$ 时积分收敛, 反之则发散. □

注 将积分看成为 p 的函数, 这就是伽马函数 $\Gamma(p)$ 的积分定义. 于是本题的意义就是用参变量积分定义伽马函数时, 确定该函数的定义域为 $(0, +\infty)$ (参见前面的习题 2348 的注).

习题 2362 研究积分 $\int_0^1 x^p \ln^q \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 首先将积分分拆如下:

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

对上式右边的第二个积分, 由 $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$ 可推出 $\ln \dfrac{1}{x} \sim 1 - x$ $(x \to 1-0)$, 因此问题比较简单, 从 $x^p \ln^q \dfrac{1}{x} \sim (1-x)^q$ $(x \to 1-0)$ 和比较判别法就知道当 $q > -1$ 时收敛, 而当 $q \leqslant -1$ 时发散.

由此可见在对 (4.12) 右边的第一个积分作讨论时, 可以假定 $q > -1$ 已经成立.

由于对数函数 $\ln x$ 当 $x \to +0$ 或 $x \to +\infty$ 时的无穷大量都远远小于相应的幂函数的无穷大量, 因此在被积函数中的因子 x^p 起主要作用 (见 §1.6 的习题 650(d) 和 651(e)).

当 $p < 0$ 时, 或者 $p = 0$ 而 $q > 0$ 时, $x = 0$ 是奇点.

利用 $p > -1$ 时积分 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ 收敛, 取 $\mu > 0$ 充分小, 使得 $p - \mu > -1$ 成立, 于是从

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^p \ln^q \dfrac{1}{x}}{x^p \cdot \dfrac{1}{x^\mu}} = 0,$$

可见当 $p > -1$ 时积分收敛. 当 $p \leqslant -1$ 时, 由于在 $[0, 1/2]$ 上 $x^p \ln^q \dfrac{1}{x} \leqslant x^{-1} \ln^q \dfrac{1}{x}$, 而

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} \ln^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{1}{2}} \ln^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\Big(\ln\frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{q+1}\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)^{q+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = +\infty,$$

可见积分发散.

合并以上, 即知道当 $p>-1, q>-1$ 时本题的广义积分收敛, 否则积分发散. □

习题 2367 研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\ (n\geqslant 0)$ 的收敛性.

解 若 $a=0$, 则当 $n>1$ 时积分收敛, 否则积分发散.

对于 $a\neq 0$, 若 $n=0$, 则按照广义积分定义可知积分发散.

对于 $a\neq 0$ 且 $n>0$ 的情况, 由于 $\int_0^{b'}\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{\sin ab'}{a}$ 在 $b'\in[0,+\infty)$ 上有界, 而 $\frac{1}{1+x^n}$ 单调递减, 且当 $x\to+\infty$ 时趋于 0, 因此按照狄利克雷判别法知道积分收敛.

以下讨论在该积分收敛时是否绝对收敛.

容易看出, 若 $n>1$, 则从比较判别法就知道积分绝对收敛.

但是在 $0<n\leqslant 1$ 时, 利用

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\cos ax|\,\mathrm{d}x}{1+x^n}\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 ax\,\mathrm{d}x}{1+x^n}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax\,\mathrm{d}x}{1+x^n},$$

由于上式右边第一个积分在 $0<n\leqslant 1$ 时发散, 而第二个积分可以再次用狄利克雷判别法知道它收敛, 因此左边的广义积分只能是发散的. (否则只要将右边的第二个积分移到左边, 就会推出右边的第一个积分也收敛的错误结论.)

合并以上, 可见当 $a\neq 0$ 时, 本题的积分在 $n>1$ 时绝对收敛, 在 $0<n\leqslant 1$ 时条件收敛, 在 $n=0$ 时发散. □

习题 2368 研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 1 这时 $x=0$ 不是奇点, 因此可以将积分下限改为 1 来讨论. 从以下等式

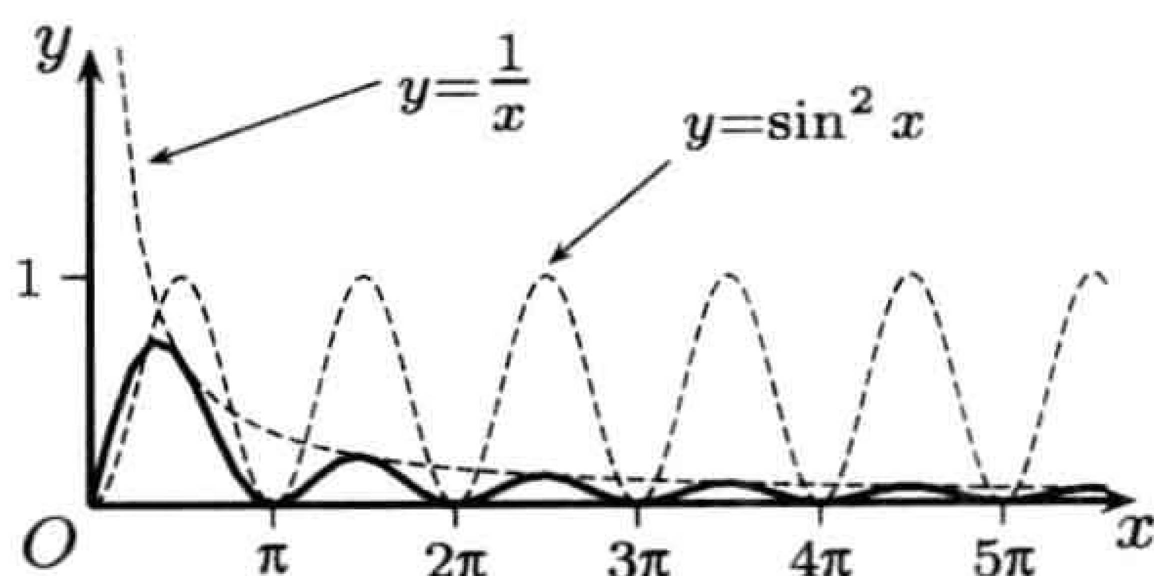
$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$$

可以看出, 右边的第一个积分发散, 而第二个积分则可以用狄利克雷判别法知道它收敛. 由此可见, 左边的积分发散, 并由此推出本题的积分发散. □

注 若不修改积分下限, 则在右边的第二个积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 将由于 $x=0$ 这个 (新增加的) 奇点而发散.

解 2 联系到被积函数的几何图像 (见右下方的附图), 可考虑下列分拆:

$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$



习题 2368 的附图

利用调和级数发散 (见 §1.2.5 的习题 88), 可见有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

这表明本题的积分发散. □

习题 2378 研究积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 这个积分的收敛性至少有两个证法. 第一个方法是利用关于广义积分的柯西收敛准则和 §4.3 的习题 2333 (的解), 知道下列极限

$$\lim_{b\to\infty}\int_b^{b+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=0$$

对于所有 $p>0$ 一致成立, 因此本题的广义积分收敛.

第二个方法是用狄利克雷判别法, 在一般教科书中均有, 从略①.

然后可以证明这个积分是条件收敛的. 这里至少也有两个方法. 第一个方法是在修改积分下限之后利用以下推导:

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

然后利用右边第一个积分发散而第二个积分收敛推出左边的积分发散.

第二个方法是模仿习题 2368 的解 2, 写出

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big),\end{aligned}$$

以下从略. □

习题 2380 (a) 研究积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x\ (q\neq 0)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 (概要) 先讨论 $q=1$ 的情况, 然后通过变量代换将一般情况归结为前者.

(1) $q=1$. 这时可将积分分拆如下:

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^p\sin x\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^p\sin x\,\mathrm{d}x. \tag{4.13}$$

对于上式右边的第一个积分, 由于 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$, 对奇点 $x=0$ 用比较判别法就知道当 $p>-2$ 时积分收敛 (且为绝对收敛), 而当 $p\leqslant -2$ 时积分发散.

对于 (4.13) 右边的第二个积分, 将被积函数写为 $\dfrac{\sin x}{x^{-p}}$, 就可套用习题 2368 和 2378 的方法知道: 当 $p<-1$ 时积分绝对收敛, 当 $-1\leqslant p<0$ 时积分条件收敛. 对于 $p\geqslant 0$, 则可利用柯西收敛准则, 从对于任意正整数 n 成立如下不等式

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^p\sin x\,\mathrm{d}x>(2n\pi)^p\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=2,$$

可见积分发散.

① 回忆教科书中对于狄利克雷判别法的证明, 其中的主要工具是积分第二中值定理. 习题 2333 的证明也是如此, 因此这两个方法本质上相同.

合并对两个积分的讨论, 可知对于 $q=1$ 的情况, 当 $-2<p<-1$ 时积分绝对收敛, 当 $-1\leqslant p<0$ 时积分条件收敛, 当 $p\geqslant 0$ 或 $p\leqslant -2$ 时积分发散.

(2) 一般情况. 作代换 $t=x^q$, 则原积分变换为

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

套用情况 (1) 的结果, 就知道本题的答案为: 当 $-1<\dfrac{p+1}{q}<0$ 时积分绝对收敛, 当 $0\leqslant\dfrac{p+1}{q}<1$ 时积分条件收敛, 当 $\dfrac{p+1}{q}\leqslant -1$ 或 $\dfrac{p+1}{q}\geqslant 1$ 时积分发散. □

习题 2380 (b) 研究积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,\mathrm{d}x$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解　本题的积分区间有界, 被积函数的绝对值又不超过 1, 因此不是广义积分. 由于被积函数只有 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 这一个第二类不连续点, 因此该积分以及被积函数取绝对值后的积分的收敛性都没有问题.

若作变量代换 $t=\sec x$, 则有 $x=\arccos\dfrac{1}{t}$, 当 x 从 0 递增至 $\dfrac{\pi}{2}$ 时, t 从 1 递增趋于 $+\infty$. 于是原积分变换为一个广义积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \sin t\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t,$$

对奇点 1 和 $+\infty$ 分别用比较判别法, 即可知为绝对收敛. □

4.4.3　关于广义积分的若干理论题 (习题 2384–2389)

关于广义积分的理论问题很多, 有兴趣的读者可参考 [34] 的 §12.1.3, §12.4 的练习题和 §12.5.2 的两组参考题.

下面的习题 2384 中的两个小题讨论的是同一类问题, 即在无界区间上的广义积分收敛时, 其中的被积函数当自变量趋于无穷大时是否一定趋于 0, 如果不一定, 则加了什么条件就可以成立.

习题 2384.1 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则当 $x\to+\infty$ 时是否必有 $f(x)\to 0$?

研究例子:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$;　　(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要)　从所举的两个例子可见本题的答案是"不一定".

对例子 (a) (参见 §1.4.2 的习题 298 的附图), 只要作代换 $x^2=t$ 后用狄利克雷判别法即可知道积分收敛. 对例子 (b) 也可用相同的方法证明其积分收敛. 然而这两个被积函数当 $x\to+\infty$ 时的极限都不存在. □

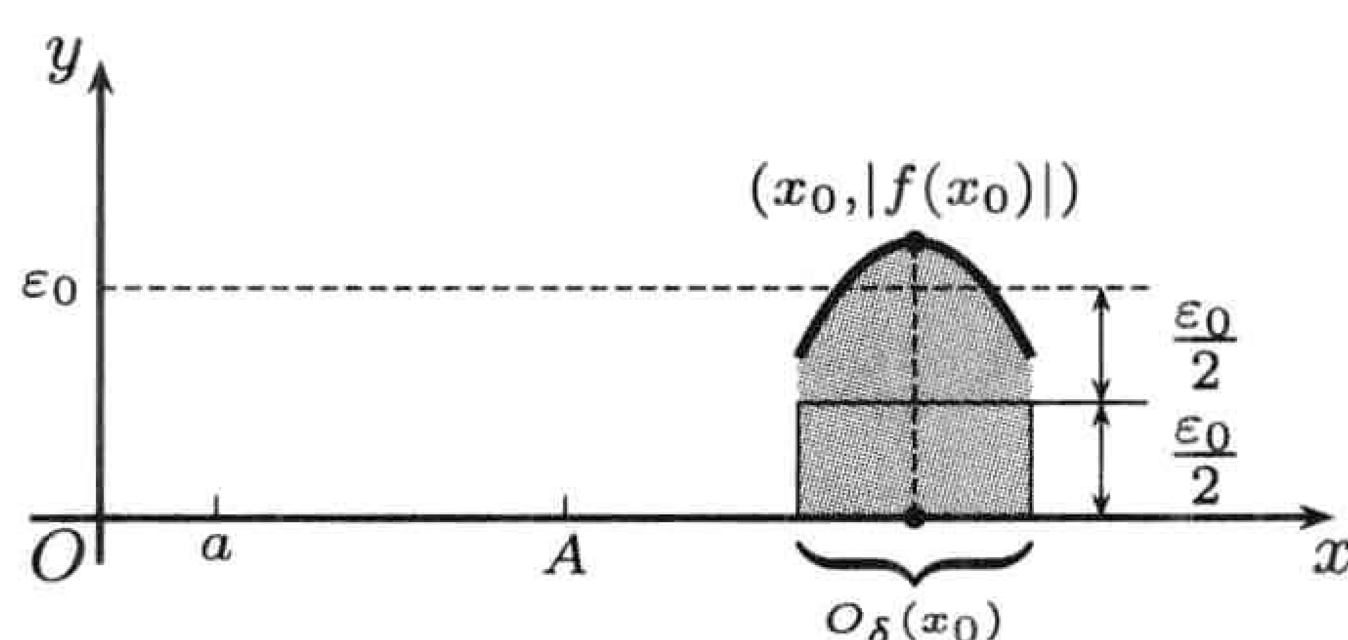
习题 2384.2 设 $f(x) \in C^{(1)}[x_0,+\infty)$, 当 $x_0 \leqslant x < +\infty$ 时 $|f'(x)| < C$, 且 $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to 0$.

分析 本题表明, 在积分 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛的前提下, 若导函数 $f'(x)$ 有界, 则就可保证有 $f(+\infty)=0$. 然而本题的条件太强了. 在 $[x_0,+\infty)$ 上存在有界的导函数已经保证了 $f(x)$ 于区间 $[x_0,+\infty)$ 上一致连续 (见 §2.6.4 的习题 1255), 而这一点对于所要的结论已经足够, 没有必要再要求广义积分为绝对收敛. 下面将以命题的形式在这里介绍 [34] 中的命题 12.4.1, 它被多次发现 (甚至称为某某定理) 并刊登在各种书刊中, 例如以稍有不同的形式出现在名著 [24, 54–55 页] 中. □

命题 4.13 设 $f \in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $f(+\infty)=0$ 的充分必要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 1 $f \in C[a,+\infty)$ 时只要存在极限 $f(+\infty)$ 就保证 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 因此必要性是平凡的 (见 §1.9 的习题 791), 与广义积分收敛无关. 然而它告诉我们, 一致连续性已经是最低条件了.

现在证充分性. 用反证法. 设 $f(+\infty)=0$ 不成立. 用对偶法则 (参见 §1.2.5 的习题 87), 知道存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对每个 $A>a$, 存在 $x_0>A$, 满足 $|f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$ (参见附图).



命题 4.13 的附图

利用 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 对上述 ε_0, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x'' \in [a,+\infty)$ 且满足 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0/2$. 于是当 $x \in O_\delta(x_0)$ 时就有

$$|f(x)| \geqslant |f(x_0)| - |f(x_0)-f(x)| > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

而且 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 于是就有积分估计

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x = \varepsilon_0\delta.$$

由于 x_0 可取任意大, 最后的不等式与广义积分的柯西收敛准则相矛盾. □

证 2 [31] 下面是对于充分性的不用反证法的证明.

对于给定的 $\varepsilon>0$, 根据一致连续条件, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x'' \in [a,+\infty)$ 且满足 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

记 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则由于存在极限 $F(+\infty)$, 从柯西收敛准则知道有 $M>a$, 使得当 $x>M$ 时,

$$|F(x+\delta)-F(x)| = \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\delta.$$

于是就有

$$\begin{aligned}|f(x)\delta| &\leqslant \left|f(x)\delta-\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &<\int_x^{x+\delta}|f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon\delta<2\varepsilon\delta,\end{aligned}$$

可见当 $x>M$ 时就有 $|f(x)|<2\varepsilon$. 这证明了 $f(+\infty)=0$. □

习题 2385 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且无界. 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 看作相应积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \ \ (x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n)$$

的极限?

解 该极限不存在. 用反证法. 若该黎曼和有极限 I, 则对 $\varepsilon=1$, 有 $\delta>0$, 当分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 的细度 $\|P\|<\delta$ 时, 对与 P 相容的介点 ξ_i $(i=1,\cdots,n)$, 有

$$I-1<\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i<I+1.$$

这表明若黎曼和收敛, 则必定有界. 然而由于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 因此至少在分划确定的某一个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上无界. 对于 $i\neq k$, 固定介点 $x_i\in[x_{i-1},x_i]$, 而在 $[x_{k-1},x_k]$ 上取任意的介点 ξ_k, 这样就使得上述黎曼和无界, 引出矛盾. □

注 本题与常义积分收敛时被积函数必须有界等价. 然而, 对于无界函数用特定的一列分划和介点仍然有可能求出广义积分的值. 在 §4.2.2 的习题 2225 就是这样的一个例子. 关于这方面的进一步讨论见后面的习题 2388 及其注.

习题 2386 设

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分 (1) 绝对收敛, 问积分 (2) 的收敛性如何?

解 第一个问题的答案是“不一定”. 例如, §4.4.2 的习题 2378 的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 令 $\varphi(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$, 则相应的积分 (2) 就是发散的.

对第二个问题的回答是“肯定收敛”. 当然对 $\varphi(x)$ 除了有界之外, 还要求它在任意有界区间上可积. 这时只要用广义积分的柯西收敛准则就可以证明 (2) 一定可积. □

习题 2387 证明: 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则①

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (x\to+\infty).$$

---

① 原题为 $f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$. 这个结果太差. 这里根据 [15] 的第二卷 497 小节的例题 3)(c) 作了改动.

解 1　不妨设 $f(x)$ 单调递减 (否则考虑 $-f(x)$). 先证这时 $f(x)$ 必为非负. 用反证法. 若有 $c \geqslant a$, 使 $f(c) < 0$, 则对所有 $x \geqslant c$ 都有 $f(x) \leqslant f(c)$. 于是对于 $b > c$ 就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (b-c)f(c).$$

当 $b \to +\infty$ 时, 上式右边趋于 $-\infty$, 因此与广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的条件相矛盾.

然后用柯西收敛准则, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > a$, 使得对任意 $b, b' > M$ 成立

$$\left|\int_b^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

取 $b = x > M, b' = 2x$, 并利用 f 单调递减且非负, 则就有

$$0 \leqslant xf(2x) \leqslant \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

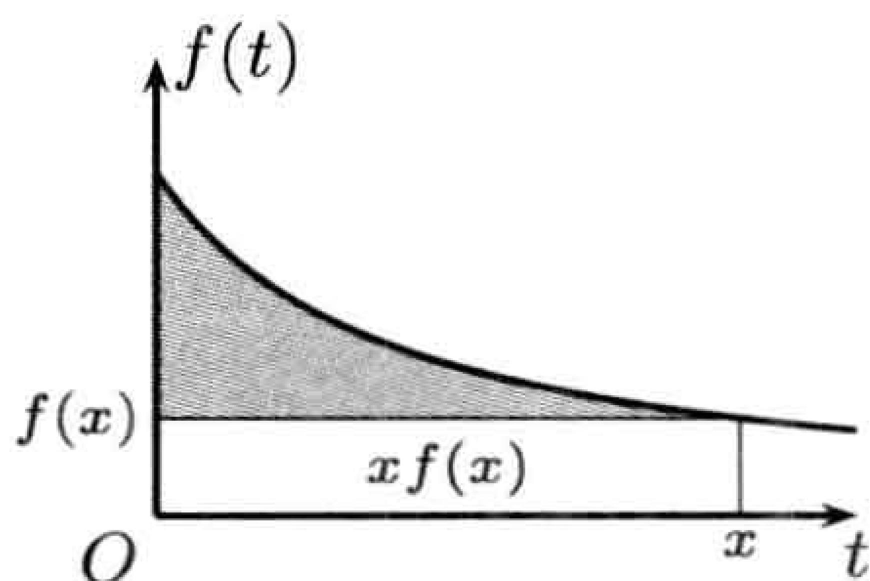
这样就已经证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, 也就是 $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$. □

解 2　如解 1 所示, 从 $f(x)$ 为非负单调递减开始. 又不妨设 $a = 0$. 定义辅助函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x), \quad a \leqslant x < +\infty,$$

则当 $0 \leqslant x_1 < x_2$ 时有

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \\ &\geqslant \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - x_2 f(x_2) + x_1 f(x_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [f(t) - f(x_2)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0, \end{aligned}$$



习题 2387 解 2 的示意图

可见 F 单调递增 ($F(x)$ 即示意图中灰色区域的面积).

又从 $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ 可见 F 上方有界, 从而存在极限 $F(+\infty)$. 这时从 $F(x)$ 的定义即可推出存在有限极限

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = A.$$

若 $A \neq 0$, 则有 $f(x) = O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(x \to +\infty)$, 这与 f 在 $[a, +\infty)$ 上广义可积相矛盾. □

练习题　若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $xf(x)$ 单调, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0$.

习题 2388 设函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x \leqslant 1$ 内是单调函数, 且在点 $x = 0$ 的邻域内是无界的. 证明: 若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解　设 f 单调递减 (否则讨论 $-f(x)$), 则对于 $k = 1, \cdots, n-1$ 成立不等式

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

然后将它们相加, 就得到不等式

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{0}^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中的中间和式与题中的和式只少了 $f(1)/n$ 这一项, 然后令 $n \to \infty$ 即可. □

注 还可以进一步讨论这个问题. 例如, 在 [34] 的例题 12.1.1 中证明, 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调, 在两个点 $x=0,1$ 处可以局部无界, 积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则就有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

它来自名著 [28] 的第一卷的积分篇的习题 20. 在该处还有许多与本题有关的内容.

4.4.4 广义积分的柯西主值 (习题 2390–2395)

先简述柯西主值的定义, 较详细的介绍可以参考 [15] 的第二卷的 484 小节.

设 $c \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的唯一奇点, 且设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内不含有奇点 c 的每一个闭子区间上都可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的广义积分的柯西主值定义为以下极限:

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则从定义就知道这个积分就等于它的柯西主值. 但反之不成立. 这从本小节的许多习题都可以看出. 例如习题 2390(a) 就是

$$\text{v.p.}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = 0,$$

而广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是发散的.

由此可见, 广义积分的柯西主值是广义积分的一种推广.

上述的柯西主值定义本身还可以推广. 例如对于在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有有限奇点的函数 $f(x)$, 可以定义 $f(x)$ 在这个无界区间上的广义积分的柯西主值为以下极限:

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如习题 2390(c) 就是

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\left(-\cos x\Big|_{-a}^{a}\right) = 0,$$

而广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$ 却是发散的.

以下只看与柯西主值有关的一个特别重要的非初等函数 $y = \operatorname{li} x$, 即对数积分 (也使用记号 $\operatorname{Li} x$, 也称为积分对数). 它已经出现在 §3.5.3 的习题 2091 中. 由于当时还只有原函数和不定积分的知识, 因此就写 $\operatorname{li} x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$. 然后在 §4.4.2 的习题 2360 中又证明了积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散. 它表明对数积分不可能只用广义积分来定义. 实际上, 当 $0<x<1$ 时可以定义 $\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi}$, 而当 $x>1$ 时就需要用柯西主值来定义对数积分 $\operatorname{li} x$.

习题 2391 证明: 当 $x>1$ 时存在

$$\operatorname{li} x = \text{v.p.}\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi}.$$

解 由于被积函数 $\frac{1}{\ln \xi}$ 只有唯一的奇点 $\xi=1$, 下面只要证明, 当 $x>1$ 时题中给出的柯西主值是存在的.

为此当 $x>1$ 时考虑下列两个积分之和, 并分别用代换 $\xi=1-t$ 和 $\xi=1+t$, 从而得到

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi} = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1-t)} + \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}$$
$$= \int_\varepsilon^1 \left[\frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{\ln(1+t)}\right] \mathrm{d}t.$$

可见被积函数在 $x=1$ 处的极限为 $1/\ln 2$, 而在 $t=0$ 处的极限可计算如下:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{\ln(1+t)}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t^2)}{\ln(1-t)\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{-t\cdot t} = 1.$$

于是当上述积分的积分限中的 $\varepsilon \to +0$ 时积分的极限存在, 且为常义积分.

由此可见, 在 $x>1$ 时积分 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi}$ 在柯西主值意义上存在, 且有表达式:

$$\operatorname{li} x = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{\ln(1+t)}\right] \mathrm{d}t + \int_2^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\ln \xi},$$

其中右边的两个积分都是常义积分. □

注 对数积分 $\operatorname{li} x$ 在研究素数分布中起重要作用. 回顾 §1.3.1 的习题 177, 在那里已经指出, 在不超过 x 的范围内的素数的平均频率有以下渐近结果 (即素数定理):

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\ln x} \ \ (x\to+\infty).$$

黎曼和高斯都注意到, 用上式右边的积分, 即对数积分, 来估计 $\pi(x)$ 的近似程度要比 $\frac{x}{\ln x}$ 好得多. 对于素数定理的进一步改进就是估计误差 $|\pi(x)-\operatorname{li} x|$. 已经证明, 黎曼猜想① 等价于下列等式:

$$\pi(x) - \operatorname{li} x = O(\sqrt{x}\ln x) \ \ (x\to+\infty),$$

但目前离这个结果还很远. [24] 的作者的一个著名结果就是证明了差 $\pi(x)-\operatorname{li} x$ 有无限多次变号, 然而第一次变号的位置到目前为止还只能估计在 10^{12} 到 10^{310} 之间 (见 [30] 的第 120 页). 黎曼猜想被公认为素数理论中的主要的未解决问题.

① 黎曼猜想 (或称黎曼假设) 是黎曼于 1859 年提出的, 已被 Clay 数学促进会在 2000 年列为 7 个新千年数学奖问题之一. 这个猜想是: 黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 的所有非平凡零点的实部都等于 1/2. 目前已验证了 15 亿个零点都是如此. 很多数学家认为, 黎曼猜想是今天纯粹数学中最重要的未解决问题. 关于黎曼猜想的介绍可看数学译林 2001 年第 20 卷第 2 期上的综合报告. [30] 是为这一个难题而写的科普读物之一.

§4.5 面积的计算法 (习题 2396–2430)

内容简介 本节的习题为平面图形的面积计算, 根据其边界曲线的给定方式采用相应的积分公式[①].

这里提个建议, 即在计算平面图形面积之前, 先作出其草图, 了解图形的大致情况. 这对于确定积分限等都非常有益. §1.4 中的各种方法在这里都可能有用.

此外, 这里还以命题形式给出求平面图形面积的一个计算公式, 它适用于图形的边界曲线为参数方程给出的情况, 且可推出直角坐标系和极坐标系中的面积公式.

命题 4.14 设没有自交点的平面封闭曲线的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $x(t), y(t)$ 分段连续可微, 当参数 t 从 0 递增到 T 时, 点 $(x(t), y(t))$ 以逆时针方向绕闭曲线一周, 则该曲线包围的平面图形的面积为

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \int_0^T x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}} \tag{4.14}$$

注 1 这个公式实际上是曲线积分理论中的格林公式 (见《习题集》的 §8.12) 的特例. 对于较为简单的一些情况, 例如设平行于坐标轴的任何直线与闭曲线的交点不超过 2 个的情况, 证明是容易的 (可参看 [34] 的 §11.1.2).

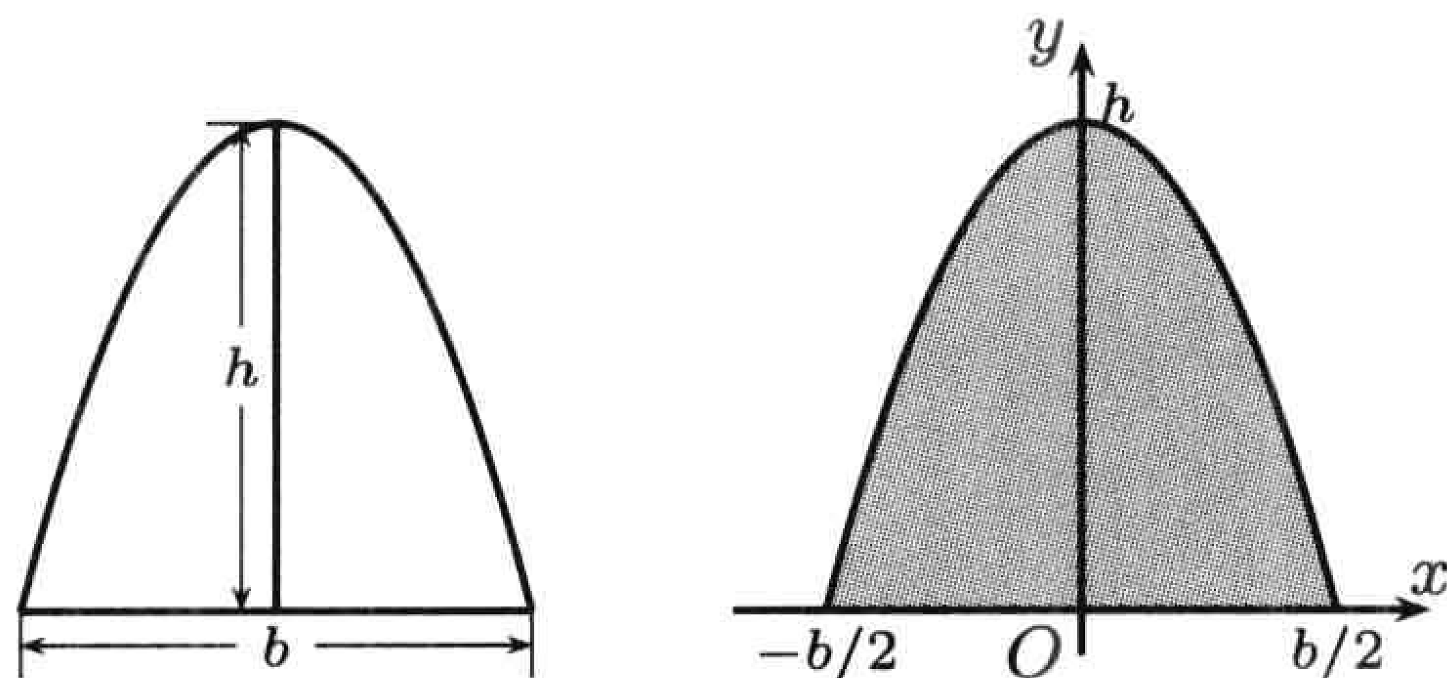
注 2 如果平面闭曲线是通过 $y = tx$ 而引入参数 t 的, 则公式 (4.14) 的最后一式可变得很简单. 由于这时有

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = x(t)[tx(t)]' - tx(t)x'(t) = x^2(t),$$

因此公式 (4.14) 就成为 $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t$.

习题 2396 证明: 正抛物线弓形的面积等于 $S = \dfrac{2}{3}bh$, 式中 b 为弓形的底, h 为高 (见附图的左分图).

解 为了作计算, 需要取定坐标系, 写出图形的边界曲线的方程. 如附图的右分图所示, 抛物线的方程为 $y = -kx^2 + h$, 其中系数 $k > 0$ 可根据 $x = \pm\dfrac{b}{2}$ 时 $y = 0$ 来确定. 计算得到 $k = \dfrac{4h}{b^2}$, 于是即可计算其面积如下:



习题 2396 的附图

$$S = 2\int_0^{\frac{b}{2}} \left(-\frac{4h}{b^2}x^2 + h\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{8h}{3b^2}x^3 + 2hx\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}} = -\frac{1}{3}bh + bh = \frac{2}{3}bh. \quad \square$$

① 注意《习题集》在此处的注, 即从本节起直到本章末, 在习题中出现的参数若未加说明时均为正数.

注 积分学的源头之一就是面积和体积的计算. 历史上最早严格计算出多个曲边的平面图形面积的是古希腊的阿基米德. 他在这方面的成就之一是证明了抛物线弓形(即用直线与抛物线相交围成的图形)的面积等于同底同高的三角形面积乘以系数 4/3. 对本题来说, 就是 $\frac{1}{2}bh \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}bh$. 阿基米德在没有积分学工具的情况下, 利用静力学平衡方法发现了这个公式, 又用穷竭法给出了严格的证明. 他被公认为是微积分的伟大先驱之一 (见[2] 中的《方法》篇).

习题 2403 求 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形的面积.

解 1 这是椭圆在直角坐标系中的标准方程. 利用该图形关于坐标轴的对称性, 只要计算第一象限部分的面积再乘以 4 即可. 于是可写出

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

对其作代换 $x = a\sin\theta$, 即有

$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi ab. \quad \square$$

解 2 用 $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 将椭圆曲线写成参数形式, 则可用公式 (4.14) 的第三式计算如下:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t(b\sin t)' - b\sin t(a\cos t)']\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,\mathrm{d}t = \pi ab. \quad \square$$

习题 2406 求 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1\ (A > 0, AC - B^2 > 0)$ 所围图形的面积.

从解析几何的二次曲线知识可见本题的曲线是中心在原点的一个椭圆. 下面将举出从解析几何、代数直到微积分的多种解法, 这在很大程度上是向 [12] 学习的结果.

解 1 (解析几何的转轴方法) 用转轴公式

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta,$$

就得到在 $x'Oy'$ 坐标系中的方程

$$(A\cos^2\theta + B\sin 2\theta + C\sin^2\theta)x'^2 + (-A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta + C\sin 2\theta)x'y' + (A\sin^2\theta - B\sin 2\theta + C\cos^2\theta)y'^2 = 1.$$

取 θ 满足条件

$$2B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta,$$

即使 $x'y'$ 项的系数等于 0, 则方程为 $ax'^2 + by'^2 = 1$, 其面积为 $S = \dfrac{\pi}{\sqrt{ab}}$. 乘积 ab 可计算如下:

$$\begin{aligned} ab &= \left[\frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta\right] \\ &\qquad \times \left[\frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\theta - B\sin 2\theta\right] \\ &= AC + \frac{1}{4}\sin^2 2\theta(A - C)^2 - B^2\sin^2 2\theta - B(A - C)\sin 2\theta\cos 2\theta \\ &= AC + B^2(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) - 2B^2\cos^2 2\theta = AC - B^2, \end{aligned}$$

最后得到 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. □

解 2 (极坐标方法) 用 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ 代入, 得到在极坐标系中的曲线方程

$$r^{-2}=A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi$$
$$=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\cos 2\varphi+B\sin 2\varphi.$$

将右边的后两项写为一个正弦函数 (见 §2.11.3 的习题 1456.1(e)), 即可求出 r^{-2} 的最大值和最小值分别为

$$\frac{A+C}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2+B^2},$$

它们的乘积是 $AC-B^2$. 这样就求出了椭圆的长半轴和短半轴的长度的乘积为 $\dfrac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$, 因此椭圆的面积 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. □

解 3 (解析几何) 用直线 $y=kx$ 与椭圆相交, 可见交点的横坐标 x 满足等式

$$(A+2Bk+Ck^2)x^2=1.$$

于是可求出交点 (x,y) 到原点的距离平方为 $D=\dfrac{1+k^2}{A+2Bk+Ck^2}$. 将这个等式改写为关于 k 的二次三项式

$$(Ck^2+2Bk+A)D-(k^2+1)=(CD-1)k^2+2BDk+(AD-1)=0,$$

然后利用椭圆关于其主轴的对称性可知, 当 D 不是最值时, 它必定与两个不同的 k 值对应, 而达到最大或最小的 D 则只能分别对应于唯一的 k 值, 因此这样的 D 值应当使得上述二次三项式的判别式为 0. 这就得到

$$(AC-B^2)D^2-(A+C)D+1=0.$$

这表明达到最大值和最小值的两个 D 值的乘积是 $1/(AC-B^2)$, 开方后就是长半轴和短半轴的乘积, 因此 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. □

解 4 (微分学方法) 用微分学方法求解 3 中的函数 $D(k)=\dfrac{1+k^2}{A+2Bk+Ck^2}$ $(-\infty<k<+\infty)$ 的最大值和最小值. 由于 $B=0$ 的简单情况可直接研究, 以下假设 $B\neq 0$. 从 $D'(k)=0$ 推出

$$Bk^2+(A-C)k-B=0.$$

设 k_1,k_2 是与两个最值 D_1,D_2 对应的 k 值, 则有 $k_1k_2=-1$, $k_1+k_2=\dfrac{C-A}{B}$. 从 D_1,D_2 的表达式可以计算得到 $D_1D_2=\dfrac{1}{AC-B^2}$, 于是就有 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. □

注 以上几个方法都依赖于已知椭圆面积公式为 π 乘以椭圆的长半轴和短半轴, 以下是本节求面积的三种主要的积分方法, 它们不需要事先知道椭圆的面积公式.

解 5 (积分学方法之一) 从方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 解出 y 作为 x 的函数的显表达式 (也就是椭圆曲线所围区域的上边界和下边界) 为

$$y_{1,2}(x)=-\frac{Bx}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2},$$

同时确定它们的定义域为 $[-\dfrac{\sqrt{C}}{D},\dfrac{\sqrt{C}}{D}]$, 其中 $D=\sqrt{AC-B^2}$.

然后可对 $y_1(x)-y_2(x)$ 积分如下:

$$S=\int_{-\sqrt{C}/D}^{\sqrt{C}/D}[y_1(x)-y_2(x)]\,\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\int_{-\sqrt{C}/D}^{\sqrt{C}/D}\sqrt{C-D^2x^2}\,\mathrm{d}x\ \text{(再作代换 }u=Dx)$$

$$=\frac{1}{CD}\cdot 2\int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}}\sqrt{C-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

由于 $2\int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}}\sqrt{C-u^2}\,\mathrm{d}u$ 就是半径为 $\sqrt{C}$ 的圆面积, 因此就得到

$$S=\frac{1}{CD}\cdot\pi C=\frac{\pi}{D}.\quad\square$$

解 6 (积分学方法之二) 如解 2 所示, 在极坐标系中的曲线方程为 $r^{-2}=A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi$, 因此可以用极坐标系的面积公式计算如下:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{A+2B\tan\theta+C\tan^2\theta}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{Cu^2+2Bu+A}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\Big(\sqrt{C}u+\dfrac{B}{\sqrt{C}}\Big)^2+\Big(A-\dfrac{B^2}{C}\Big)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{C}}\cdot\Big(\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{\sqrt{C}u+b/\sqrt{C}}{\sqrt{A-B^2/C}}\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.\quad\square$$

解 7 (积分学方法之三) 用参数方程方法. 引入参数的方法不是唯一的. 例如, 可以先配方得到

$$\Big(A-\frac{B^2}{C}\Big)x^2+\Big(\sqrt{C}y+\frac{B}{\sqrt{C}}x\Big)^2=1,$$

记 $\Delta=AC-B^2$, 令 $x=\sqrt{C/\Delta}\cos t$, $y=1/\sqrt{C}\sin t-(B/\sqrt{C\Delta})\cos t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 则可以计算得到

$$x(t)y'(t)-y(t)x'(t)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

因此用公式 (4.14) 的第三式就得到

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\Delta}}=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.\quad\square$$

以下几个解法中需要一元微积分之外的知识, 初学者可暂时跳过, 以后再学.

解 8 (二重积分方法) 平面区域的面积可表示为恒等于 1 的二元函数在该区域上的二重积分.

将方程配方为

$$A\Big(x+\frac{By}{A}\Big)^2+\Big(C-\frac{B^2}{A}\Big)y^2=1,$$

作二元代换

$$u=\sqrt{A}\Big(x+\frac{By}{A}\Big),\quad v=\sqrt{C-\frac{B^2}{A}}\,y,$$

计算出这个代换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}},$$

于是就可以用二重积分计算如下 (其中记 Ω 为椭圆区域 $Ax^2+2Bxy+Cy^2 \leqslant 1$):

$$S=\iint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.\quad\square$$

解 9 (**条件极值方法**) 在椭圆曲线上求到原点距离的最大值和最小值是一个典型的条件极值问题. 引入拉格朗日函数

$$L=x^2+y^2-\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1),$$

从 L 关于 x,y 的偏导数为 0 得到线性方程组

$$(1-\lambda A)x-\lambda By=0,\quad -\lambda By+(1-\lambda C)y=0.$$

将它们分别乘以 x,y 后相加, 即可见拉格朗日乘子 $\lambda=r^2$. 于是只要计算 λ. 从关于 x,y 的齐次线性方程组有非零解可见其行列式为 0, 于是有

$$(AC-B^2)\lambda^2-(A+C)\lambda+1=0.$$

于是可知与 r^2 的最大值和最小值对应的两个乘子的乘积为 $\dfrac{1}{AC-B^2}$. 将它开平方再乘以 π 就是所要求的面积 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. $\square$

解 10 (**线性代数方法**) 将在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 下求 x^2+y^2 的最值称为问题一, 它可转换为在 $x^2+y^2=1$ 的条件下求 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 的最值, 称为问题二. 引入矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ B & C\end{smallmatrix}\right)$, 对问题二, 从线性代数知道它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值.

写出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2),$$

可见两个特征值的乘积等于 $AC-B^2$. 它的倒数就是原问题一的两个最值的乘积. 开平方后乘以 π 就得到 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. $\square$

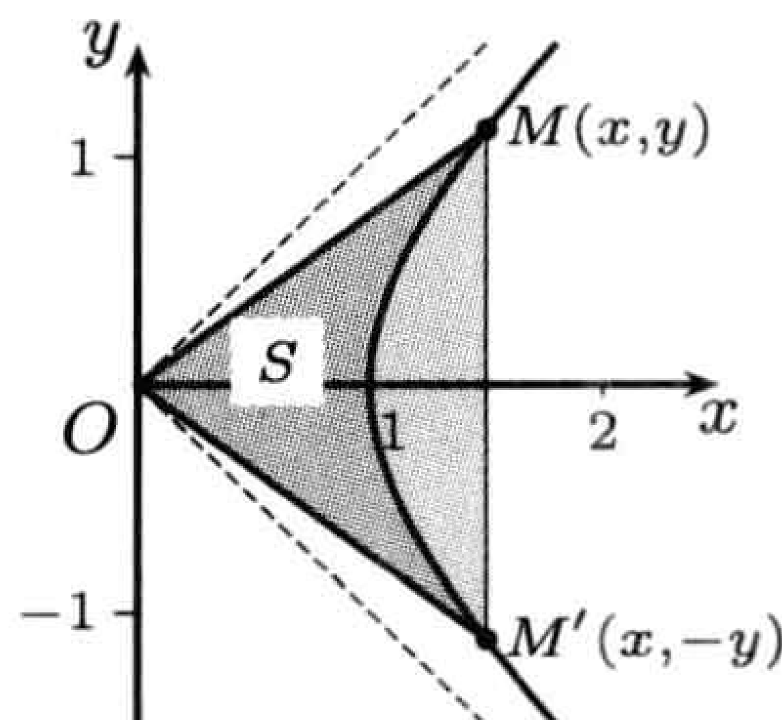
评论 提一个问题: 在以上的 10 种方法中有哪些可以推广于求三维椭球的体积, 而且还可以推广于求 n 维超椭球的体积?

这里只作一点不完整的评论, 即指出容易推广的几个解法.

解 1, 即解析几何中的转轴方法, 似乎计算比较复杂, 但只要有线性代数知识就很容易推广到 n 维空间中解决 n 维超椭球的体积计算问题.

此外, 解 8, 即二重积分方法, 在引入正交变换后就容易推广到 n 维. 解 9 和解 10 的推广也是可能的.

习题 2412 把双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的点 $M(x,y)$ 的坐标表示为双曲线扇形 $OM'M$ 的面积 S 的函数, 此扇形以双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 为界, 其中 $M'(x,-y)$ 是点 M 相对于 Ox 轴的对称点.



习题 2412 的附图

解 如附图所示, 只考虑 $x>0$ 部分的双曲线 $x^2-y^2=1$. 附图中的两条虚线是双曲线的渐近线 $y=\pm x$.

为求出双曲扇形 (附图中的阴影区) 的面积 (也记为) S, 可以先计算由双曲线弧 $M'M$ 和直线 MM' 围成的弓形 (附图中的淡灰色区) 面积. 从方程解出 $y=\pm\sqrt{x^2-1}$, 即可求积如下:

$$\begin{aligned}2\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= 2\Big(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\Big)\Big|_1^x\\ &= x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\end{aligned}$$

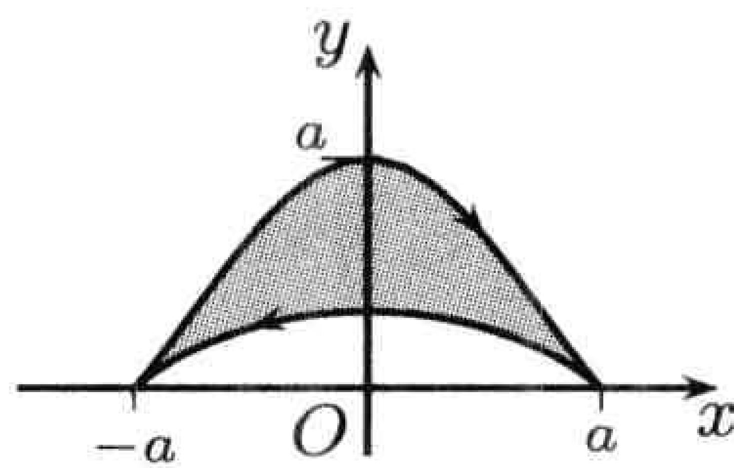
其中利用了 §3.1.6 的积分基本公式 (3.6) 之二 ($\alpha=-1$). 由于三角形 OMM' 的面积等于 $xy=x\sqrt{x^2-1}$, 将它们相减后就得到所要求的面积

$$S=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

利用双曲余弦函数的反函数公式 (见 §3.1.8 的 (3.11)(2)), 可见上式就是 $S=\operatorname{arccosh} x$, 因此得到 $x=\cosh S$. (也容易直接从 $\mathrm{e}^S=x+\sqrt{x^2-1}$ 出发推导出 $x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^S+\mathrm{e}^{-S})$.) 然后就有 $y=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\cosh^2 S-1}=\sinh S$. □

注 本题的结论就是双曲函数得名的由来.

习题 2417(b) 求由曲线 $x=a\cos t$, $y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$ 所围图形的面积.



习题 2417(b) 的附图

解 如附图所示, t 从 0 到 2π 时点 $(x(t),y(t))$ 以顺时针方向描出一个闭曲线, 因此在用公式 (4.14) 时要乘以 -1. 由于 $x(t),y(t)$ 的表达式不对称, 这里用其中的第三式未必合适, 不如用其第二式求积如下:

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = -a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &= -a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-2\sin t+4)\,\mathrm{d}t+8a^2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}\\ &= -a^2\cdot 9\pi+8a^2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}.\end{aligned}$$

对于最后一个积分可作代换 $t=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 而归结为 §3.4.3 的习题 2028 如下[①]:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t} &= \int_{-3\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}\\ &= 2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-(1/4)}}\cdot\arctan\Big(\sqrt{\frac{1-(1/2)}{1+(1/2)}}\cdot\tan\frac{t}{2}\Big)\Big|_0^{\pi}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-(1/4)}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

于是最后的答案是 $S=\pi a^2\Big(\dfrac{16}{\sqrt{3}}-9\Big)\approx 0.746a^2$. □

[①] 其中第二个等式利用了 §4.2.5 的习题 2265, 即周期函数在任何周期长度的区间上的积分都相同.

习题 2422(a) 求由极坐标方程 $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ 所给曲线所围图形的面积.

解 1 (解析几何方法) 由于这是椭圆的极坐标方程, 原点为椭圆的焦点之一, 因此只要求出长半轴和短半轴就可以得到椭圆的面积.

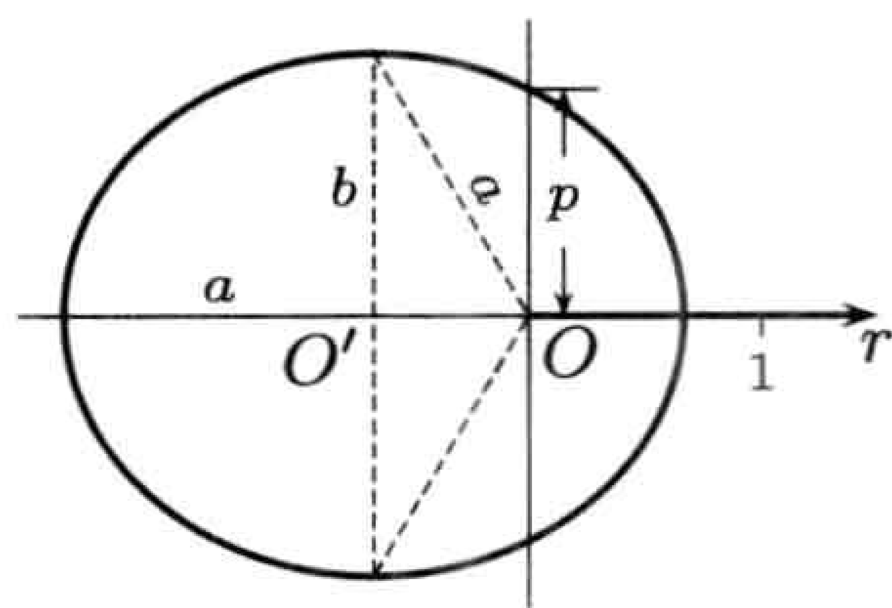
分别用 $\varphi = 0, \pi$ 代入方程, 相加除以 2 就得到长半轴

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon}\right) = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

由于原点是焦点, 因此短半轴可以计算如下 (参见附图):

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

于是椭圆面积 $S = \pi ab = \dfrac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. □



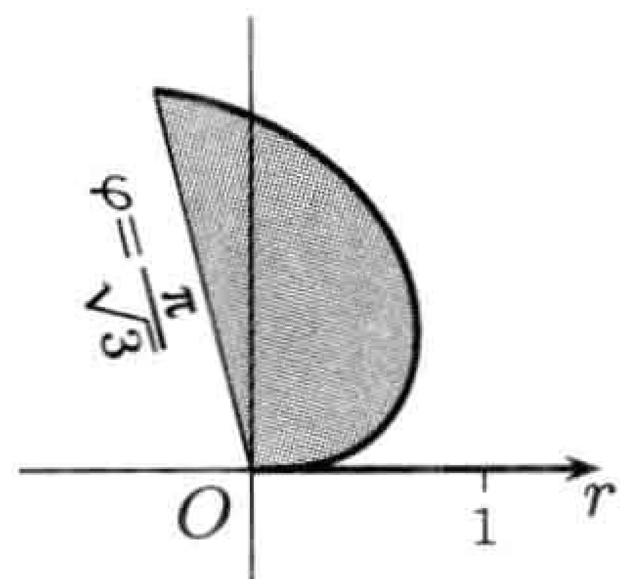
习题 2422(a) 的附图 ($p=1$, $\varepsilon=0.5$, O' 为椭圆中心)

解 2 (概要) 按照极坐标系中的面积计算公式则有

$$S = \frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

然后利用 §3.4.4 的习题 2063 即可. 为了避免奇点, 可以先利用对称性将上述积分的区间缩小为 $[0,\pi]$. □

习题 2424 求由曲线 $\varphi = r\arctan r$ 和二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.



习题 2424 的附图

解 由于 φ 是 r 的严格单调递增函数, 可以作出附图中所示的曲线图像和欲求面积的图形. 按照极坐标系中的面积计算公式, 并用 r 作为积分变量, 则有 $\mathrm{d}\varphi = (\arctan r + \dfrac{r}{1+r^2})\,\mathrm{d}r$, 且当 φ 从 0 到 $\pi/\sqrt{3}$ 时, r 从 0 到 $\sqrt{3}$, 于是可计算如下:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(r^2\arctan r + \frac{r^3}{1+r^2}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{6}r^3\arctan r\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}\,\mathrm{d}r \quad (\text{对积分用代换 } r^2 = R) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int_0^3 \frac{R\,\mathrm{d}R}{1+R} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2. \quad □
\end{aligned}$$

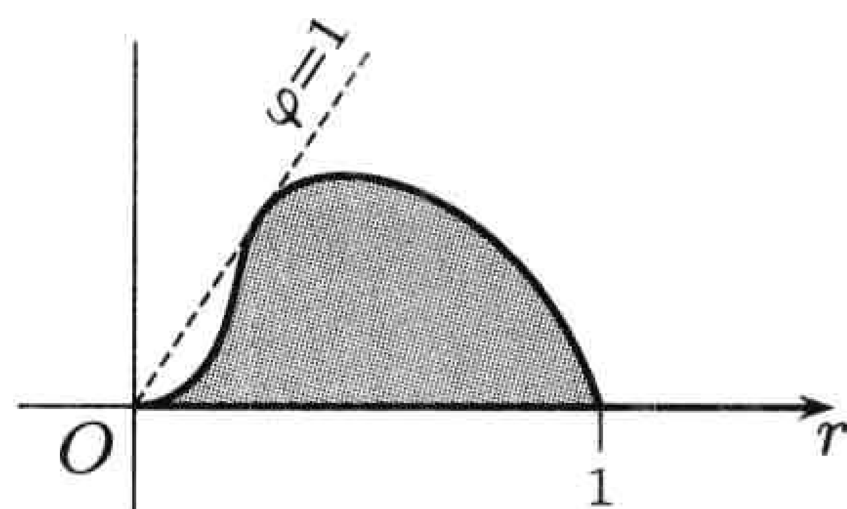
以下看习题 2425 的 5 个小题, 其中前 4 个是新版中增加的.

习题 2425(a) 求曲线 $r^2 + \varphi^2 = 1$ 所围图形的面积.

分析 不妨只考虑 $r \geqslant 0$ 的部分. 这时的曲线在两条射线 $\varphi = \pm 1$ 之间, 当 φ 从 -1 递增至 1 时, r 从 0 递增至 1 后再递减至 0. 因此图形很简单, 求积计算也不难. □

习题 2425 (b) 求花瓣形状的曲线 $\varphi = \sin(\pi r)$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ 所围图形的面积.

解 1 此题需要对曲线的图像有较准确的理解, 否则容易出错 (参见附图).



习题 2425(b) 的附图

从方程可见, 当 r 从 0 递增至 1/2 时, φ 从 0 递增至其最大值 1; 然后当 r 从 1/2 递增至 1 时, φ 从 1 递减至 0. 因此除了 $r = 1/2$ 之外, 每一个 φ 与两个 r 值对应. 将其中小的记为 r_1, 大的记为 r_2, 则就可写出曲线 (与极轴) 所围图像的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi.$$

接下来的问题是求出 r_1, r_2 的表达式.

当 r 从 0 递增至 1/2 时, πr 在 $[0, \pi/2]$ 内, 因此就有

$$r_1(\varphi) = \frac{1}{\pi}\arcsin\varphi.$$

然而当 r 从 1/2 递增至 1 时, πr 在 $[\pi/2, \pi]$ 内, 因此需要改写 $\varphi = \sin(\pi - \pi r) = \sin(\pi(1-r))$ 后才能两边取反正弦得到 $\arcsin\varphi = \pi(1-r)$, 于是解得

$$r_2(\varphi) = 1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\varphi.$$

以下的代入计算已经没有困难, 可进行如下:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(1 - \frac{\arcsin\varphi}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{\arcsin\varphi}{\pi}\right)^2\right]\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{2\arcsin\varphi}{\pi}\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \arcsin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{\pi}. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 以 r 为参数, 用公式 (4.14) 的第三式也是一个好方法. 这里注意到在极轴上的直线段对积分没有贡献, 因此不必考虑.

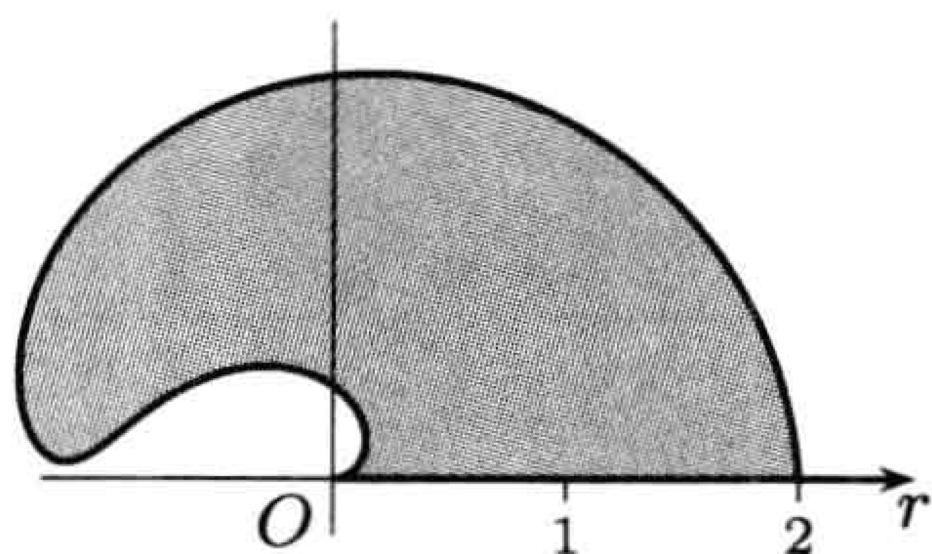
写出参数方程为

$$x(r) = r\cos(\sin\pi r), \quad y(r) = r\sin(\sin\pi r), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

同时注意到当 r 从 0 递增至 1 时点 $(x(r), y(r))$ 以顺时针方向围绕所围区域, 因此在公式前要添上 -1 (参考附图), 然后即可计算如下:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int_0^1 [x(r)y'(r) - y(r)x'(r)]\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2\cos\pi r\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi r \cdot r^2\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\pi r \cdot 2r\,\mathrm{d}r\right) = \int_0^1 r\sin\pi r\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{r}{\pi}\cos\pi r\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\pi}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 2425(c) 求曲线 $\varphi = 4r - r^3$, $\varphi = 0$ 所围图形的面积.



习题 2425(c) 的附图

解 (概要) 本题与上一题类似. 从方程可见, 只需要观察函数 $\varphi(r) = 4r - r^3$ 在 $[0,2]$ 上的变化. 用微分学方法可知, 当 r 从 0 递增至 $2/\sqrt{3} \approx 1.155$ 时, φ 从 0 单调递增至 $16/\sqrt{3} \approx 3.079 \approx 176°$, 而当 r 继续递增至 2 时, φ 则单调递减至 0. 如附图所示, 这条曲线与 $\varphi = 0$ (极轴) 上的直线段 $0 \leqslant r \leqslant 2$ 围成一个平面图形.

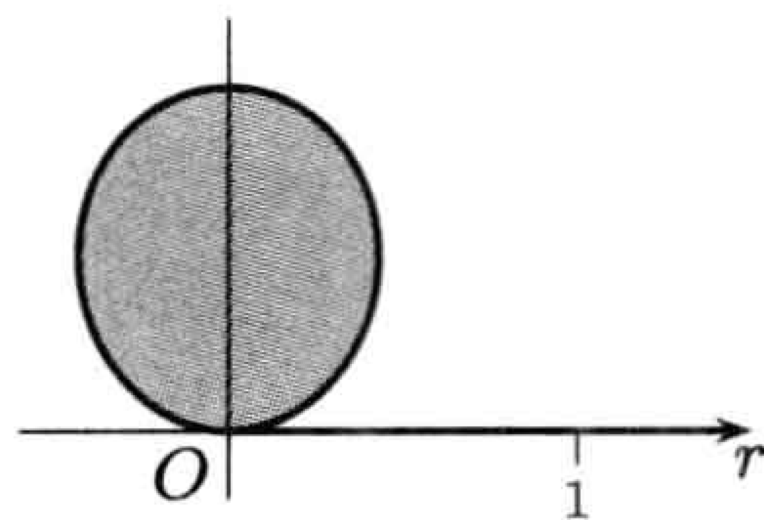
以下的计算从略, 答案是 $S = \dfrac{64}{15}$. □

习题 2425(d) 求曲线 $\varphi = r - \sin r$, $\varphi = \pi$ 所围图形的面积.

分析 由于 φ 是 r 的严格单调递增函数, 图形和计算都更为简单. □

习题 2425(e) 求封闭曲线 $r = \dfrac{2at}{1+t^2}$, $\varphi = \dfrac{\pi t}{1+t}$ 所围图形的面积.

分析 这是由参数方程给出的极坐标系中的曲线. 利用 §1.4.5 中作草图的方法, 容易知道当 t 从 0 递增趋于 $+\infty$ 时, 得到一条封闭曲线. 计算归结为 $[0,+\infty)$ 上的广义积分. 积分的被积函数是有理函数, 利用 §3.3.1 的部分分式分解方法, 或者 §3.3.2 的奥斯特罗格拉茨基方法都不难求解. □



习题 2425(e) 的附图

习题 2427 将 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 变换为极坐标, 求该曲线所围图形的面积.

解 1 用极坐标公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 代入就得到 $r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = a^2r^2$, 因此曲线的极坐标方程为

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}.$$

参考曲线的图像 (见第一册附录二的习题 1542) 后可知所围图形面积为

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}.$$

利用 §4.2.5 的习题 2276, 就得到 $S = \sqrt{2}\,\pi a^2$. □

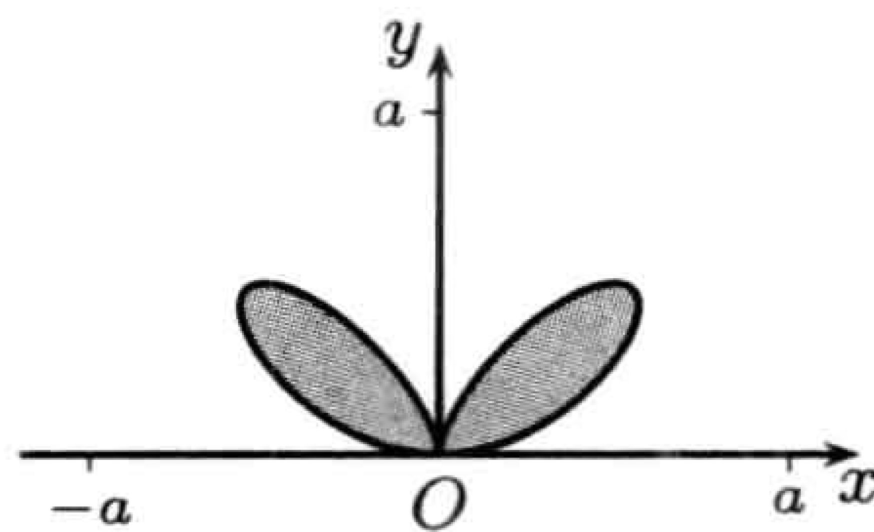
解 2 用 $y = tx$ 引入参数后再用公式 (4.14) 也是方便的, 所得到的参数方程为

$$x = a\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}, \quad y = tx.$$

由于该图形关于 x 轴和 y 轴都对称, 因此只要计算它落在第一象限的那部分面积再乘以 4 即可. 这时参数 t 从 0 到 $+\infty$, 而坐标轴上的直线段在公式 (4.14) 的第三式的积分中的贡献为 0, 因此就得到 (其中利用了该公式后的注 2 和 §4.4.1 的习题 2341 的结果):

$$S = 2\int_0^{+\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t = 2a^2\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi a^2. \quad \square$$

习题 2430 将 $x^4+y^4=ax^2y$ 化为参数方程, 求该曲线所围图形的面积.



习题 2430 的附图

解 1 用 $y=tx$ 代入, 就得到参数方程为

$$x(t)=\frac{at}{1+t^4},\quad y(t)=tx(t).$$

由于 $y(t)\geqslant 0$, 又由于曲线关于 y 轴对称, 因此只要计算参数从 0 到 $+\infty$ 所得到的面积再乘以 2 即可 (参见附图).

用公式 (4.14) 的第三式, 并利用其注 2, 就有

$$S=a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}.$$

作倒代换 $t=\dfrac{1}{u}$, 则有

$$\begin{aligned}S&=a^2\int_0^{+\infty}\frac{u^4\,\mathrm{d}u}{(1+u^4)^2}=\frac{a^2}{4}\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{d}(1+u^4)}{(1+u^4)^2}\\&=\frac{a^2}{4}\Big(-\frac{u}{1+u^4}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}\Big)\\&=\frac{a^2}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}.\end{aligned}$$

对最后一个广义积分可以利用在 §3.2.1 的习题 1884 中求得的不定积分, 或者也可通过倒代换而如下归结为 §4.4.1 的习题 2341:

$$S=\frac{a^2}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{a^2}{8}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}a^2,$$

可见 $S=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{16}a^2\approx 0.278a^2$. □

解 2 (概要) 在极坐标系中, 边界曲线方程为 $r=\dfrac{a\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi]$. 利用图像关于直线 $\varphi=\pi/2$ 对称, 就有

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,\mathrm{d}\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi\\&=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\varphi\,\mathrm{d}(\tan\varphi)}{(1+\tan^4\varphi)^2}\\&=a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2},\end{aligned}$$

以下同解 1. □

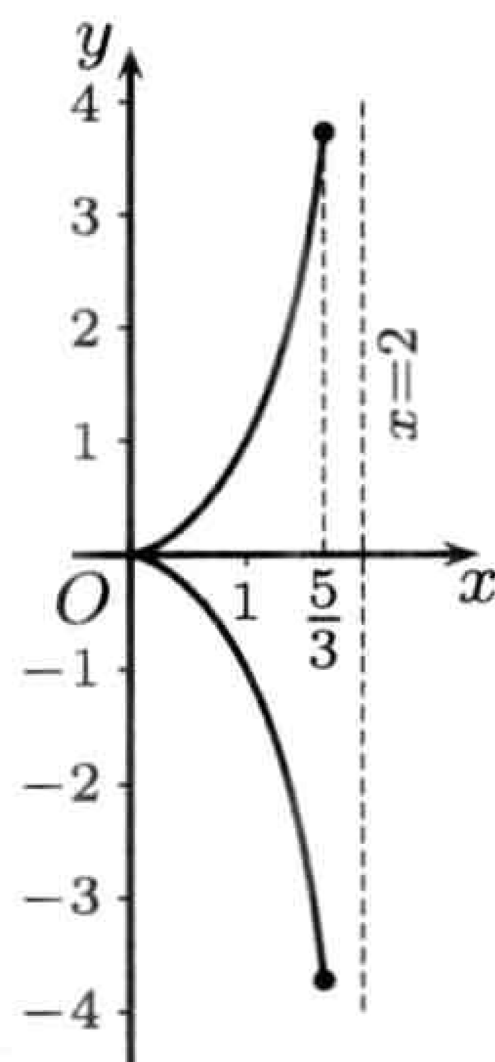
§4.6 弧长的计算法 (习题 2431–2455)

内容简介 本节的习题主要是弧长计算, 最后还有少量证明题.

由于弧长计算公式中出现根式, 这在很多情况下会使得计算较为复杂. 在本节的一些计算题中, §3.3 和 §3.4 中的许多计算技巧都是有用的. 这方面只举下面的例子 (该题的答案在《习题集》的老版中有误).

习题 2439 求曲线 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}\ \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{3}a\right)$ 的弧长.

解 1 因曲线关于 x 轴对称, 只要计算 $y\geqslant 0$ 的弧长乘以 2. (在附图中取 $a=1$, 曲线的端点为 $\left(\dfrac{5}{3},\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}\right)\approx(1.667,\pm 3.727)$, 在第一册附录一的习题 272 中取 $a=5$.)



习题 2439 的附图 (取 $a=1$)

将方程对 x 求导, 可得到 $y'=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(3a-x)}{(2a-x)^{\frac{3}{2}}}$, 于是弧长为:

$$s=2\int_0^{\frac{5a}{3}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2a\int_0^{\frac{5a}{3}}\frac{1}{2a-x}\cdot\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x.$$

利用代换 $t=\sqrt{\dfrac{8a-3x}{2a-x}}$ (参看 §3.1.5 的习题 1782 的解 3 和 §3.3.1 的习题 1933 等), 则有 $x=\dfrac{a(8-2t^2)}{3-t^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{4at}{(t^2-3)^2}\,\mathrm{d}t$, 当 x 从 0 递增至 $5a/3$ 时, t 从 2 递增至 3, 于是就可求积如下:

$$\begin{aligned}
s&=2a\int_0^{\frac{5a}{3}}\frac{1}{2a-x}\cdot\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x\\
&=2a\int_2^3\frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-3}=4a\int_2^3\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)\mathrm{d}t\\
&=a\left(4+12\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_2^3\right)\\
&=a\left(4+2\sqrt{3}\ln\left|\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|\right)\\
&=a[4+2\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})]\approx 8.562a.\quad\square
\end{aligned}$$

解 2 用 $y=tx$ 引入参数 t 则可得到曲线的参数方程为

$$x(t)=\frac{2at^2}{1+t^2},\quad y(t)=\frac{2at^3}{1+t^2},\quad 0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}.$$

然后按照参数曲线的弧长公式得到

$$s=2\int_0^{\sqrt{5}}\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

作代换 $t^2+4=v^2$, 则有 $t\,\mathrm{d}t=v\,\mathrm{d}v$, 于是可与解 1 的计算相同地得到

$$s=4a\int_2^3\frac{v^2\,\mathrm{d}v}{v^2-3}=4a\int_2^3\left(1+\frac{3}{v^2-3}\right)\mathrm{d}v=a[4+2\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})].\quad\square$$

习题 2453 证明: 椭圆 $x = a\cos t,\ y = b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的弧长等于正弦曲线 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

解 从题意有 $a > b > 0$. 将椭圆的弧长记为 s_1, 按照参数方程表示的曲线弧长公式有

$$\begin{aligned}s_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

而题中给出的正弦曲线的一个波的长度即是一个周期 $T = 2\pi b$ 上的曲线长度, 将它记为 s_2, 则有

$$\begin{aligned}s_2 &= \int_0^{T} \sqrt{1 + (y_x')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}\cdot\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{2\pi b} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right)\ (\text{然后作代换 } t = x/b)\\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对最后一个积分作代换 $u = \frac{\pi}{2} - t,\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, 并利用周期函数在一个周期长度的区间上的积分不变性 (见 §4.2.5 的习题 2265), 就有

$$\begin{aligned}s_2 &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \sqrt{b^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

可见 $s_2 = s_1$. □

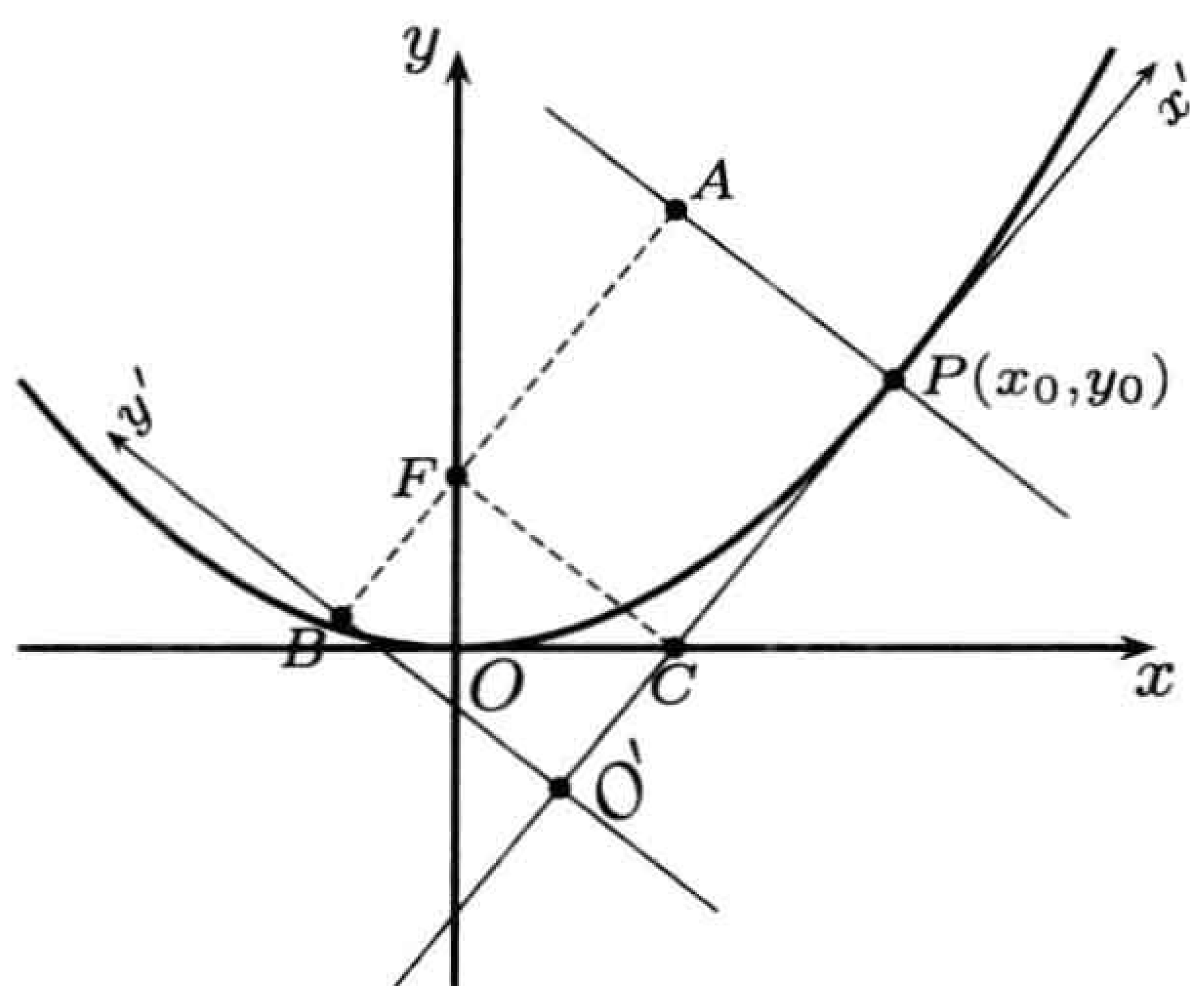
注 弧长计算公式中的根式带来的一个出乎意料的后果就是, 如椭圆这样人们熟知的曲线, 它的弧长都只能表示为一个定积分, 而不能用初等函数表示出来. 原因在于上述椭圆弧长的积分公式中, 被积函数的原函数不是初等函数. 这直接导致被称为椭圆积分的几类特殊函数. 它们在数学的多个分支和应用领域中出现. 与椭圆全周长直接有关的是下面的第二类全椭圆积分:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $k \in (0, 1)$. 于是可看出, 本题中的椭圆周长 $s = 4aE(k)$, 其中 $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, 即椭圆的离心率.

关于椭圆周长的近似计算例子见后面 §4.11 的习题 2544. 在数学分析教科书中对于椭圆积分的介绍见 [15] 的第二卷的 §8.5, 从该书的索引还可查到在数学分析中与椭圆积分有关的许多其他材料.

习题 2454 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明: 抛物线的焦点的轨迹是悬链线①.



习题 2454 的附图

解 利用运动的相对性, 不如考虑将 Ox 轴作为抛物线在原点的切线沿着抛物线滚动.

如附图所示, 粗黑曲线为抛物线 $4ay = x^2$. 其焦点为 $F(0, a)$. 设 Ox 轴已经滚动到达抛物线在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线的位置, 然后我们来计算焦点在新的坐标系中的位置.

为此先要确定新坐标系的原点 O' 的位置. 由导数 $y'(x_0) = \dfrac{1}{2a}x_0$ 即可写出点 P 的切线方程为

$$Y - y_0 = \frac{x_0}{2a}(X - x_0).$$

这条切线就是新的横坐标轴 $O'x'$. 其中的原点 O' 可以根据 P 点到 O' 的距离等于抛物线上从原点 O 到点 $P(x_0, y_0)$ 的弧长来确定. 根据弧长公式有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{1}{4a^2}x^2}\,\mathrm{d}x = 2a\int_0^{x_0/2a} \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2a\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{u^2+1})\right]\Bigg|_0^{x_0/2a} \\ &= \frac{x_0}{4a}\sqrt{x_0^2 + 4a^2} + a\ln\left[\frac{1}{2a}\left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 4a^2}\,\right)\right]. \end{aligned}$$

然后作出过点 $P(x_0, y_0)$ 的法线 $Y - y_0 = -\dfrac{2a}{x_0}(X - x_0)$, 即可求出焦点 F 到该法线的距离, 即附图中虚线表示的直线段 FA 的长度. 按照底注中公式求出为 $\dfrac{x_0}{4a}\sqrt{x_0^2 + 4a^2}$. 将它从弧长 s 中减去之后就得到焦点在新坐标系中的横坐标, 即附图中线段 FB 的长度. 为下面方便起见, 将 x_0 改记为参数 t, 就得到

$$x(t) = a\ln\left[\frac{1}{2a}\left(t + \sqrt{t^2 + 4a^2}\,\right)\right]. \tag{4.15}$$

接下来再求焦点在新坐标系中的纵坐标, 即 F 到直线段 PO' 的距离, 在附图中就是虚线标出的直线 FC 的长度. 按照底注的公式并将 x_0 改为 t 就得到

$$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + 4a^2}. \tag{4.16}$$

最后只要从以上参数方程消去 t. 先从 (4.15) 有 $\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} = \dfrac{\sqrt{t^2 + 4a^2} + t}{2a}$, 并由此可计算得到 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} = \dfrac{\sqrt{t^2 + 4a^2} - t}{2a}$. 将它们相加除以 2, 并利用 (4.16), 就得到

① 本题的求解中需要在中学数学平面解析几何中学到的一些知识. 为读者方便起见叙述如下.

1. 抛物线是平面内到一个定点 F和一条定直线 l (F 不在 l 上) 距离相等的点的轨迹, 点 F 叫做焦点, l 叫做准线. 由此容易验证, 对于本题的抛物线 $4ay = x^2$ 来说, 焦点坐标为 $(0, a)$, 准线方程为 $y = -a$.

2. 点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}}{2}=\frac{\sqrt{t^2+4a^2}}{2a}=\frac{1}{a}y,$$

也就是有 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$, 即悬链线方程. □

注 1　在以上求解的过程中, 新坐标系是随着横坐标轴沿着抛物线滚动而不断变动的. 这样做只需要画出一条抛物线. 同样可以再利用运动的相对性, 将附图中以 O' 为原点的坐标系看成为固定, 而以 O 为原点的坐标系则与抛物线一起滚动, 这样就与原问题的提法一致.

注 2　将曲线 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ 称为悬链线, 因为它是一条两端悬挂着的均匀柔软的细线 (链或电线) 在平衡状态时所取的形状, 其证明见本书在 §4.10 的最后的补充.

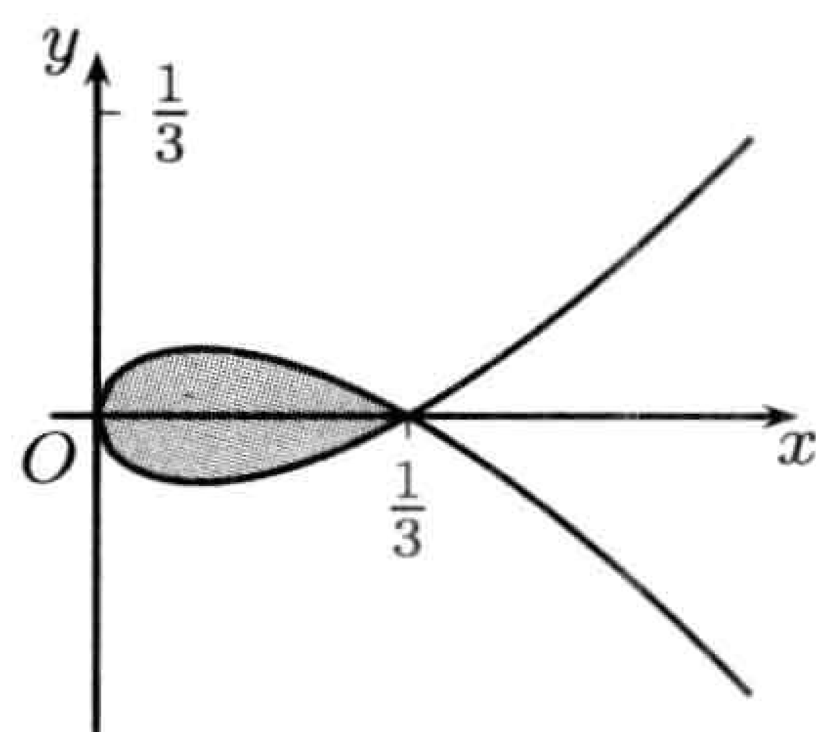
习题 2455 求曲线

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$$

的封闭部分与等周长圆周所分别围成的面积之比.

解　在附图中作出曲线 $y=y(x)$ 的图像, 由题意需要同时求出该曲线所包围的 (阴影区) 面积和围线的长度. 从图形关于 Ox 轴的对称性可求出面积为

$$S=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\left(\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}$$
$$=4\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{45}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{8}{135\sqrt{3}}.$$



习题 2455 的附图

利用 $y'=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, 即可求出 $\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, 于是即可得到周长为

$$s=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

由此周长可求出等周长的圆的半径为 $R=\dfrac{4}{6\sqrt{3}\pi}$, 从而知道该圆的面积等于

$$S_1=\pi R^2=\frac{4}{27\pi}.$$

这样就得到阴影区面积与等周长的圆面积之比为

$$S:S_1=\frac{8}{135\sqrt{3}}:\frac{4}{27\pi}=\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}:1\approx 0.726:1.\quad\square$$

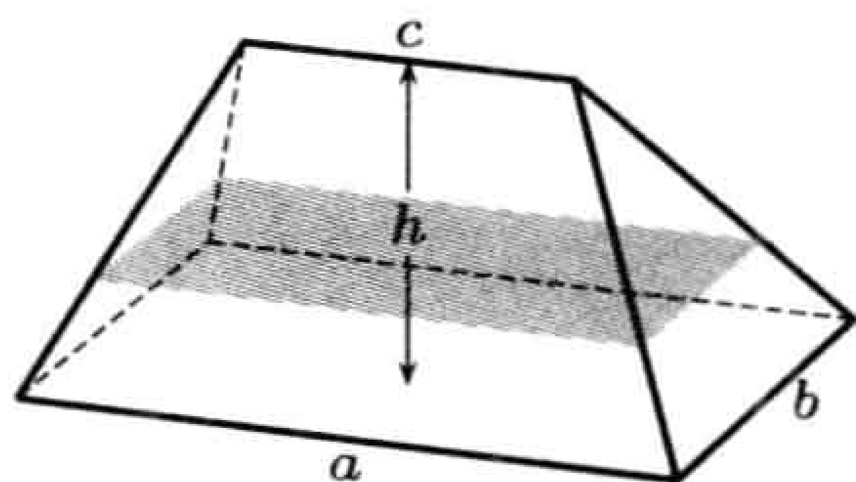
注　根据著名的等周定理, 在周长相等的一切简单闭曲线中, 圆所包围的面积最大 (参见 [34] 的 §24.3.4). 因此本题最后得到的比率小于 1 是在意料之中的.

§4.7 体积的计算法 (习题 2456–2485)

内容简介 在能够求出空间几何体被一族平行平面 (一般是平行于某个坐标面) 相截的截面面积时, 该几何体的体积就有可能用定积分求出. 下面第一小节含有这方面的初步训练和两个理论题, 后两个小节是求给定曲面所围体积和旋转体体积. 对于由参数方程曲线生成的旋转体体积给出一个新公式, 其证明见最后的补注小节.

4.7.1 用截面面积的积分求体积 (习题 2456–2461)

习题 2456 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c, 而高等于 h.



习题 2456 的附图

解 1 在附图中作出了顶楼的示意图. 为简明起见, 对长度分别为 a, b, c 的边就用这些符号来称呼它们.

设顶楼的顶棱 c 与底边 a 平行. 取坐标轴 Ox 垂直于底面且指向下方, 其原点在棱 c 上, 这时的底面与 yOz 坐标面平行 (未画出).

用平行于底面的平面与此几何体相截, 其截面 (附图中的阴影区) 也是矩形. 它的面积是 x 的函数, 记为 $S(x)$, $0 \leqslant x \leqslant h$. 于是只要求出 $S(x)$ 后在 $[0, h]$ 上对 x 积分即可求得顶楼的体积.

可以证明[①], 截面的两边边长都是 x 的线性函数 $Ax + B$, 然后根据 $x = 0, h$ 时的已知值即可确定系数 A 和 B. 这样就可以计算得到矩形截面的平行于底边 a 的边长是 $\dfrac{a-c}{h}x + c$, 平行于底边 b 的边长是 $\dfrac{b}{h}x$. 于是就有

$$S(x) = \left(\frac{a-c}{h}x + c\right) \cdot \frac{b}{h}x = \frac{(a-c)b}{h^2}x^2 + \frac{bc}{h}x.$$

最后通过积分就得到

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left[\frac{(a-c)b}{h^2}x^2 + \frac{bc}{h}x\right] \mathrm{d}x = \left[\frac{(a-c)b}{3h^2}x^3 + \frac{bc}{2h}x^2\right]\Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3}(a-c)bh + \frac{1}{2}bch \\ &= \frac{1}{3}abh + \frac{1}{6}bch. \quad \square \end{aligned}$$

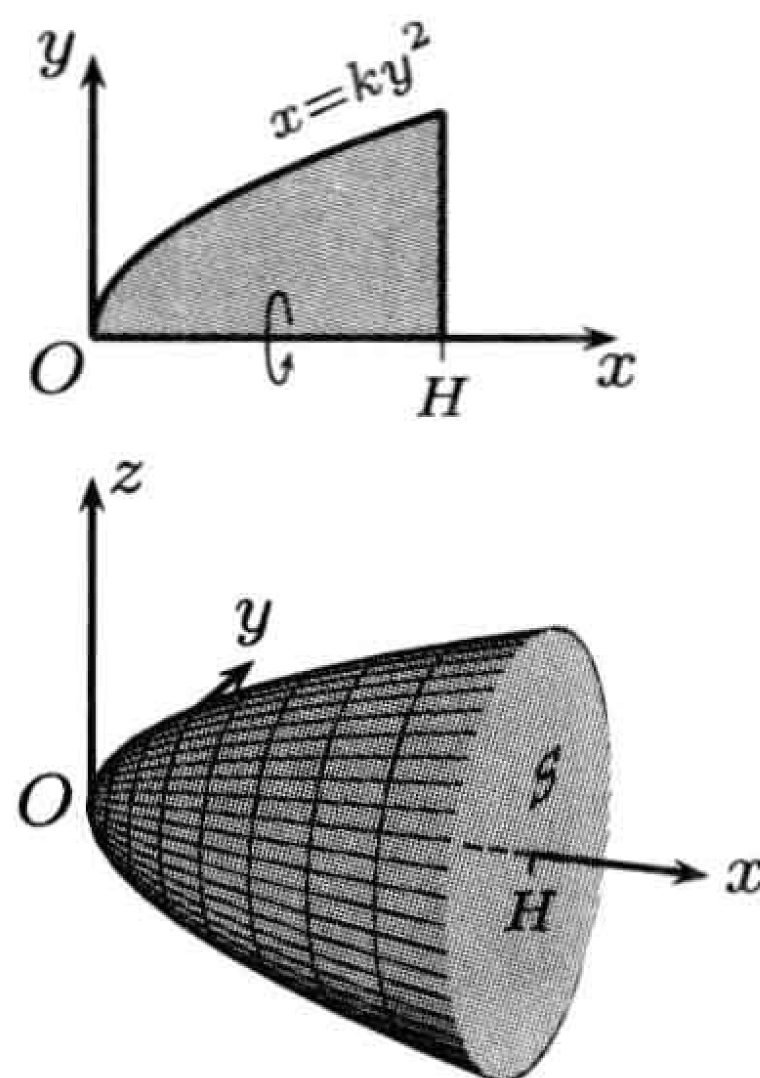
解 2 如解 1 所示, 在具体计算之前已经可以确定截面面积 $S(x)$ 是 x 的二次函数, 因此满足后面的习题 2460 中的条件, 这样就可以用该习题提供的辛普森公式来进行计算. 这时顶截面面积为 0, 底截面面积为 ab, 中截面矩形的边长为 $\dfrac{a+c}{2}$ 和 $\dfrac{b}{2}$, 因此面积为 $\dfrac{1}{4}(a+c)b$. 这样就有

$$V = \frac{h}{6}\left[0 + 4 \cdot \frac{1}{4}(a+c)b + ab\right] = \frac{h}{6}(2ab + bc). \quad \square$$

① 这从相似三角形的几何关系即可看出, 细节从略.

习题 2459 求旋转抛物体的体积, 其底为 S, 而高等于 H.

解 1 如附图所示, 设抛物线的方程为 $x = ky^2$ $(0 \leqslant x \leqslant H)$, 由该曲线在 $y \geqslant 0$ 的部分与直线 $x = H$ 和 $y = 0$ 围成的图形绕 Ox 轴旋转而得到题中的旋转抛物体.



习题 2459 的附图

对 $x \in (0, H]$, 用平行 yOz 坐标面的平面 $X = x$ 与上述旋转抛物体相交的截面是半径为 y 的圆, 因此其面积是 $S(x) = \pi y^2 = \dfrac{\pi x}{k}$. 根据 $x = H$ 时的底面积为 S, 即可确定出系数 $k = \dfrac{\pi H}{S}$. 这样就得到了截面面积为 $S(x) = \dfrac{S}{H}x$.

最后只要求积如下:

$$V = \int_0^H \frac{S}{H} x \,\mathrm{d}x = \frac{S}{H} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^H = \frac{1}{2}SH. \quad \square$$

解 2 从解 1 的分析就知道 $S(x)$ 是 x 的线性函数, 因此不必求出系数 k 就可以直接用习题 2460 提供的辛普森公式, 于是有

$$V = \frac{H}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{S}{2} + S\right) = \frac{1}{2}HS. \quad \square$$

习题 2460 (辛普森公式) 设物体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$ 依二次规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \ \ (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 A, B, C 为常数. 证明: 此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

其中 $H = b - a$.

解 从 $V = \displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ 出发, 利用积分关于被积函数的线性性质, 只需要对于 $1, x, x^2$ 分别验证公式成立即可.

对于 $S(x) = 1$ 有

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a = \frac{b-a}{6}(1 + 4 + 1);$$

对于 $S(x) = x$ 有

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b-a}{6}\left(a + 4 \cdot \frac{a+b}{2} + b\right);$$

对于 $S(x) = x^2$ 有

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{b-a}{6}\left[a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^2\right]. \quad \square$$

注 1 还可以验证对于 x^3 的辛普森公式也是成立的. 实际上对于 $S(x) = x^3$ 有

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\bigg|_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right],$$

因此对于 $S(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 来说辛普森公式均精确成立.

注 2 辛普森公式对于包括球体在内的很多几何体的体积计算都能提供精确的答案, 因此俗称为万能公式 [3]. 它甚至还能用于许多平面图形的面积计算, 只要将三个截面面积改为三段截线的长度即可. 然而辛普森公式对于圆面积计算却是不准确的.

习题 2461 一物体是点 $M(x,y,z)$ 的集合, 其中 $0 \leqslant z \leqslant 1$, 并且当 z 为有理数时, $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$; 而当 z 为无理数时, $-1 \leqslant x \leqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 0$. 证明: 此物体的体积不存在, 尽管相应积分

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

分析 本题提出了几个不能回避的问题, 首先, 什么叫一个物体的体积? 或者说, 体积的数学定义是什么? (对于平面图形的面积也可以提出类似的问题.) 其次, 用截面面积的积分计算体积有什么根据?

由于这两个问题一般要到多重积分学中才会讨论, 因此建议初学者暂时跳过本题, 到以后再学. 下面只对第一个问题作一个简要的介绍. 对于这些问题的经典性论述可以参考 [15] 的第二卷的 §10.2“面积与体积”, 特别是其中的 340–342 小节. 还可以参考 [16] 的第九章中的 82–86 节.

下面只谈体积问题, 其起点是假设空间多面体的体积已经有确定的意义和数值.

对于一般点集 A 是否有体积的问题, 在数学上采用以下方法: 即考虑包含 A 的所有多面体, 取它们的体积的下确界, 同时又考虑为点集 A 所包含的所有多面体, 取它们的体积的上确界. 点集 A 有体积的充要条件是上述两个确界相等, 并在相等时将这个数值定义为点集 A 的体积.

在具备以上知识之后, 本题的点集不可求体积就变得非常明显了. □

解 实际上, 本题的点集不含有任何内点, 即其中的任何点都不会带有仍然在该点集中的一个邻域, 因此这样的点集不包含任何含有内点的多面体. 于是点集所包含的只能是体积为 0 的退化多面体, 它们的上确界也是 0. 另一方面, 本题的点集有界, 且包含该点集的任何多面体必定同时包含两个立方体 $\{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x,y,z \leqslant 1\}$ 和 $\{(x,y,z) \mid -1 \leqslant x,y \leqslant -1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, 因此所有这样的多面体的体积都大于等于 2, 从而它们的下确界也大于等于 2.

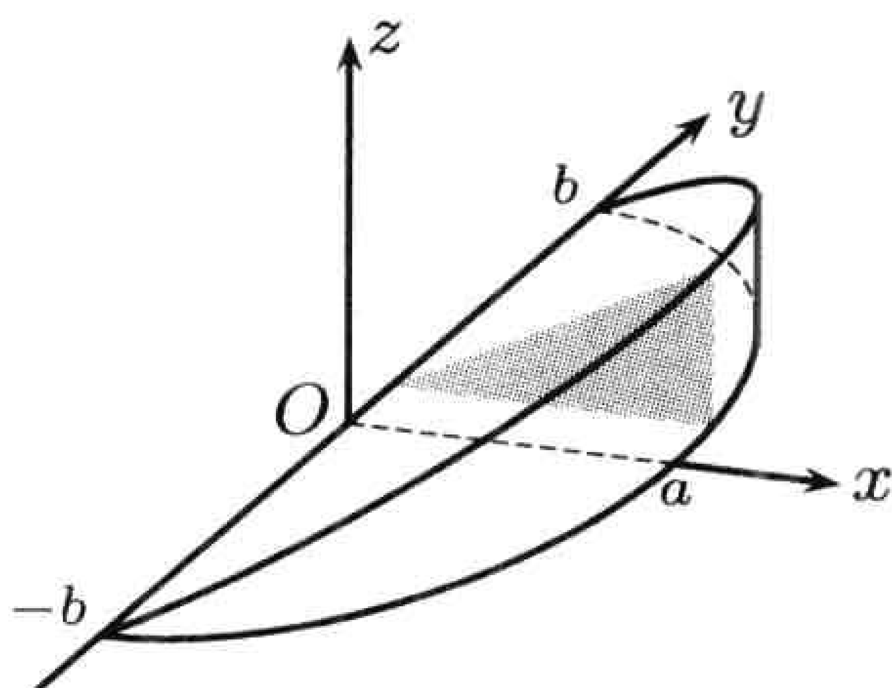
于是可见两个确界分别为 2 和 0, 因此该点集不存在体积. 至于题中的积分为 1 是明显的, 但既然该点集没有体积, 因此这个积分与体积问题毫无关系.

本题的例子说明, 用截面面积的积分来计算几何体的体积是以该几何体可求体积为前提的. □

注 利用多元微积分中建立的体积定义及其用积分计算的合理性, 可以证明本节中除本题之外的几何体的体积都有定义, 而且都可以用截面面积的积分求得.

4.7.2　求给定曲面包围的体积 (习题 2462–2470)

习题 2462 求曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=\dfrac{c}{a}x$, $z=0$ 所围成的体积.



习题 2462 的附图

解 1　如附图所示 (只考虑 $x\geqslant 0$ 的部分), 用平行于 zOx 坐标面的平面 $Y=y$ ($y\in[-b,b]$) 与题设的几何体相截, 得到用阴影表示的直角三角形. 将它的面积记为 $S(y)$, 则从曲面方程可以计算出三角形的两个直角边为

$$a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},$$

于是就得到

$$S(y)=\frac{ac}{2}\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big).$$

然后即可利用对称性计算积分如下:

$$V=2\int_0^b S(y)\,\mathrm{d}y=ac\int_0^b\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big)\,\mathrm{d}y=acb-\frac{ac}{3b^2}y^3\Big|_0^b=\frac{2}{3}abc.\quad \square$$

解 2　若用平行于 yOz 坐标面的平面 $X=x$ ($x\in[0,a]$) 与几何体相截, 则得到的是矩形, 它的相邻两边的长度为

$$2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad \frac{cx}{a},$$

于是得到截面面积为 $S(x)=\dfrac{2bcx}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, 最后可求积如下:

$$\begin{aligned}V&=\int_0^a S(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2bc}{a}\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2bc}{a}\cdot\Big[-\frac{a^2}{3}\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]\Big|_0^a=\frac{2}{3}abc.\quad \square\end{aligned}$$

注　在用截面面积的积分计算体积时, 选取何种平面与几何体相截是需要斟酌的. 本题若用平行于 xOy 坐标面的平面 $Z=z$ ($z\in[0,c]$) 去相截就可能会导致复杂的计算.

习题 2463 求曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (椭球面) 所围成的体积.

解　用平行于 yOz 坐标面的平面 $X=x$ ($x\in[-a,a]$) 与椭球体相截, 得到的是由椭圆曲线

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

所围的椭圆. 将上式两边除以 $1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 即得到椭圆方程的标准形式, 就可以求出椭圆的两个半轴长, 从而即可求出截面面积为

$$S(x)=\pi bc\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big),$$

然后即可求积如下:

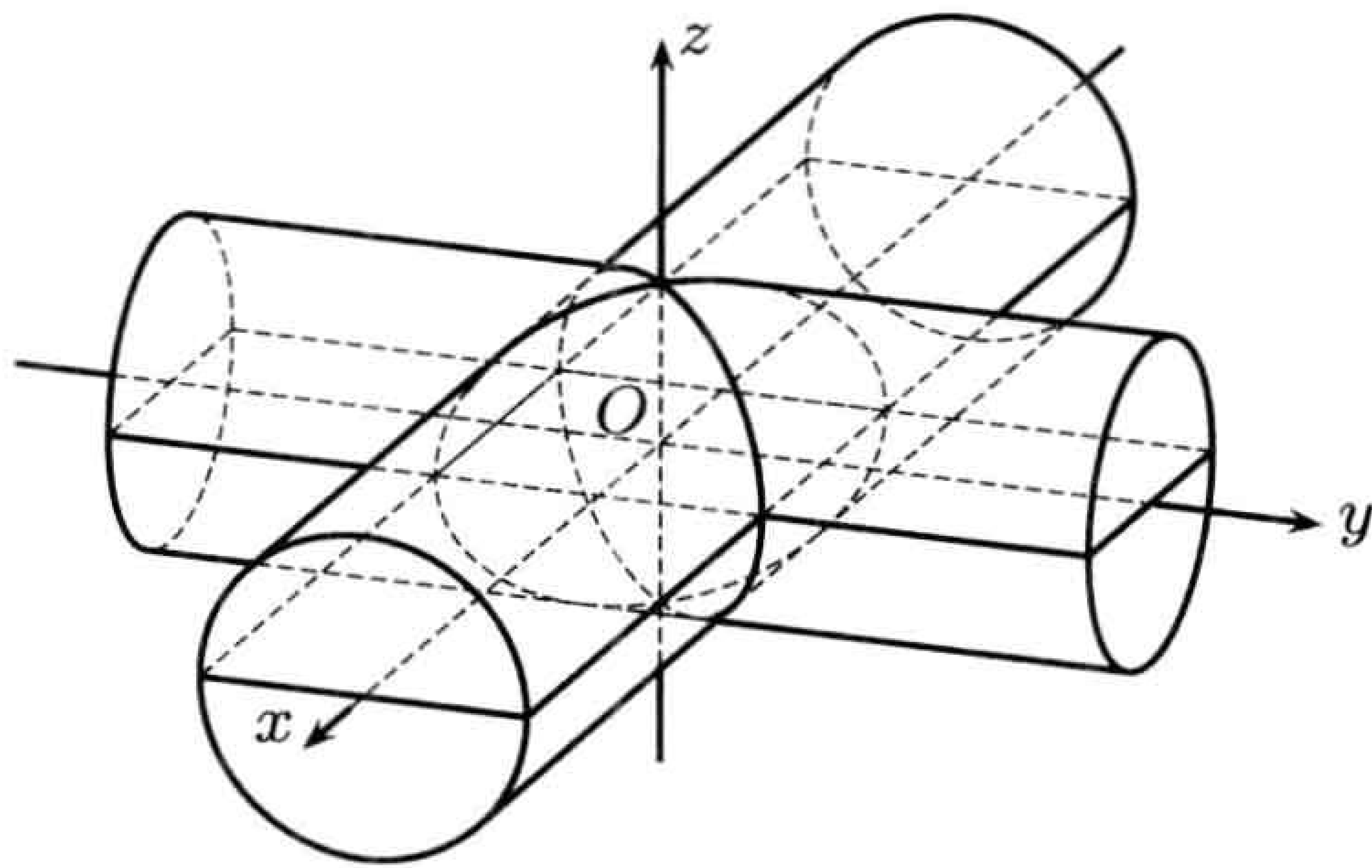
$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.\quad\square$$

注　与 §4.5 中求椭圆面积的习题 2403 作比较, 上述解法相当于那里的解 1. 今后在学了多元积分学之后, 本题还可以有许多种其他解法.

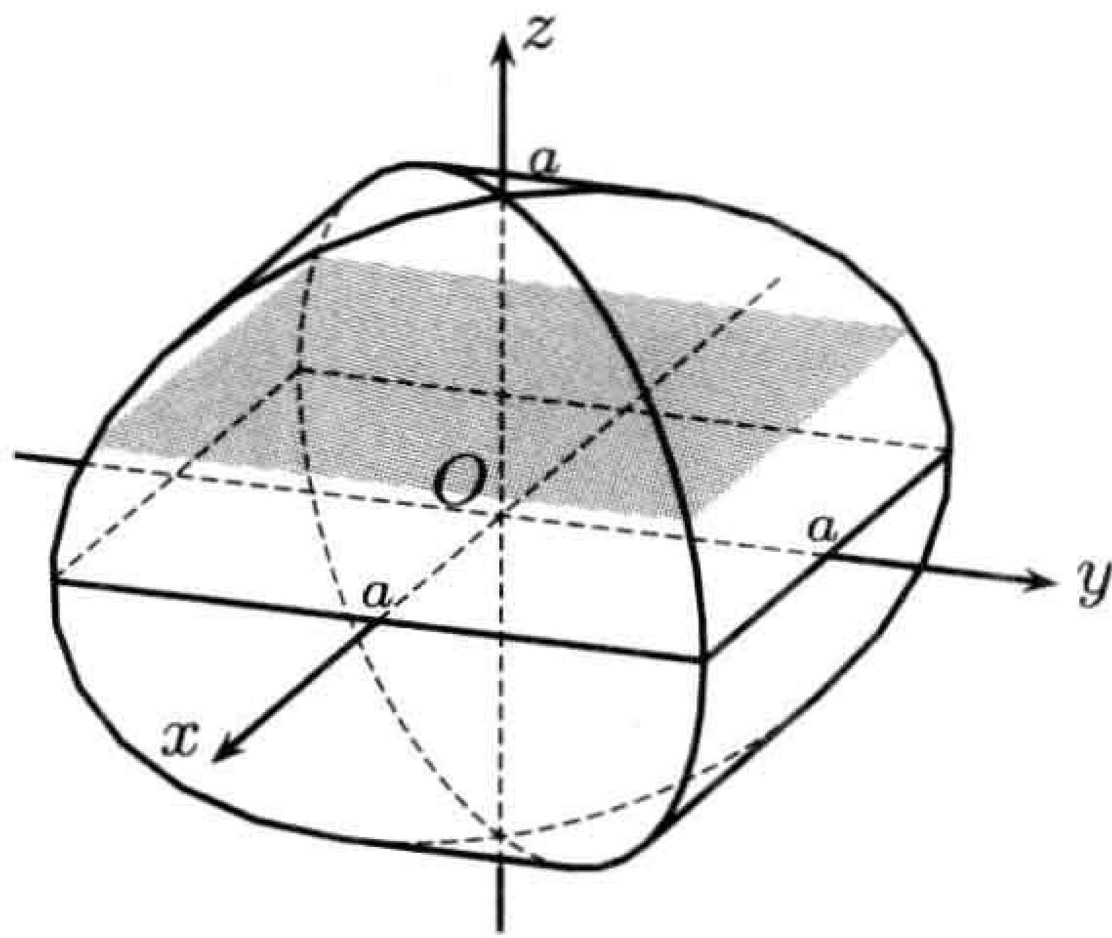
习题 2465 求曲面 $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ 所围成的体积.

解　如附图 1 所示, 这个几何体是两个正交圆柱体 $x^2+z^2\leqslant a^2$ 和 $y^2+z^2\leqslant a^2$ 的公共部分. 在附图中还作出了这两个圆柱体与平面 $z=0$ 的相交平面.

如附图所示, 从 Ox 轴和 Oy 轴方向看该几何体 (即前视图和侧视图) 是半径为 a 的圆, 而从 Oz 轴方向看 (即顶视图) 则是边长为 $2a$ 的正方形.



习题 2465 的附图 1



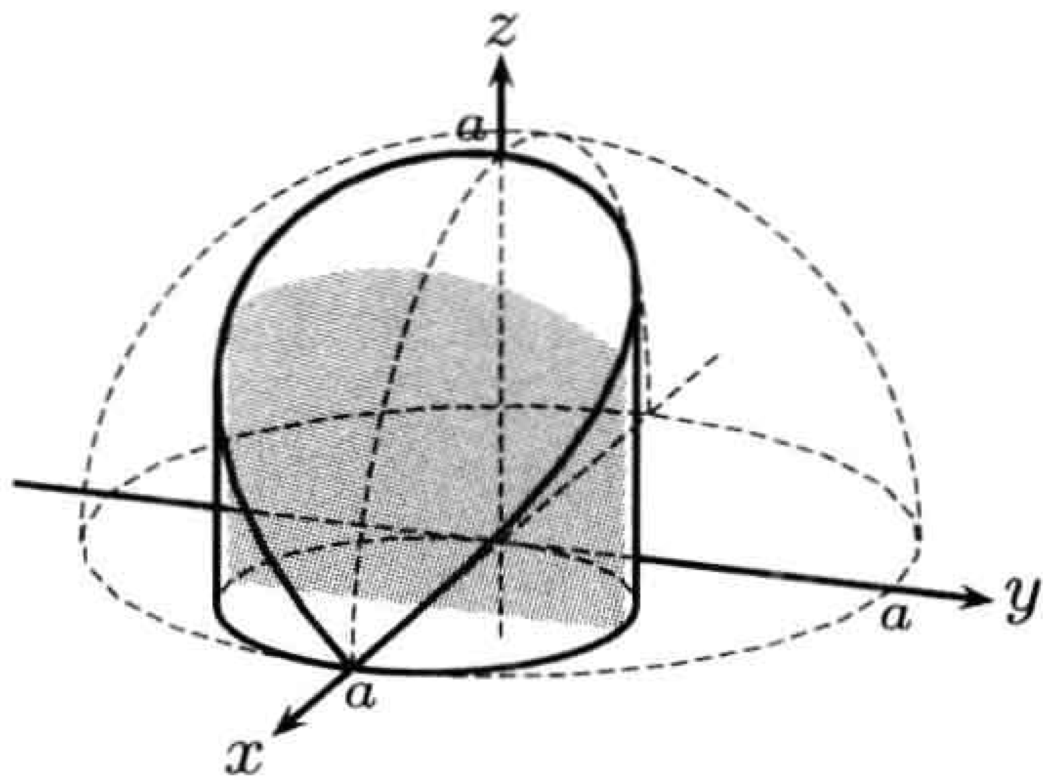
习题 2465 的附图 2

如附图 2 所示, 用平行于 xOy 坐标面的平面 $Z=z\ (-a\leqslant z\leqslant a)$ 与几何体相截得到的是正方形, 其边长为 $2\sqrt{a^2-z^2}$, 因此截面面积 $S(z)=4(a^2-z^2)$. 于是体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(z)\,\mathrm{d}z=\frac{16}{3}a^2.\quad\square$$

注 1　本题若用平行于 yOz 或 zOx 坐标面的平面去截并计算截面面积, 则也可求出体积, 只是不如上述解法方便.

注 2　本题的几何体在西方最早出现在阿基米德的著作中, 他计算出其体积为外切正立方体的体积的 2/3 (见 [2] 的《方法篇》的最后一题). 这个几何体在中国古代则根据其形状称为牟合方盖, 它是由刘徽提出来的, 见《九章算术》的刘徽注 [18].



习题 2466 的附图

习题 2466 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ 所围成的体积.

解　这是著名的维维亚尼体. 在附图中作出了 $z\geqslant 0$ 的部分, 同时用虚线表示与它有关的球体 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半球. 为方便起见, 利用将 $x=ax', y=ay', z=az'$ 代入曲面方程后即可消去 a, 可见只需要对 $a=1$ 进行计算, 然后将结果乘以 a^3 就得到最后的答案.

用平行于 yOz 坐标面的平面 $X=x$ 与维维亚尼体相截, 得到附图中阴影区所示的截面, 它的三边都是直线段, 顶部是球面上的圆弧. 对 y 求积得到截面面积为

$$S(x) = 2\int_0^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \text{ (用 §3.1.6 的 (3.6) 之一)}$$
$$= \Big(y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x-x^2}}$$
$$= \sqrt{x}(1-x) + (1-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

然后再对截面面积积分就得到所要求的体积:

$$V = 2\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 (1-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

对右边的第一个积分可直接计算得到

$$2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

对第二个积分则需要先作分部积分后求积如下:

$$2\int_0^1 (1-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\Big(x-\frac{x^3}{3}\Big)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big]\Big|_0^1$$
$$- 2\int_0^1 \Big(x-\frac{x^3}{3}\Big)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{3} - \int_0^1 \Big(\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{x}\Big)\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

对最后一个积分用代换 $x = t^2$, 于是就可得到

$$\int_0^1 \Big(\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{x}\Big)\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^2 - \frac{2}{3}t^6}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \Big(-t^4 + t^2 + 2 - \frac{2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 2 - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{64}{45} - \frac{\pi}{3}.$$

合并以上计算就得到

$$V = \frac{\pi}{3} + \frac{8}{15} - \frac{64}{45} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}.$$

于是最后的答案是 $\Big(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\Big)a^3$. □

注 1 若用平行于其他两个坐标面之一的平行平面去截维维亚尼体, 则计算量一般并没有变得更少. 对于学过重积分的读者来说, 这些不同的选择相当于重积分中的积分顺序交换, 它们有时会在计算量上有较大的差别. 对于维维亚尼体的体积, 存在很简单的计算方法, 只是这时需要利用重积分中的积分代换方法 (见 §8.3 的习题 4016).

注 2 曾经有人猜测, 由球面等曲面围成的几何体的体积或表面积应当与 π 有关. 从维维亚尼体的上述体积计算可见, 如果从球体中再除去一个维维亚尼体 (即再去掉落在 $x^2 + y^2 = -ax$ 中的部分), 则所余的体积为

$$\frac{4}{3}\pi a^3 - 2\Big(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\Big)a^3 = \frac{16}{9}a^3,$$

它与 π 无关. 这样就否定了上述猜测. 此外, 还可以发现, 上述几何体的表面积也与 π 无关, 因此与曲面有关的猜测也被否定了 [25] (见 §8.4 的习题 4040).

习题 2470 求曲面 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$ 所围成的体积.

解 用平行于 xOy 坐标面的平面 $Z=z$ 去截该几何体, 其截面的边界曲线是

$$x^2+xy+y^2+yz+zx+z^2-a^2=0.$$

从解析几何知识即可判定这是平面 $Z=z$ 上的椭圆, 只是它的中心不一定在 z 轴上. 利用配方法即可求出其中心为 $\left(-\frac{z}{3},-\frac{z}{3}\right)$, 并可写出如下的椭圆方程:

$$\left(x+\frac{z}{3}\right)^2+\left(x+\frac{z}{3}\right)\left(y+\frac{z}{3}\right)+\left(y+\frac{z}{3}\right)^2=a^2-\frac{2}{3}z^2.$$

利用在 §4.5 的习题 2406 所得的公式 $S=\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$, 就知道只要将上式右边的常数除到左边, 就可以求出截面面积为

$$S(z)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(a^2-\frac{2}{3}z^2\right).$$

同时从上述计算还可以确定 z 的取值范围为 $|z|\leqslant\sqrt{\dfrac{3}{2}}a$, 因此即可积分如下:

$$V=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3/2}a}\left(a^2-\frac{2}{3}z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.\quad\square$$

4.7.3 旋转体的体积计算 (习题 2471–2485)

旋转体作为一类特殊的几何体, 有两种常见的生成方式, 一种是将某个平面图形绕轴旋转, 其中一般假设旋转轴不穿过图形的内部; 另一种是由某条闭曲线绕轴旋转得到的曲面所围成, 其中一般也假设旋转轴不穿过闭曲线所围图形的内部.

对旋转体来说, 用垂直于旋转轴的平面与之相截所得的截面一般不是圆就是圆环①, 因此截面面积的计算比较简单. 然而根据图形边界描述的不同方法, 其中包括在直角坐标系或极坐标系中, 或者用参数方程表示, 计算的公式也有所不同. 这方面比较一般的是下列命题. 它可以看成是 §4.5 中的面积计算公式 (4.14) (即命题 4.14) 在旋转体体积计算中的一种推广, 且可推出直角坐标系和极坐标系中的旋转体体积公式.

命题 4.15 设无自交点的平面封闭曲线的参数方程为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 $x(t),y(t)$ 分段连续可微, $y(t)\geqslant 0$, 当参数 t 从 0 递增到 T 时, 点 $(x(t),y(t))$ 以逆时针方向绕闭曲线一周, 则该曲线包围的平面图形绕 Ox 轴旋转得到的旋转体体积为

$$\boxed{\begin{aligned}V_x&=-\pi\int_0^T y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^T x(t)[y^2(t)]'\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^T x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^T\{-y^2(t)x'(t)+x(t)[y^2(t)]'\}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}}\tag{4.17}$$

① 也可以是由圆与圆环组成, 其中的圆环个数甚至可能有无限多个.

可以看出, 只要在面积公式 (4.14) 中将 $y(t)$ 换为 $\pi y^2(t)$ 就得到体积公式 (4.17).

与命题 4.14 的公式 (4.14) 一样, 它的严格证明需要多元积分学中的知识, 因此我们将命题 4.15 的证明放到本节最后的补注小节 §4.7.4 中去, 供学过有关知识的读者参考, 而在此前只讲其应用.

下面的习题 2471 对旋转体提出了与截面面积积分不同的体积计算方法, 它相当于公式 (4.17) 中的第二个公式 (但交换 x 与 y). 这对某些旋转体的体积计算是方便的.

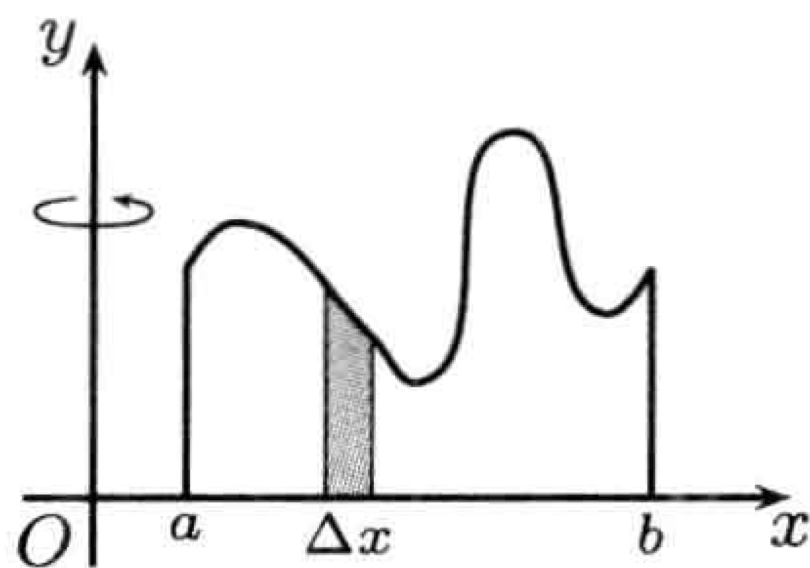
习题 2471 证明, 将平面图形[①]

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant y(x)$$

绕 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积等于

$$V = 2\pi \int_a^b x\, y(x)\, \mathrm{d}x,$$

这里 $y(x)$ 为单值连续函数.



习题 2471 的附图

几何分析　如附图所示作出由 $y(x)$ $(x \in [a,b])$ 确定的曲边梯形, 考虑以 Δx 为底的阴影区绕 Oy 轴旋转所得的旋转体体积. 利用 $y(x)$ 连续, 当 Δx 充分小时, 可近似地将它看成为高是 $y(x)$ 的一个矩形, 这样就不难想象出这个矩形绕 Oy 轴旋转得到的乃是两个高为 $y(x)$ 而半径为 x 和 $x + \Delta x$ 的圆柱体之差, 即一个圆筒. 其内侧面面积就是 $2\pi x y(x)$. 圆筒的体积近似为

$$\Delta V = \pi[(x + \Delta x)^2 - x^2]y(x) \approx 2\pi x\, y(x)\, \Delta x.$$

由此可见, 在分划的细度趋于 0 时, ΔV 之和的极限就是积分 $2\pi \int_a^b x y(x)\, \mathrm{d}x$.　□

解　设分划为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 利用 $y(x)$ 连续, 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 将分划的第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $y(x)$ 的最大值和最小值分别记为 M_i 和 m_i, 则在子区间上的曲边梯形就可以用高为 M_i 和 m_i 的两个同底的矩形夹在中间, 于是由该曲边梯形旋转得到的圆筒体积 (记为 ΔV_i) 应当满足下列不等式:

$$\pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)m_i \leqslant \Delta V_i \leqslant \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)M_i,$$

可见存在 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$\Delta V_i = \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)y(\xi_i),$$

取 $i = 1, 2, \cdots, n$ 并相加, 又记 $(x_i + x_{i-1})/2 = \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 则就得到和式为

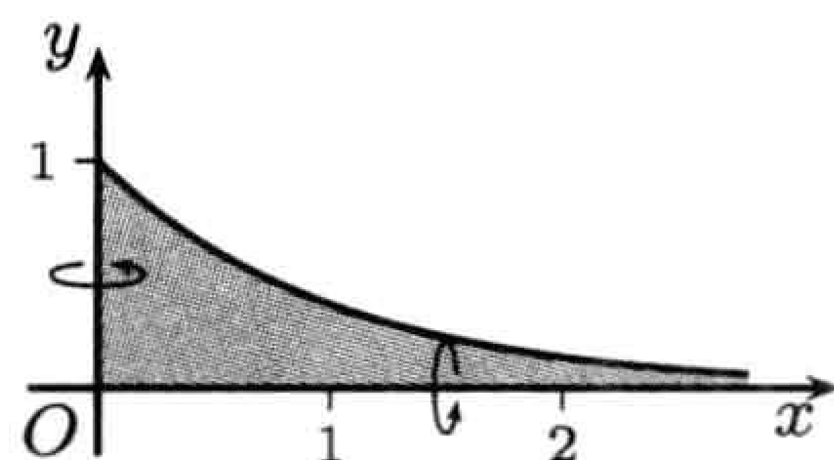
$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = 2\pi \sum_{i=1}^n y(\xi_i)\eta_i\, \Delta x_i.$$

上式虽然不是黎曼和, 但只要引用布利斯–杜阿梅尔定理 (见 §4.1.2 的习题 2193.1), 就知道当分划的细度趋于 0 时, 上述和式的极限就是函数 $2\pi x\, y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分. 这就是所要求证的结论.　□

① 本题应当要求平面图形完全在第一象限或第二象限, 否则公式不成立. 因此应当添加条件, 即在 $a \geqslant 0$ 或 $b \leqslant 0$ 中有一个成立. 以下证明中设前者成立.

注 本题的公式对于附图中的图形所成的旋转体来说是比较合适的. 然而, 上面的解法的证明只能说明该公式具有一定的合理性. 如 §4.7.1 的习题 2461 所示, 积分存在不等于体积存在. 在学习的现阶段, 对于本题的公式就是旋转体的体积还不可能给出严格的证明, 也不能证明它的结果与截面面积公式的结果相等. 这些问题要到多元积分学中才能解决. 若将 x 与 y 对换, 则本题的公式就可以从公式 (4.17) 的第二个公式推出.

习题 2476 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$, $y=0\,(0\leqslant x\leqslant+\infty)$ 旋转所成旋转体的体积: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.



习题 2476 的附图

解 1 本题的图形为无界区域, 需用广义积分计算.

(a) 如附图所示, 垂直于 Ox 旋转轴的平面去截旋转体所得的截面为圆, 其面积为 $\pi y^2=\pi\mathrm{e}^{-2x}$. 然后求积如下:

$$V_x=\int_0^{+\infty}\pi\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

(b) 垂直于 Oy 旋转轴的平面去截旋转体所得的截面也是圆, 其面积为 $\pi x^2=\pi(-\ln y)^2$, 然后可求积如下:

$$V_y=\int_0^1\pi\ln^2 y\,\mathrm{d}y=\pi y\ln^2 y\Big|_{+0}^1-\pi\int_0^1 2\ln y\,\mathrm{d}y=2\pi. \quad \square$$

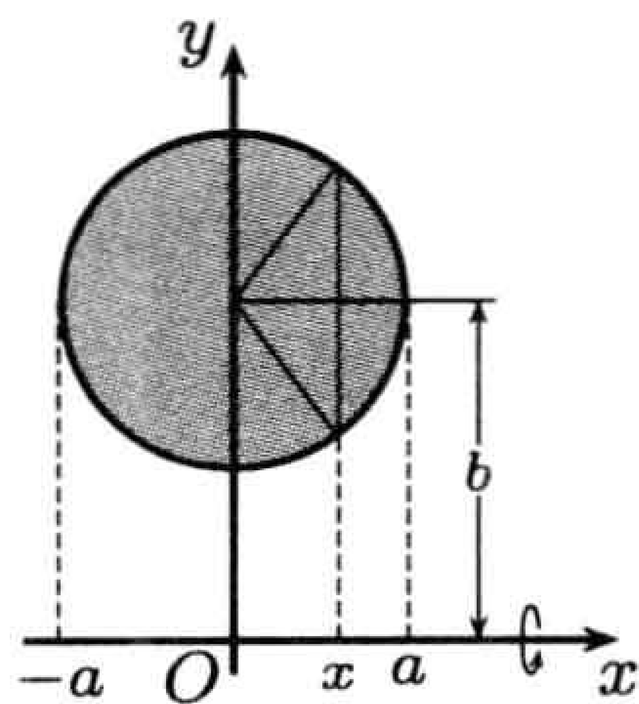
解 2 用习题 2471 的公式也可解决. 对 (a) 有

$$\begin{aligned}V_x&=2\pi\int_0^1 y\,x(y)\,\mathrm{d}y=-2\pi\int_0^1 y\ln y\,\mathrm{d}y\\&=-2\pi\cdot\frac{1}{2}y^2\ln y\Big|_{+0}^1+\pi\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

对 (b) 有

$$V_y=2\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=2\pi(-x\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=2\pi. \quad \square$$

习题 2477 求曲线 $x^2+(y-b)^2=a^2\ (0<a\leqslant b)$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积.



习题 2477 的附图

解 1 如附图所示, 旋转生成的曲面即是圆环面, 俗称救生圈. 用平面 $X=x\ (-a\leqslant x\leqslant a)$ 与所围圆环相截得到的是平面上的圆环形区域, 其外圆周和内圆周的半径分别为

$$b\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

因此截面面积是

$$\begin{aligned}S(x)&=\pi[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2]\\&=4b\pi\sqrt{a^2-x^2}.\end{aligned}$$

然后可求积如下:

$$\begin{aligned}V&=\int_{-a}^{a}S(x)\,\mathrm{d}x=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (\text{作代换 } x=a\sin\theta)\\&=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi^2a^2b. \quad \square\end{aligned}$$

解 2　如附图所示, 可以将所求的体积看成为阴影区上下边界的上、下半圆与 $x=\pm a, y=0$ 围成的两个曲边梯形绕 x 轴旋转所得到体积之差, 于是就有

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x$$
$$=8b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

以下计算同解 1. □

解 3　由古尔丹第二定理 (见 §4.9 的习题 2506) 可知, 在平面图形的质心已知的情况下, 旋转所得的体积等于图形面积乘以旋转一周时质心描出的圆周长. 本题的阴影区的质心显然在圆心 $(0,b)$ 处, 圆面积为 πa^2, 于是就得到

$$V=\pi a^2\cdot 2\pi b=2\pi^2a^2b.\quad\square$$

解 4　将题中的曲线用参数方程 $x=a\cos t$; $y=b+a\sin t$ 描述, 则当 t 从 0 到 2π 时点 $(x(t),y(t))$ 以逆时针方向得到该圆. 应用 (4.17) 的第一个公式, 就有

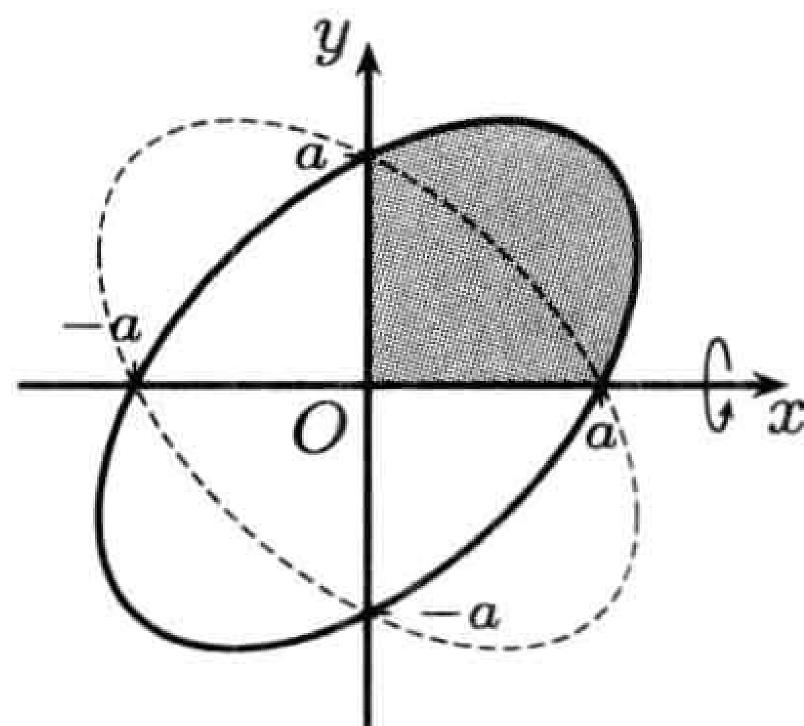
$$V=-\pi\int_0^{2\pi}y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=-\pi\int_0^{2\pi}(b^2+2ab\sin t+a^2\sin^2 t)\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.\quad\square$$

习题 2478 求曲线 $x^2-xy+y^2=a^2$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积.

解 1　本题的特点是旋转轴穿过曲线所围图形的内部. 如附图所示, 曲线 $x^2-xy+y^2=a^2$ 是中心在原点的椭圆, 其长短轴分别在直线 $y=\pm x$ 上. 从曲线方程直接解出函数 $y(x)$ 的显表达式为

$$y_{1,2}(x)=\frac{x\pm\sqrt{4a^2-3x^2}}{2},$$

它们分别是附图中的椭圆的上边界和下边界. 此外, 还可以确定 $y_{1,2}(x)$ 的定义域是 $-\dfrac{2}{\sqrt3}a\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{\sqrt3}a$.



习题 2478 的附图

从上述表达式和对称性可见, 附图中的虚线椭圆就是曲线 $x^2-xy+y^2=a^2$ 绕 x 轴旋转 180° 后所到达的位置. 因此只要将附图中的阴影区域绕 x 轴旋转所得的旋转体体积再乘以 2 就可以得到所要的体积.

注意到在 $0\leqslant x\leqslant a$ 时的截面是圆, 半径为 $y_1(x)$, 而在 $a\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{\sqrt3}a$ 时的截面是圆环, 其外半径为 $y_1(x)$, 内半径为 $y_2(x)$, 这样就可以计算如下:

$$V=2\int_0^a\pi y_1^2(x)\,\mathrm{d}x+2\int_a^{\frac{2a}{\sqrt3}}\pi[y_1^2(x)-y_2^2(x)]\,\mathrm{d}x.$$

其中第一项为

$$2\int_0^a\pi y_1^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^a(4a^2-2x^2+2x\sqrt{4a^2-3x^2})\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big[4a^2x-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}(4a^2-3x^2)^{\frac32}\Big]\Big|_0^a=\frac{22}{9}\pi a^3.$$

而第二项为

$$2\int_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} \pi[y_1^2(x) - y_2^2(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} 4x\sqrt{4a^2-3x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\cdot\Big(-\frac{1}{9}\Big)(4a^2-3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{9}\pi a^3.$$

于是最后得到 $V = \frac{8}{3}\pi a^3$. □

解 2 将方程配方成为 $\Big(x - \frac{1}{2}y\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}y\Big)^2 = a^2$, 得到曲线的参数方程为

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin t + a\cos t,\quad y(t) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sin t.$$

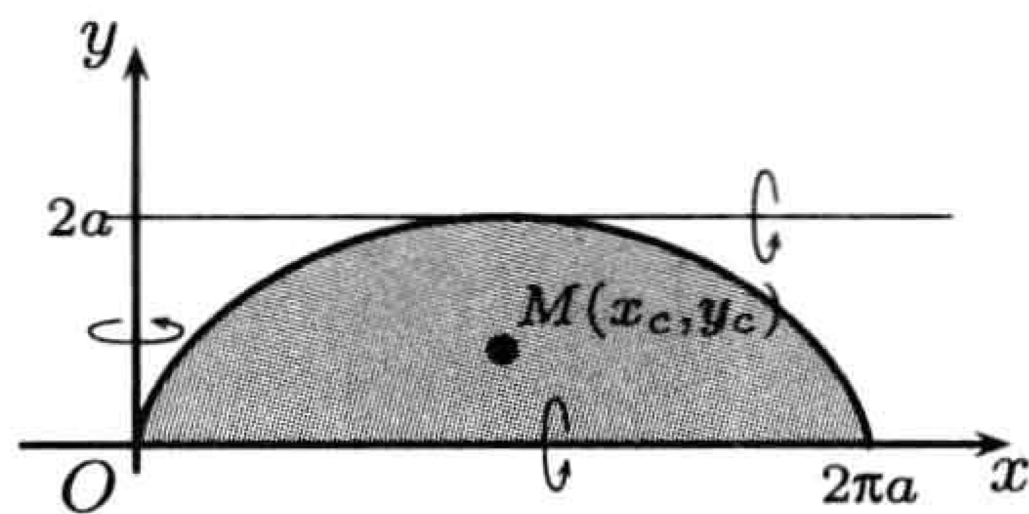
当 t 从 0 到 $2\pi/3$ 时, 点 $(x(t), y(t))$ 沿逆时针方向描出第一象限的曲线段 (参见附图). 用 (4.17) 的第一个公式, 由于第一象限的阴影区边界中在坐标轴上的两段直线, 或是 $y=0$, 或是 $x=0$, 对积分均无贡献, 因此只需在曲线段上求积, 这样就得到

$$V = -2\pi a^3\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4}{3}\sin^2 t\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \sin t\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}a^3\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t + \frac{8\pi}{3}a^3\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi a^3\cdot\Big(3 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{8\pi}{3}a^3.\quad □$$

习题 2480 求曲线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$ 旋转所成旋转体的体积: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.



习题 2480 的附图

解 (a) 这时的截面是圆, 因此有 $S(x) = \pi y^2$, 于是即可求积如下:

$$V_x = \int_0^{2\pi a}\pi y^2\,\mathrm{d}x = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\Big(2\sin^2\frac{t}{2}\Big)^3\,\mathrm{d}t = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 32\pi a^3\cdot\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3.$$

(b) 在这里可以用古尔丹第二定理. 首先求出附图中的阴影区的面积 (即《习题集》的习题 2413) 为

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

从对称性可知该区域的质心 M 的横坐标 $x_c = \pi a$, 然后就可以计算出阴影区绕 Oy 轴旋转所得的几何体的体积为

$$V_y = 3\pi a^2\cdot 2\pi\cdot\pi a = 6\pi^3 a^3.$$

(c) 这里也可以用古尔丹第二定理, 但需要知道质心的纵坐标 y_c. 这可以从 (a) 的结果倒用古尔丹定理, 由于纵坐标 y_c 满足

$$3\pi a^2 \cdot 2\pi y_c = V_x = 5\pi^2 a^3,$$

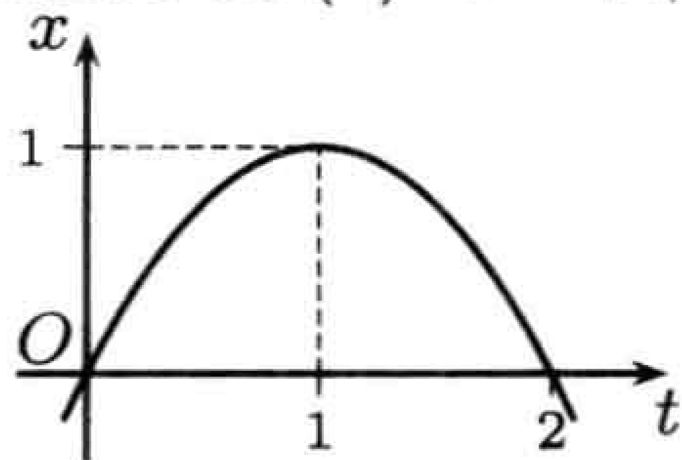
因此就有 $y_c = \frac{5}{6}a$. 然后求出质心到旋转轴 $y = 2a$ 的距离是 $2a - y_c = \frac{7}{6}a$, 从而得到

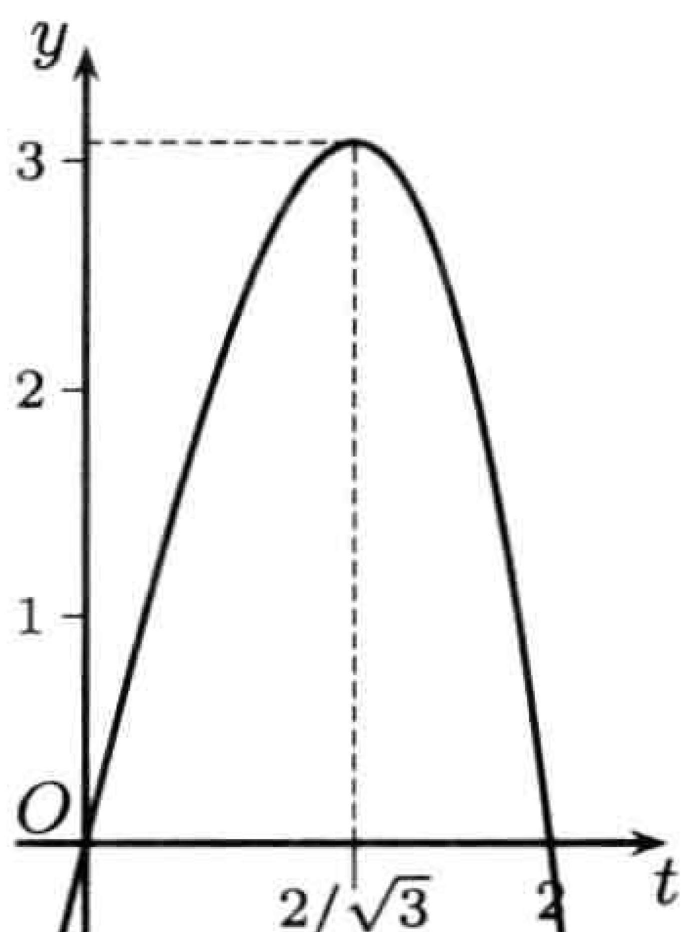
$$V_{y=2a} = 3\pi a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{7}{6}a = 7\pi^2 a^3. \quad \square$$

习题 2482.1 求曲线

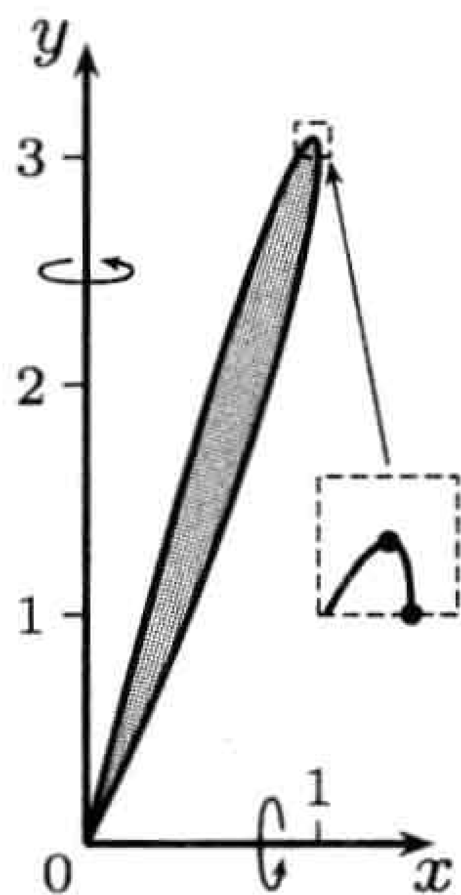
$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^3$$

所围图形绕 (a) Ox 轴; (b) Oy 轴旋转所成旋转体的体积.





习题 2482.1 的附图 1



习题 2482.1 的附图 2

解 利用 §1.4.4 中提出的作参数方程曲线的方法, 如附图 1 所示, 分别作出 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 的曲线, 然后就不难作出所求的函数图像.

对本题来说, 容易知道当 t 从 0 递增到 2 时, 点 $(x(t), y(t))$ 从原点出发, 沿逆时针方向在第一象限画出一个圈并回到原点.

由附图可见, $x(t)$ 于 $t = 1$ 处达到最大值 1, 且在 $x \in (0, 1)$ 时, 每一个 x 值对应于两个 y 值; 同时 $y(t)$ 在 $t = 2/\sqrt{3} \approx 1.155$ 处达到最大值 $16\sqrt{3}/9 \approx 3.079$, 且在 $y \in (0, 16\sqrt{3}/9)$ 时, 每一个 y 值对应于两个 x 值 (参见附图 2).

(a) 先计算绕 Ox 轴旋转所得的体积.

这时将附图 2 中灰色区域的上边界记为 $y_2(x)$, 下边界记为 $y_1(x)$, 它们的定义域均为 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 则就有

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 y_2^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 y_1^2(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对第一个积分, 用代换 $x = x(t)$, 则就有 $y_2(x(t)) = y(t)$, 且当 x 从 0 递增到 1 时, t 从 2 递减到 1, 因此有

$$\pi \int_0^1 y_2^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_2^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = -\pi \int_1^2 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

对第二个积分, 用相同的代换, x 与 t 同时从 0 递增到 1, 因此有

$$-\pi \int_0^1 y_1^2(x)\,\mathrm{d}x = -\pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

合并以上就有 (这相当于对本题的情况独立证明了 (4.17) 的第一个公式成立):

$$V_x = -\pi \int_0^2 y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \quad = -\pi \int_0^2 (4t - t^3)^2 \cdot 2(1 - t)\,\mathrm{d}t = \frac{64}{35}\pi.$$

(b) 绕 Oy 轴旋转所得的体积计算与 (a) 类似, 细节从略. 最后即可以得到

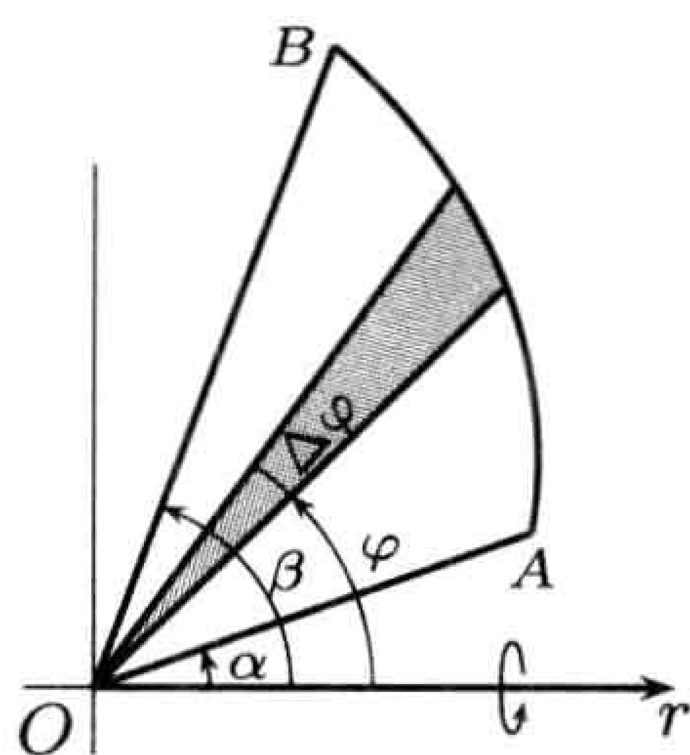
$$V_y = \pi \int_0^2 x^2(t)y'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \pi \int_0^2 (2t - t^2)^2 \cdot (4t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{64}{105}\pi. \quad \square$$

习题 2482.2 证明: 把平面图形

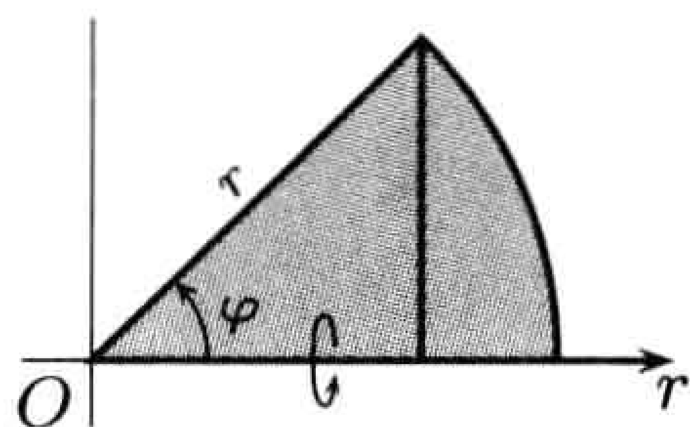
$$0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi) \quad (\varphi \text{ 与 } r \text{ 为极坐标})$$

绕极轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$



习题 2482.2 的附图 1



习题 2482.2 的附图 2

解 1 如前面的习题 2471 那样, 考虑由 φ 到 $\varphi+\Delta\varphi$ 形成的小扇形 (在附图 1 中的阴影区) 绕极轴旋转所得的体积. 先考虑该扇形可以用圆的扇形来近似时所得到的体积.

为此可先计算附图 2 中当 r 和 φ 为常值时的扇形绕极轴旋转所得的体积. 以下只对 φ 为锐角的情况作计算, 但可以验证所得的公式对于 φ 为钝角的情况也适用.

如附图 2 所示, 将扇形划分为一个直角三角形和一个曲边三角形, 于是可以按照截面面积的积分计算旋转体的体积如下.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{r\cos\varphi}\pi x^2\tan^2\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{r\cos\varphi}^{r}\pi(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3}r^3\sin^2\varphi\cos\varphi + \pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}r^3(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$

然后将 φ 看成变量, 对 V 求微分, 这样就得到圆心角为 $\Delta\varphi=\mathrm{d}\varphi$ 时的圆扇形旋转所得体积的线性主部为下列微分:

$$\mathrm{d}V = \frac{2\pi}{3}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

这样就从启发式的角度① 得到所要的体积公式为

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

如习题 2471 所示, 可以将上述启发式的推导严格化, 这里从略. □

解 2 利用古尔丹第二定理如下即可导出所要的公式, 但也属于微元法的范畴.

若将附图 1 中圆心角为 $\Delta\varphi$ 的扇形近似地看成为等腰三角形, 则其质心就在 (近似地) 离极点为 $\frac{2}{3}r$ 处. 由于质心到极轴的距离 (近似地) 为 $\frac{2}{3}r\sin\varphi$, 而相应的扇形面积 (近似地) 为 $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$, 因此扇形绕极轴旋转所得的体积可按古尔丹定理得到为

$$\Delta V \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi\times 2\pi\cdot\frac{2}{3}r\sin\varphi \approx \frac{2\pi}{3}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

这样就可得到与解 1 相同的微分表达式, 然后对 φ 从 α 到 β 积分即可. □

解 3 实际上, 极坐标曲线就是以 φ 为参数的曲线, 即

$$x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,$$

这样就可以用 (4.17) 的公式来导出极坐标下的旋转体体积公式.

① 在物理学或其他学科中经常采用这样的推导方法, 并称为微元法.

为方便起见, 对于分段光滑的封闭曲线, 每一段的参数可独立选取. 对于附图 1 的扇形中的两条矢径可以用 r 为参数. 这样就可以应用 (4.17) 的第一个公式如下:

$$V=-\pi\int_\alpha^\beta y^2(\varphi)x'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi-\pi\int_{r(\beta)}^0 y^2(r)x'(r)\,\mathrm{d}r-\pi\int_0^{r(\alpha)} y^2(r)x'(r)\,\mathrm{d}r,$$

其中第一个积分以 φ 为参数, $x(\varphi)$ 和 $y(\varphi)$ 已在上面写出; 第二个积分以 r 为参数, $x(r)=r\cos\beta$, $y(r)=r\sin\beta$, $0\leqslant r\leqslant r(\beta)$; 第三个积分也以 r 为参数, $x(r)=r\cos\alpha$, $y(r)=r\sin\alpha$, $0\leqslant r\leqslant r(\alpha)$. 如附图 1 所示, 即从点 A 沿曲线 $r=r(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$ 到点 B, 然后沿 $\varphi=\beta$ 的射线到极点 O, 再沿 $\varphi=\alpha$ 的射线到点 A.

于是就可计算如下:

$$\begin{aligned}V&=-\pi\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\sin^2\varphi[-r(\varphi)\sin\varphi+r'(\varphi)\cos\varphi]\,\mathrm{d}\varphi+\frac{\pi}{3}\cdot r^3(\beta)\sin^2\beta\cos\beta\\&\qquad-\frac{\pi}{3}\cdot r^3(\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha\\&=\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\frac{\pi r^3(\varphi)}{3}\sin^2\varphi\cos\varphi\Big|_\alpha^\beta+\pi\int_\alpha^\beta\frac{r^3(\varphi)}{3}(\sin^2\varphi\cos\varphi)'\,\mathrm{d}\varphi\\&\qquad+\frac{\pi}{3}\cdot r^3(\beta)\sin^2\beta\cos\beta-\frac{\pi}{3}\cdot r^3(\alpha)\sin^2\alpha\cos\alpha\\&=\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\frac{\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)[2\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi]\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\quad\Box\end{aligned}$$

习题 2483.1 求曲线 $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 旋转所成旋转体的体积: (a) 绕极轴; (b) 绕直线 $r\cos\varphi=-\dfrac{a}{4}$.

提示 在第一册附录二的习题 1546(b) 中有 $r=\dfrac{3}{2}(1+\cos\varphi)$ 的图像. 在 (b) 中的直线与曲线相切, 用古尔丹第二定理较为方便. 这时的面积计算 (即是《习题集》的习题 2419) 和质心位置计算见 §4.9 的习题 2512. 另一种计算方法是利用 (4.17) 的公式. □

习题 2483.2 求曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 旋转所成旋转体的体积: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y=x$.

提示 这是双纽线, 用极坐标系比较合适. (取 $a=6$ 就是第一册附录一的习题 371.1(g) 的 $r^2=36\cos 2\varphi$.) 这里只指出, 对于 (c), 由于旋转轴不穿过双纽线的内部, 因此可以利用古尔丹第二定理来做 (类似于习题 2480(c)). 为此先利用 (b) 的结果和双纽线的面积 (即《习题集》的习题 2418), 用古尔丹定理确定质心的位置, 然后再用古尔丹定理求出旋转体的体积. □

4.7.4 补注

这里用多元积分学工具对于命题 4.15 给出证明 (可参看 §8.12.1 的习题 4320.2). 尚未学过有关知识的读者暂时可以跳过.

为阅读方便起见, 复述命题如下:

命题 4.15 设无自交点的平面封闭曲线的参数方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $x(t), y(t)$ 分段连续可微, $y(t) \geqslant 0$, 当参数 t 从 0 递增到 T 时, 点 $(x(t), y(t))$ 以逆时针方向绕闭曲线一周, 则该曲线包围的平面图形绕 Ox 轴旋转得到的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_0^T y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^T x(t)[y^2(t)]'\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^T x(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^T \{-y^2(t)x'(t) + x(t)[y^2(t)]'\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.17}$$

证 根据第二型曲线积分的定义, 将命题中的有向封闭曲线记为 C, 又将 C 包围的平面区域记为 D, 则就可将公式 (4.17) 改写成为:

$$V_x = -\pi \oint_C y^2 \mathrm{d}x = \pi \oint_C 2xy\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \oint_C -y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y. \tag{4.18}$$

用格林公式于 (4.18) 就得到

$$\begin{aligned} -\pi \oint_C y^2 \mathrm{d}x = \pi \oint_C 2xy\,\mathrm{d}y &= \frac{\pi}{2} \oint_C -y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y \\ &= 2\pi \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

从微元法来看, 对于在 Ox 轴上方的区域 D, 其中微元 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 绕 Ox 轴旋转一周得到的体积就是 $2\pi y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 然后将它们相加 (也就是求积), 即得到上述二重积分, 因此这就是所要求的旋转体体积 V_x.

以下对此给出严格的证明. 将闭曲线 C 绕 Ox 轴旋转所成的闭曲面记为 S, 将 S 包围的空间区域 (即旋转体) 记为 Ω. 根据命题的条件可知 S 是分片光滑的闭曲面, 因此区域 Ω 是可求体积的. 根据三重积分的知识, 在区域 Ω 上恒等于 1 的被积函数的三重积分就等于区域的体积, 也就是旋转体的体积

$$V_x = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

根据旋转体的生成过程, 可以将旋转体 Ω 中的点表示为

$$x = x,\ y = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta\ \ ((x,r) \in D,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

这就是在三重积分中常用的柱坐标代换. 计算出从 x, y, z 到 x, r, θ 的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -r\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

根据三重积分的变量代换公式就有

$$V_x = \iiint_{D\times[0,2\pi]} r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \iint_D r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r = 2\pi \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \square$$

§4.8 旋转曲面表面积的计算法 (习题 2486–2500)

内容简介 本节的习题是旋转曲面的表面积计算, 其中除了各种公式之外有时还可以用古尔丹定理.

首先要掌握最为基本的旋转曲面计算公式, 即在区间 $[a,b]$ 上曲线 $y(x)\geqslant 0$ 绕 Ox 轴旋转所成的旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

利用弧长的微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$, 上述公式可写成为

$$S=2\pi\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}s.$$

再进一步, 若以弧长作为曲线的参数, 又记曲线的长度为 l, 则又有公式

$$S=2\pi\int_0^l y\,\mathrm{d}s,$$

其中的积分变量是 s. 可以证明上述公式对于分段光滑的封闭曲线也是成立的.

注意上述几个公式的共同核心是弧长微分 $\mathrm{d}s$. 初学者容易犯的一种错误是将 $\mathrm{d}s$ 漫不经心地错记为 $\mathrm{d}x$, 这即使对于曲线 $y(x)$ 为直线的情况, 例如圆锥面和圆台面, 也只能导致错误的结果.

除了计算工具之外, 这里还有理论问题, 即既然要计算旋转曲面的面积, 那么与平面图形的面积和几何体的体积相类似, 就有如何定义曲面面积的问题. 多数教科书中在这里推导上述几个计算公式时只能回避这个更深刻的问题. 这是因为要到多元微积分中才可能给出曲面面积的一般定义, 并给出有定义时的面积计算公式. 在这个基础上可以证明, 本节的旋转曲面面积存在, 而且以上几个计算公式都可以从关于一般曲面面积的计算公式推出.

下面从求旋转椭球面的面积开始. 在 §4.6 的习题 2453 的注中, 已经指出椭圆的周长不能用初等函数表达出来, 因为其中涉及的积分的被积函数的原函数不是初等函数. 然而, 下面我们会看到, 旋转椭球面的表面积则不难求出①.

习题 2490 求曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b\leqslant a)$ 旋转所成曲面的面积: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 (a) 利用对称性, 并引入椭圆的离心率 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, 就有

① 与椭圆周长计算中的困难相仿, 三个半轴均不相等的椭球面的面积计算又会导致椭圆积分, 见 [15] 的第二卷的 629 小节的例题 18).

$$\begin{aligned}
S_x &= 4\pi\int_0^a y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \ \text{(然后用代换 } x=a\cos t\text{, 这时 } y=b\sin t\text{)}\\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{4\pi ab}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}(-\varepsilon\cos t)\\
&= \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\Big[-\varepsilon\cos t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}+\arcsin(-\varepsilon\cos t)\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) 这时的积分情况不同, 计算如下:

$$\begin{aligned}
S_y &= 4\pi\int_0^b x(y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y \ \text{(然后用代换 } y=b\sin t\text{, 这时 } x=a\cos t\text{)}\\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&= 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{4\pi a^2}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(\varepsilon\sin t)\\
&= \frac{2\pi a^2}{\varepsilon}\Big[\varepsilon\sin t\sqrt{(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin^2 t}+(1-\varepsilon^2)\ln\Big|\varepsilon\sin t+\sqrt{(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin^2 t}\Big|\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\Big[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\Big]. \quad \square
\end{aligned}$$

注 我们在第一次看到这样的结果时可能会感到奇怪, 两个答案怎么会如此不同? 如果固定 a, 令 $\varepsilon\to 0$, 也就是 $b\to a$, 则它们的极限都是 $4\pi a^2$, 即半径 a 的球面积. 可见连续性没有问题. (类似的现象已见于 §3.4.3 的习题 2028 中.)

将问题改换一个角度会使得上述问题更为突出. 固定 a, 而令 b 从小于 a 开始递增直至大于 a. 这时在 (b) 的公式中需要将 a 与 b 对换, 并不再用离心率记号 ε.

根据前述计算, 就知道这样的椭圆绕 Ox 轴旋转得到的旋转椭球面的面积, 当 $a>b$ 时为

$$S_{a>b} = 2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \tag{4.19}$$

在经过 $a=b$ 时的 $S_{a=b}=4\pi a^2$ 而连续变化到 $a<b$ 时则为

$$S_{a<b} = 2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\Big(\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\Big). \tag{4.20}$$

于是要问: 二者的表达式为何会发生如此大的变化?

这可在复域中解决. 从 (3.8) 有 $x=\sinh t=\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}t)$, 即有 $t=\mathrm{i}\arcsin(-\mathrm{i}x)=-\mathrm{i}\arcsin(\mathrm{i}x)$ 和 $t=\operatorname{arcsinh}x$. 又从 (3.10) 有 $\operatorname{arcsinh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 于是得到

$$-\mathrm{i}\arcsin(\mathrm{i}x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

现若在 $0<b<a$ 时的公式 (4.19) 中令 $a<b$, 将其中的 $\sqrt{a^2-b^2}$ 改为 $\mathrm{i}\sqrt{b^2-a^2}$, 则就得到 (4.20).

又可以类似地利用

$$\arcsin x = \mathrm{i}\ln(-\mathrm{i}x + \sqrt{1-x^2}),$$

从 (4.20) 导出 (4.19).

这样就证明了以上两个公式的每一个都可以同时用于 $a > b$ 和 $a < b$ 的两种情况. 实际上, 在复域中可以证明, 所有的初等函数在本质上是同一个函数及其反函数. 公式 (4.19) 和 (4.20) 的不同只是因为在复域中的同一个函数在实数域的不同范围中的表达式不同所致.

习题 2491 求曲线 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a > 0)$ 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积.

解 这就是求圆环面的表面积. 与 §4.7.3 的习题 2477 (求圆环的体积) 的解 3 相类似, 这里用古尔丹第一定理 (见后面的习题 2505) 是方便的. 由于该曲线的质心在圆心, 到旋转轴的距离为 b (参见习题 2477 的附图), 其周长又已知为 $2\pi a$, 因此就有 $S_x = 4\pi^2 ab$. □

习题 2495 求曲线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 旋转所成曲面的面积: (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a$.

解 (可参考 §4.7.3 的习题 2480 的附图和解法.)

(a) 写出旋转曲面的面积公式:

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi a} y\sqrt{1+y_x'}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\dfrac{t}{2}$, 因此有 $\sqrt{1+(y_x')^2} = \csc\dfrac{t}{2}$, 于是可计算如下:

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \csc\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 4\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{64\pi}{3}a^2. \end{aligned}$$

(b) 记曲线的质心坐标为 (μ_x, μ_y), 则从对称性知 $\mu_x = \pi a$, 因此只要计算出曲线的弧长 (即《习题集》的习题 2443), 然后即可用古尔丹第一定理. 弧长计算如下:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi a} \sqrt{1+(y_x')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\csc\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4a\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 8a. \end{aligned}$$

于是从古尔丹第一定理就得到

$$S_y = 8a \times 2\pi\mu_x = 16\pi^2 a^2.$$

(c) 首先用 (a) 的结果和弧长, 倒用古尔丹第一定理, 有

$$S_x = \frac{64\pi}{3}a^2 = 8a \times 2\pi\mu_y,$$

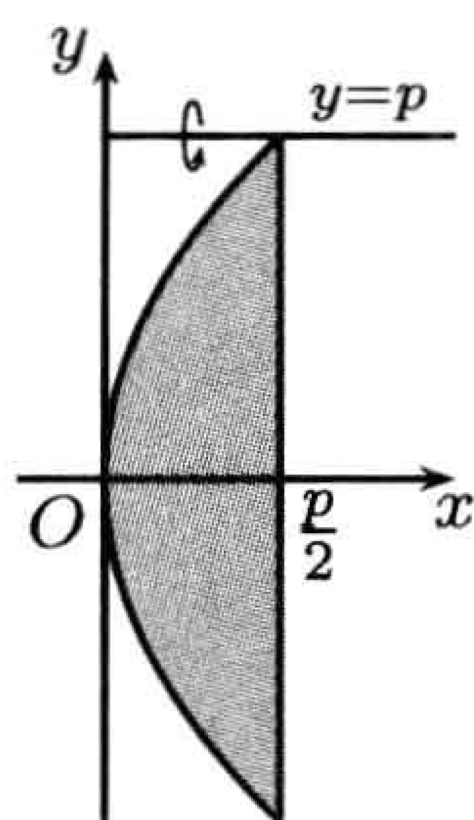
从而得到 $\mu_y = \frac{4}{3}a$.

由于质心 (μ_x, μ_y) 到旋转轴 $y = 2a$ 的距离为 $\frac{2}{3}a$, 因此从古尔丹第一定理就得到

$$S_{y=2a} = 8a \times 2\pi \times \frac{2}{3}a = \frac{32\pi}{3}a^2. \quad \square$$

习题 2500 由抛物线 $y^2 = 2px$ 与直线 $x = \frac{p}{2}$ 围成的图形绕直线 $y = p$ 旋转而构成一旋转体, 求其体积和表面积.

解 除了直接计算之外, 也可以用古尔丹定理. 由于对称性, 图形与抛物线弧的质心只能在 Ox 轴上, 它们与题中的旋转轴的距离都是 p, 因此只要再求出图形的面积和弧的长度就够了.



习题 2500 的附图

附图中的阴影区面积和抛物线的弧长可计算如下:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^p \left[\frac{p}{2} - x(y)\right] \mathrm{d}y = p^2 - \frac{1}{p}\int_0^p y^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{3}p^2, \\ s &= 2\int_0^p \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{p}\int_0^p \sqrt{y^2 + p^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{p}\left(y\sqrt{y^2+p^2} + p\ln(y + \sqrt{y^2+p^2})\right)\Big|_0^p \\ &= \sqrt{2}p + p\ln(1+\sqrt{2}) \approx 2.296p. \end{aligned}$$

然后用两个古尔丹定理得到:

$$V_{y=p} = \frac{2}{3}p^2 \times 2\pi p = \frac{4\pi}{3}p^3,$$

$$S_{y=p} = [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]p \times 2\pi p = 2\pi p^2[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})].$$

然而旋转体除了上述旋转曲面之外, 还有在 $x = \frac{p}{2}$ 上的长度为 $2p$ 的直线段通过旋转提供了旋转体的底圆, 其面积为 $4\pi p^2$, 因此旋转体全表面积为

$$S_{\text{全表面积}} = 2\pi p^2[2 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]. \quad \square$$

§4.9 矩的计算法. 质心的坐标 (习题 2501.1–2515)

内容简介 本节是积分在力学上的应用之一. 当物体的密度为均匀或只在一个方向上有变化时, 可以用一元函数的积分来求出矩和质心, 其中一次矩为静矩, 二次矩为转动惯量. 两个古尔丹定理也将在本节得到证明.

下面是关于转动惯量的几个例子. 为方便起见, 经常用微元法来叙述和计算.

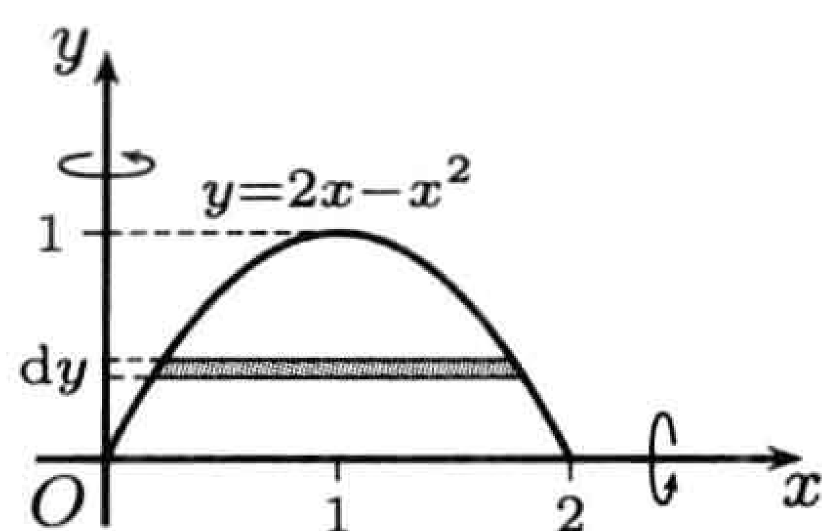
转动惯量也称惯性距, 它用于度量物体绕某个轴旋转时的转动惯性的大小. 按照力学上的定义, 质量为 m 的质点绕相距为 s 的轴旋转的转动惯量为 ms^2, 因此整个物体的转动惯量就是将物体的质量微元 $\mathrm{d}m$ 乘以到转动轴的距离平方求和, 也就是求积分.

习题 2502.2 求曲线

$$ay = 2ax - x^2 \ (a > 0), \quad y = 0$$

所围抛物线弓形对 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量 $I_x = M_2^{(x)}$ 和 $I_y = M_2^{(y)}$. 由关系式 $I_x = Sr_x^2$, $I_y = Sr_y^2$ (S 为弓形面积) 定义的惯性半径 r_x 和 r_y 等于什么?

解 用 $x = ax'$, $y = ay'$ 代入方程可消去 a, 因此只要对 $a = 1$ 作计算, 然后对转动惯量乘以 a^4.



习题 2502.2 的附图

先计算对于 Ox 轴的转动惯量. 在弓形中到该轴的距离为 y 的点集是水平直线段. 对于 $0 \leqslant y \leqslant 1$, 从方程 $y = 2x - x^2$ 可解出直线段两端的横坐标为

$$x_1(y) = 1 + \sqrt{1-y}, \quad x_2(y) = 1 - \sqrt{1-y},$$

然后如附图所示, 取抛物线弓形中介于 $Y = y$ 和 $Y = y + \mathrm{d}y$ 之间的阴影区, 则其面积近似地为

$$2\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

将上式乘以 y^2 并对于 y 从 0 到 1 积分, 就得到 $a = 1$ 时关于 Ox 轴的转动惯量如下:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 2y^2\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}y \ (\text{作代换 } y = \sin^2\theta) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5\theta - \sin^7\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4 \cdot \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{32}{105}.
\end{aligned}$$

同样可计算 $a = 1$ 时关于 Oy 轴的转动惯量如下:

$$\int_0^2 x^2(2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}.$$

乘以 a^4 即得到

$$I_x = M_2^{(x)} = \frac{32}{105}a^4, \quad I_y = M_2^{(y)} = \frac{8}{5}a^4.$$

由于弓形面积为

$$S = \int_0^{2a} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2a} \left(2x - \frac{1}{a}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}a^2,$$

因此就可按照公式计算出惯性半径为

$$r_x = \sqrt{\frac{8}{35}}a, \quad r_y = \sqrt{\frac{6}{5}}a. \quad \square$$

习题 2504.2 求半径为 R 质量为 M 的均质球体对其直径的转动惯量.

解 1 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 将作为旋转轴的直径取在 Oz 轴上. 于是只要考虑到该直径的距离为 r 的点集, 其中 $0 \leqslant r \leqslant R$.

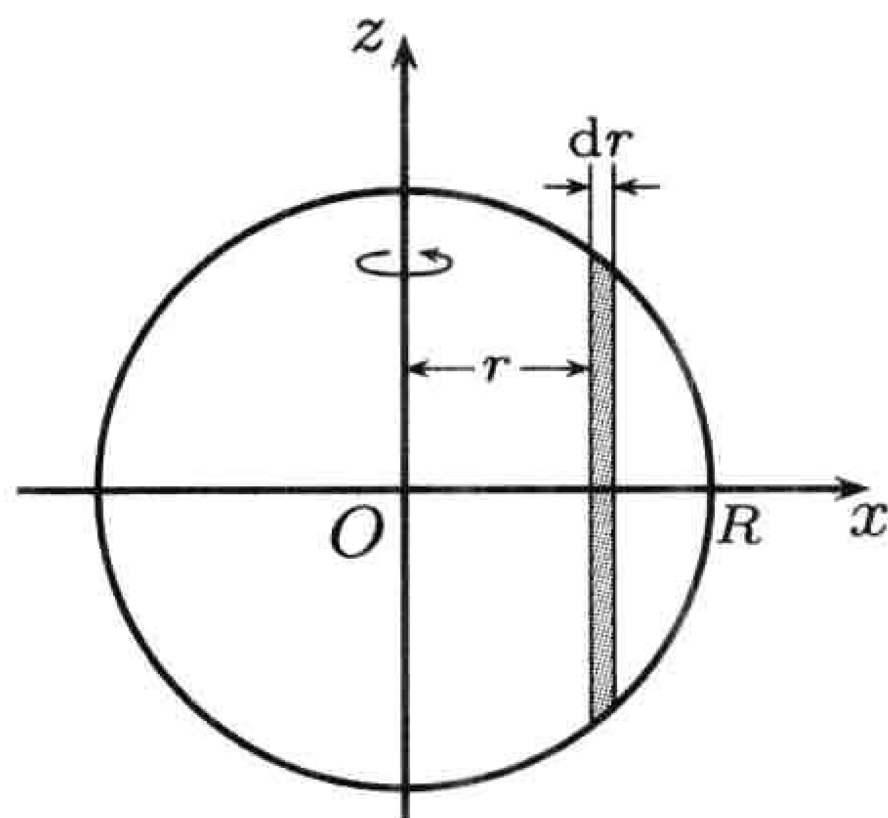
可以看出, 这样的点集就是柱面 $x^2+y^2=r^2$ 与球相交的部分, 所得的柱面高为 $2\sqrt{R^2-r^2}$, 半径为 r, 因此其面积为

$$S(r) = 2\pi r \times 2\sqrt{R^2-r^2} = 4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

将它乘以 $\mathrm{d}r$, 再乘以到旋转轴的距离平方 r^2, 即可计算转动惯量如下:

$$M_z^{(2)} = \rho\int_0^R r^2 S(r)\,\mathrm{d}r = \rho\int_0^R 4\pi r^3\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r,$$

其中 ρ 是球的密度.



习题 2504.2 的附图

作代换 $r = R\sin\theta$, 即可得到

$$M_z^{(2)} = 4\pi R^5\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi R^5\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-\sin^5\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 4\pi R^5\rho\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}R^5\rho.$$

利用球的质量已知为 M, 即有

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho = M,$$

于是可确定 $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$. 将它代入前面的转动惯量 $M_z^{(2)}$ 的表达式中, 就可得到在力学教科书中的公式:

$$M_z^{(2)} = \frac{2}{5}MR^2. \quad \square$$

解 2 (概要) 取方程与旋转轴同解 1. 用垂直于旋转轴的平行平面将球切割成薄圆盘片, 计算出每个圆盘片相对于旋转轴的转动惯量, 然后相加 (即积分) 即可.

这里首先要计算出均匀薄圆盘片相对于通过圆盘中心并垂直于盘面的旋转轴的转动惯量. 可以证明, 若圆盘质量为 m, 半径为 R, 则这个转动惯量为 $\frac{1}{2}mR^2$. (这也是力学教科书中的常见公式, 需要通过积分得到, 其推导留作练习题.)

在这个基础上, 厚度为 $\mathrm{d}z$ 的薄圆盘的质量为 $\pi\rho(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$, 其转动惯量为 $\frac{1}{2}\pi\rho(R^2-z^2)^2\,\mathrm{d}z$, 然后就可积分得到

$$M_z^{(2)} = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^R(R^2-z^2)^2\,\mathrm{d}z.$$

作代换 $z = R\sin\theta$, 就可计算出

$$M_z^{(2)} = \pi R^5\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \pi R^5\rho\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} = \frac{8\pi}{15}R^5\rho.$$

以下与解 1 相同. □

习题 2505 (古尔丹第一定理) 证明: 平面曲线弧 C 绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面, 其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积.

解 不妨设曲线弧 C 处于上半平面, 旋转轴为 Ox 轴, 其方程为 $x = x(s), y = y(s)$, 其中 s 为弧长参数. 又记其质心为 (μ_x, μ_y), 则从关于质心的纵坐标 μ_y 的计算公式就有

$$\mu_y = \frac{\int_0^l y(s)\,\mathrm{d}s}{l},$$

其中 l 是曲线弧 C 的长度.

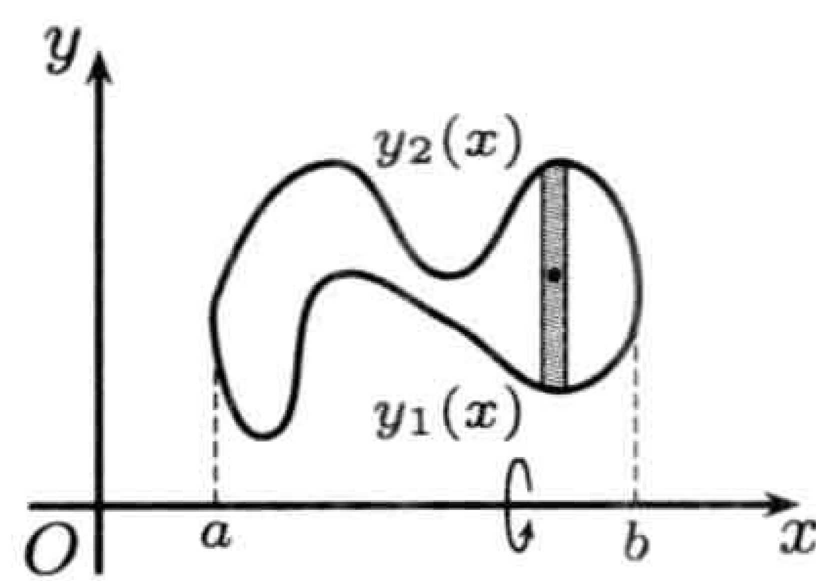
将上式两边同乘以 $2\pi l$, 则就得到

$$2\pi\mu_y\times l = 2\pi\int_0^l y(s)\,\mathrm{d}s,$$

这时左边就是弧长乘以质心所描出的圆周长度, 而右边从 §4.8 知道就是曲线弧 C 绕 Ox 轴旋转所得的旋转曲面的表面积. □

习题 2506 (古尔丹第二定理) 证明: 平面图形 S 绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于图形 S 的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积.

解 1 (简单情况) 设平面图形处于上半平面, 旋转轴为 Ox 轴, 记图形的质心为 (μ_x, μ_y), 以下只讨论两种较为简单的平面图形.



习题 2506 的附图 1

情况 1 设平行于 Oy 轴的直线与图形的边界至多只交于两个点, 记为 (上边界) $y_2(x)$, 和 (下边界) $y_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. 这时对于直线 $X = x$ 与图形相截的直线段

$$\{(x,y) \mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

其质心在该线段的中点 $\frac{1}{2}(y_1(x)+y_2(x))$ 处, 这也就是质心到 Ox 轴的距离. 将它乘以直线段的长度 $y_2(x)-y_1(x)$, 然后对 x 从 a 积分到 b, 这就是平面图形相对于 Ox 轴的静矩. 于是质心的纵坐标就是

$$\mu_y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x}{S},$$

其中分母为图形的面积.

将上式两边同乘以 $2\pi S$ 就得到

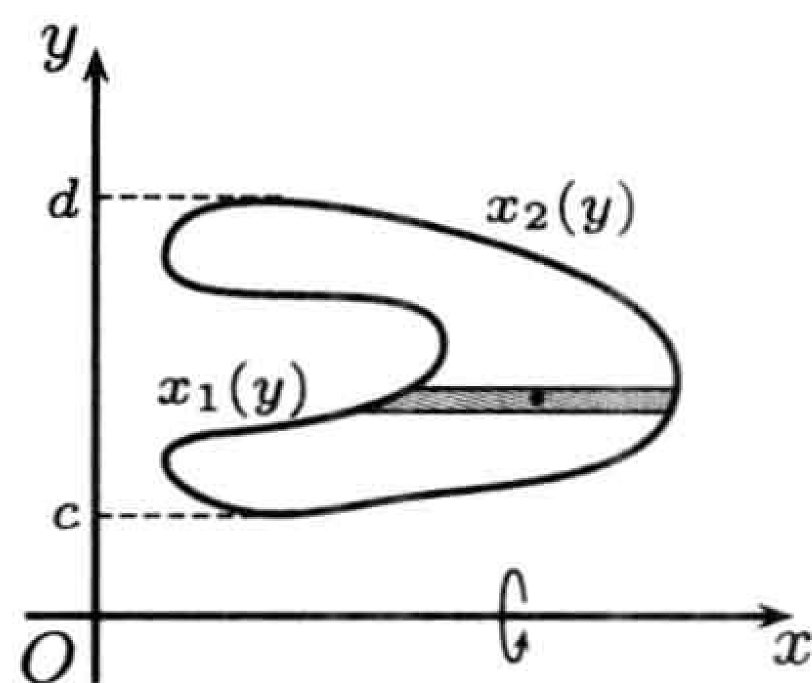
$$2\pi\mu_y\times S = \pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x,$$

上式左边就是质心所描出的圆周长乘以平面图形的面积, 右边就是该图形绕 Ox 轴旋转所得的旋转体的截面面积的积分, 即旋转体的体积. □

情况 2 现在考虑另一种简单图形, 即平行于 Ox 轴的直线与图形的边界至多只交于两个点, 记为 (左边界) $x_1(y)$ 和 (右边界) $x_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$. 这时对于直线 $Y = y$ 与图形相截的直线段

$$\{(x, y) \mid x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\},$$

其质心在该线段的中点 $\frac{1}{2}(x_1(y) + x_2(y))$ 处, 它到 Ox 轴的距离是 y. 将它乘以直线段的长度 $x_2(y) - x_1(y)$, 然后对 y 从 c 积分到 d, 这就是平面图形相对于 Ox 轴的静矩. 于是质心的纵坐标就是



习题 2506 的附图 2

$$\mu_y = \frac{\displaystyle\int_c^d y[x_2(y) - x_1(y)]\,\mathrm{d}y}{S},$$

其中分母为图形的面积.

将上式两边同乘以 $2\pi S$ 就得到

$$2\pi\mu_y \times S = 2\pi \int_c^d y[x_2(y) - x_1(y)]\,\mathrm{d}y,$$

右边的公式按照 §4.7.3 的习题 2471 (将其中的 x 和 y 对换), 就是平面图形绕 Ox 轴旋转所成的旋转体的体积. □

解 2 (一般情况) 对于一般的平面图形, 需要重积分的知识才能作出比较严格的证明. 不妨仍设图形处于上半平面, 旋转轴为 Ox 轴, 记图形的质心为 (μ_x, μ_y), 则从关于质心的纵坐标 μ_y 的较一般的计算公式就有

$$\mu_y = \frac{\displaystyle\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{S},$$

两边同乘以 $2\pi S$, 就得到

$$2\pi\mu_y \times S = 2\pi \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中左边就是质心所描出的圆周长乘以平面图形的面积, 而右边就是平面图形绕 Ox 轴旋转所得的旋转体的体积 (参见 §4.7.4 中关于命题 4.15 的最后一步证明). □

注 1 从两个古尔丹定理的证明可见, 它们揭示出力学上的静矩与几何学的联系. 假设密度为 1, 这时对于平面上的曲线弧来说, 它关于某个轴的静矩乘以 2π 就是曲线绕该轴旋转的旋转面面积, 而对平面图形来说, 它关于某个轴的静矩乘以 2π 就是图形绕该轴旋转的旋转体体积. 在 §4.7 和 §4.8 中已经看到过这两个定理的多次应用, 本节也有这方面的习题, 这里不再重复.

注 2 在古尔丹第二定理的第一个证明中, 利用了静矩计算中的可加性原理[①]. 这

① 转动惯量也具有可加性, 但只是将物体简单地分解为若干部分后分别计算它们的转动惯量, 然后相加.

就是可以将物体分解为若干部分，将各个部分的质量集中在它们的质心处，形成一个新的系统. 可以证明，这个新系统的静矩和质心与原系统相同. 下面只对于最简单的离散质点系统和分解为两个部分的情况给出证明.

设平面上有 n 个质点 $p_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, n$, 它们的质量分别为 m_i, $i = 1, \cdots, n$, 则这个质点系关于 Ox 轴和 Oy 轴的静矩分别 (简记) 为

$$\textstyle\sum_i m_i x_i, \quad \sum_i m_i y_i.$$

质心的位置为

$$\mu_x = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad \mu_y = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}.$$

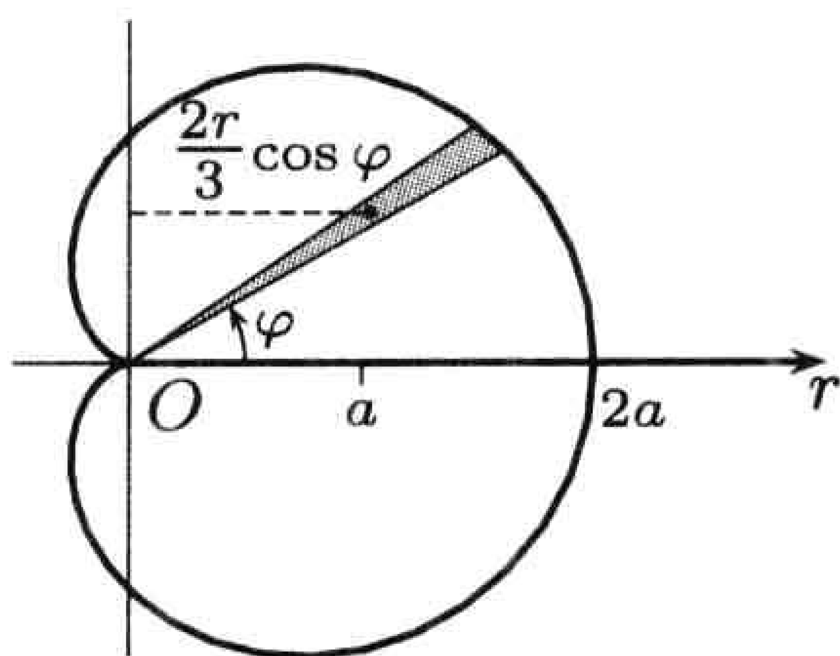
现在将这个系统任意划分为两个子系统，并在下面分别用 $\sum'$ 和 $\sum''$ 表示对两个子系统的求和，则就可以得到

$$\begin{aligned}\sum_i m_i x_i &= \sum\nolimits_i' m_i x_i + \sum\nolimits_i'' m_i x_i \\ &= \Big(\sum\nolimits_i' m_i\Big) \cdot \frac{\sum_i' m_i x_i}{\sum_i' m_i} + \Big(\sum\nolimits_i'' m_i\Big) \cdot \frac{\sum_i'' m_i x_i}{\sum_i'' m_i}, \\ \sum_i m_i y_i &= \sum\nolimits_i' m_i y_i + \sum\nolimits_i'' m_i y_i \\ &= \Big(\sum\nolimits_i' m_i\Big) \cdot \frac{\sum_i' m_i y_i}{\sum_i' m_i} + \Big(\sum\nolimits_i'' m_i\Big) \cdot \frac{\sum_i'' m_i y_i}{\sum_i'' m_i}.\end{aligned}$$

这表明原系统的静矩等于两个质点构成的系统的静矩，这两个质点的质量分别是 $\sum_i' m_i$ 和 $\sum_i'' m_i$, 而它们的位置分别是两个子系统的质心位置.

同样，将上述两个等式分别除以 $\sum_i m_i = (\sum_i' m_i) + (\sum_i'' m_i)$ 也就可以得到关于质心的可加性原理，从略.

在下面的两个习题中仍然用上述方法来计算质心.



习题 2512 的附图

习题 2512 求曲线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 所围图形的质心坐标.

解 如附图所示，从对称性可知质心在极轴上，因此只要计算关于 $\varphi = \pi/2$ (即 y 轴) 的静矩.

考虑从 φ 到 $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ 的小扇形 (附图中的阴影区)，将它看成为一个三角形，可见其质心的近似位置离开极点的距离是 $2r/3$. 这样就可以计算静矩如下 [6, 13]

$$\begin{aligned}M_y^{(1)} &= \int_0^{2\pi} \frac{2r}{3} \cos\varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} r^3 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 + \cos\varphi)^3 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4}{3} a^3 \Big(3 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{5\pi}{4} a^3.\end{aligned}$$

然后再计算曲线包围的图形面积 (即《习题集》§4.5 的习题 2419) 如下:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

设密度为 1, 则 S 就是图形的质量, 而图形对于 Oy 轴的静矩等于 $S\times\mu_x$. 因此即可求出质心的横坐标 $\mu_x=\frac{5}{4}\pi a^3\cdot\frac{2}{3\pi a^2}=\frac{5}{6}a$. □

习题 2515 求半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 的质心的坐标.

解 注意本题的几何体是半球面而不是半球体.

从对称性可知质心在正半 Oz 轴上, 记其 z 坐标为 μ_z. 考虑球面上到 xOy 平面距离同为 z 的点集, 它是半径为 $\sqrt{a^2-z^2}$ 的圆. 用平行平面 $Z=z$ 和 $Z=z+\mathrm{d}z$ 截球面得到的面积为 $2\pi\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}s$, 将它乘以 z, 然后对 z 从 0 到 a 积分, 这样就得到该球面对于 xOy 坐标面的静矩为

$$\int_0^a 2\pi z\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}s.$$

计算 $(\sqrt{a^2-z^2})'=\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}$, 即可得到弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2-z^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}\,\mathrm{d}z,$$

这样就得到静矩为

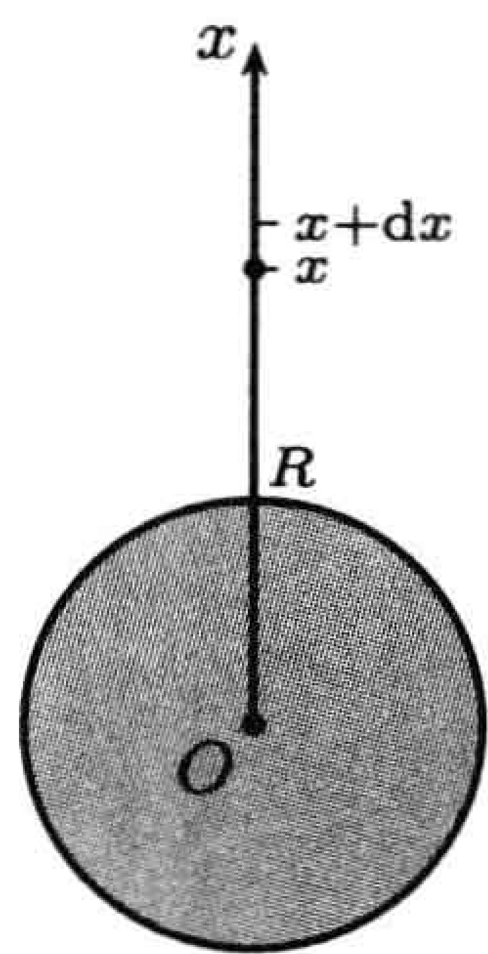
$$\int_0^a 2\pi az\,\mathrm{d}z=\pi a^3.$$

再除以半球面积 $2\pi a^2$ 就得到 $\mu_z=\frac{a}{2}$. □

§4.10 力学和物理学中的问题 (习题 2516–2530)

内容简介 本节是积分学在力学和物理学中的一些应用, 根据问题的具体背景, 应用有关的物理定律, 将问题归结为积分计算或者简单的微分方程求解. 在具体归结中一般均可用微元法.

习题 2517 把质量为 m 的物体从地球 (其半径为 R) 表面抬升到高度为 h 的地方, 需要对它作多少功? 若物体远离至无穷远处, 则功等于多少?



习题 2517 的附图

解 1 作功是为了克服地球引力. 在地面附近, 只要将重力 $F = mg$ 乘以提升的高度 h 即可, 但本题的力则需要用万有引力定律来确定, 即

$$F = \frac{kMm}{r^2},$$

其中 k 为万有引力常数, M 为地球的质量, m 为题设的物体质量, r 是地球中心到物体的距离. 这里将物体简化为一个质点.

如附图所示, 取地球中心为原点, 取 Ox 轴垂直向上. 设物体当前的位置为 x, 考虑将其从高度 x 提升到 $x + \mathrm{d}x$ 时需要作的功.

从万有引力定律可知, 所要作的功为

$$\mathrm{d}W = \frac{kMm}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

利用当 $x = R$ 时有 $F = mg$, 于是有

$$\frac{kMm}{R^2} = mg,$$

从而可以得到 $kM = gR^2$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \dfrac{mgR^2}{x^2}$ 可知有

$$W(x) = -\frac{mgR^2}{x} + C.$$

然后再利用 $W(R) = 0$, 就可以求出待定常数 $C = mgR$, 于是功 $W(x) = mgR\left(1 - \dfrac{R}{x}\right)$. 用高 $x = R + h$ 代入, 就知道将物体从地面提高 h 所需要做的功为

$$W(R+h) = mgR\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = mg\frac{Rh}{R+h}.$$

这个答案在 $h \ll R$ 时也就与 mgh 差不多.

对于 h 为无穷远的情况, 只要令 $h \to +\infty$ 取极限, 就得到将物体抛至无穷远处所需要作的功为 mgR.

若令 $mgR = \dfrac{1}{2}mv^2$, 则就得到 $v = \sqrt{2gR}$, 这就是将地面上的物体送到无穷远处所需要的初始速度. 它与物体的质量 m 无关, 一般称之为第二宇宙速度, 记为 v_2. 取 $g = 9.8$ 米/秒^2, $R = 6.38 \times 10^3$ 千米, 可计算出 $v_2 \approx 11.2$ 千米/秒. □

解 2 在求出 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}$ 之后, 只要利用 $W(R) = 0$ 就可以用定积分计算如下:

$$W(R+h)=\int_R^{R+h}W'(x)\,\mathrm{d}x=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=mgR^2\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_R^{R+h}=mgR^2\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\Big)=mg\frac{Rh}{R+h}.$$

而当 $h\to+\infty$ 时则可直接计算广义积分如下:

$$W(+\infty)=\lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=mgR^2\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_R^{+\infty}=mgR.\quad\square$$

注 以上两个解法无本质差别, 都是从

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=\frac{mgR^2}{x^2}$$

出发求未知函数 $W(x)$. 一般而言, 若取 x 为自变量, $y(x)$ 为未知函数, 则将

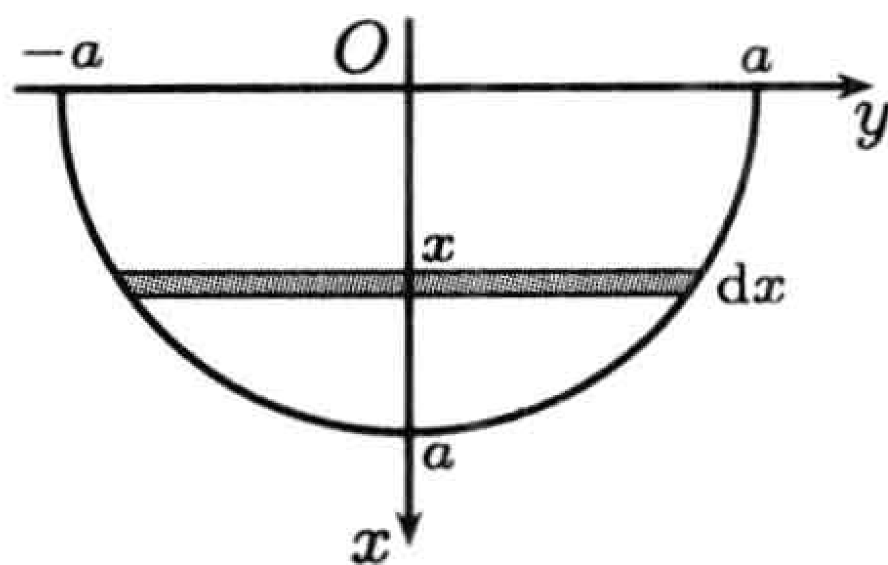
$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0\ \text{或者}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

称为 (常) 微分方程. 若后一式的右边不出现 y, 则就是求不定积分. 它是最简单的微分方程, 本题就是如此.

从不定积分知道, 其中出现待定常数. 如解 1 所示, 根据条件 $W(R)=0$ 可以求出这个常数, 从而得到完全确定的解. 这在微分方程理论中称为初始条件.

习题 2520 求水对竖直放置的半圆形挡板的压力, 该挡板的半径为 a, 而水面位于挡板顶部直径的位置.

解 1 如附图 1 所示, 将原点置于水面, Ox 轴垂直于水面指向下方.

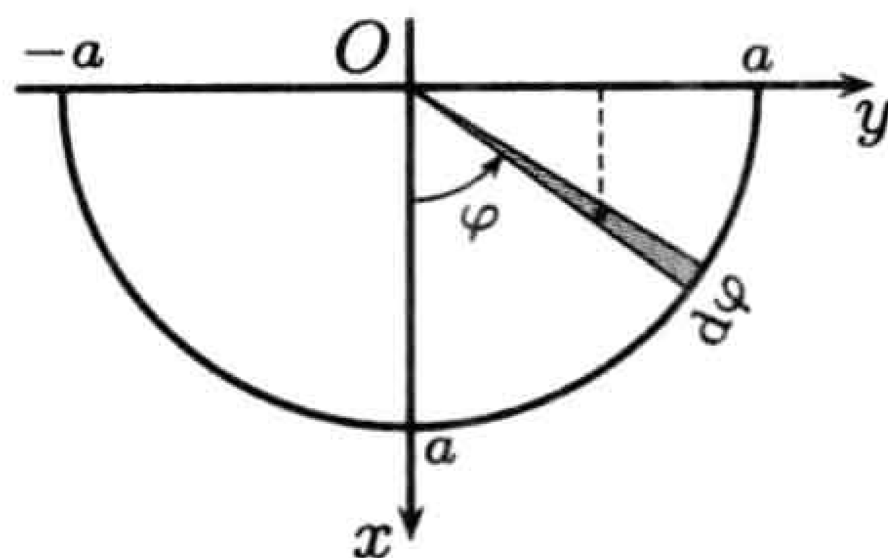


习题 2520 的附图 1

考虑挡板在水深为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间的部分 (即附图 1 的阴影带区), 深度 x 处的压强为 ρgx, 其中 ρ 为密度, 可取为 1, g 是重力加速度. 为简明起见, 下面略去这个常数因子. 将深 x 处的压强乘以阴影带区的面积, 近似地得到 $\mathrm{d}F=2x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. 将它对 x 从 0 到 a 积分得到

$$F=2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^3.\quad\square$$

解 2 如附图 2 所示, 考虑挡板在角 φ 到 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 之间的扇形部分. 可以将它近似地看成为一个三角形, 它的质心离开原点的距离为 $2a/3$. 水对这个扇形的压力等于扇形面积乘以水在质心处的压强. 这就是



习题 2520 的附图 2

$$\frac{2}{3}a\cos\varphi\times\frac{1}{2}a^2\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}a^3\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

利用对称性, 将它对于 φ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上积分并乘以 2, 就得到

$$F=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}a^3.\quad\square$$

注 这里需要解释一下, 在解 2 中作用在一个小扇形上的水压力为什么等于其面积乘以在其质心处的压强?

为此只要注意水的压强值 (在忽略常数因子后) 等于深度 x, 也就是到 Oy 轴的距离. 由此可见, 这样的计算可以类比于 §4.9 中的静矩公式, 而上述扇形的静矩就等于面积乘以其质心到 Oy 轴的距离. 因此解 2 的做法是合理的.

解 3 既然本题等价于计算附图中的半径为 a 的半圆关于 Oy 轴的静矩, 那么它就等于半圆的面积乘以半圆的质心到原点的距离.

将这个距离记为 μ_x, 由于半圆围绕 Oy 轴得到的是半径为 a 的球体, 而半圆的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$, 利用古尔丹第二定理就有

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{2}\pi a^2 \times 2\pi\mu_x,$$

从而就得到 $\mu_x = \frac{4a}{3\pi}$. 于是静矩以及所要求的水压力就是

$$\mu_x \times \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{2}{3}a^3. \quad \square$$

习题 2523 半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转, 求此球的动能.

解 对于由质点 m_i $(i = 1, \cdots, n)$ 组成的离散系统, 绕固定轴旋转的动能为 $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$, 其中 v_i 是质点 m_i 的速度, 若旋转的角速度为 ω, 则 $v_i = r_i\omega$, 其中 r_i 是质点 m_i 到旋转轴的距离, $i = 1, \cdots, n$. 这样就得到力学中计算动能的公式为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}M^{(2)}\omega^2,$$

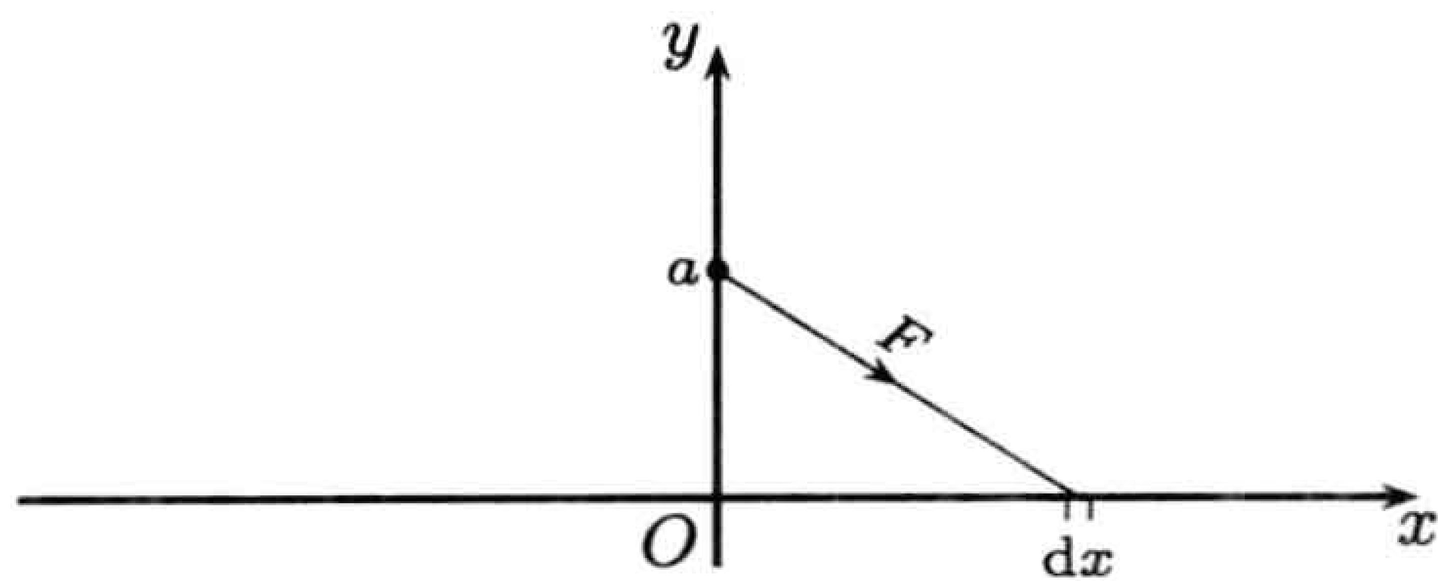
其中 $M^{(2)}$ 是质点系的转动惯量. 对质量为连续分布的系统, 只要将上述 m_i 用微分代替, 将求和改为求积分即可得到.

由于在 §4.9 的习题 2504.2 中已经求出了本题的球关于直径的转动惯量为 $M^{(2)} = \frac{8\pi}{15}R^5\delta$, 因此本题的答案就是

$$T = \frac{1}{2}M^{(2)}\omega^2 = \frac{4\pi}{15}R^5\delta\omega^2. \quad \square$$

习题 2524 线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 而质量为 m 的质点?

解 1 如附图所示, 将该直线 (棒) 置于 Ox 轴上, 考虑微元 dx 对点 $(0, a)$ 处的质点的引力.



习题 2524 的附图

微元 dx 的质量为 $\mu_0\,dx$, 它到点 $(0, a)$ 的距离是 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 因此根据万有引力定律知道该微元对质量 m 的质点的引力是 $F = \frac{km\mu_0\,dx}{x^2 + a^2}$, 其中 k 为常数, 力的方向从点

$(0,a)$ 指向点 $(x,0)$. 利用对称性, 合力在 x 方向的分量为 0, 在 y 方向的分量小于 0. 因此只要将上述 F 投影到 Oy 轴方向再积分即可.

这样就列出积分公式如下:

$$k\mu_0 m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x=2ka\mu_0 m\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

作代换 $x=a\tan t$, 就得到

$$\begin{aligned}2ka\mu_0 m\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}&=\frac{2ku_0 m}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2ku_0 m}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2ku_0 m}{a}.\quad\square\end{aligned}$$

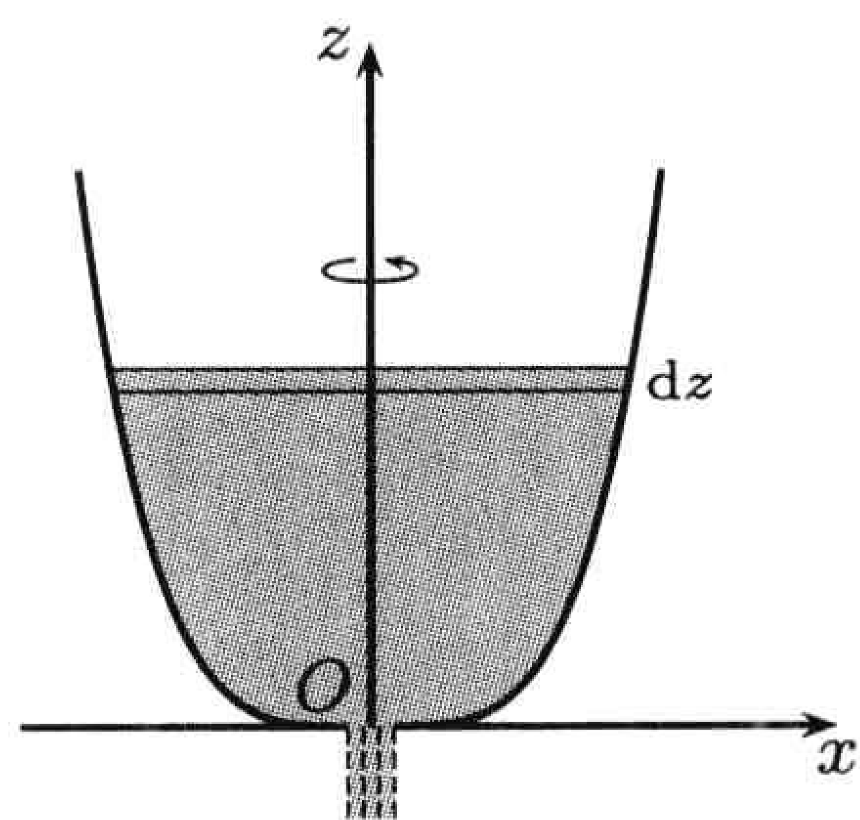
解 2　从微分方程角度来看, 可考虑在 Ox 轴上位于区间 $[-x,x]$ $(x>0)$ 上的细棒对 $(0,a)$ 处质点的引力. 从对称性知道只要计算在 Oy 轴方向的合力的值. 显然它是 x 的函数, 记为 $F(x)$.

当细棒两端分别增加长度 $\mathrm{d}x$ 时, 就可以如解 1 所示得到 $F(x)$ 的微分为

$$\mathrm{d}F=2ka\mu_0 m\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x,$$

以下即求 $F(x)$ 并令 $x\to+\infty$, 如解 1 所示, 这可合成为广义积分的计算, 从略. □

习题 2527　旋转体容器应该具有什么形状, 才能使液体从容器底部流出时, 液体上表面的下降是均匀的?



习题 2527 的附图

解　如附图所示为容器的一个截面. 设想该容器是用 xOz 平面内的曲线 $z=z(x)$ 围绕 Oz 轴旋转得到, 其中设 $z(0)=0$, 曲线在第一象限中.

假设容器中液体的流出孔开在底部原点处, 则根据托里拆利定律, 液体从容器中流出的速度为

$$v=c\sqrt{2gh},$$

其中 g 为重力加速度, h 为孔上方的液体水平面的高度, $c=0.6$ 为实验所得系数.

如附图所示, 液体水平面的高度是时间的函数, 记为 $z(t)$, 则在时间 $\mathrm{d}t$ 内 $z(t)$ 下降 $\mathrm{d}z$ 时容器内减少的液体体积就等于流出的液体量.

用托里拆利定律, 就得到液体的流出量为

$$v\,\mathrm{d}t=c\sqrt{2gz}\,\mathrm{d}t,$$

而液面高度从 $z+\mathrm{d}z$ 降到 z 时的液体体积可从旋转体的生成知道是 $\pi x^2\,\mathrm{d}z$. 于是就有

$$\pi x^2\mathrm{d}z=c\sqrt{2g}\,z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

也就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{c\sqrt{2g}}{\pi}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}}}{x^2}.$$

根据题意要求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 为常数, 因此就得到 $z=Cx^4$, 其中 C 为常数. □

习题 2528 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的量成正比. 设镭的量在初始时刻 $t=0$ 为 Q_0, 经过时间 $T=1600$ 年它的量减少了一半. 求镭的衰变规律.

解 本题中的规律对于化学中的放射性元素普遍成立, 一般称题设的时间 T 为该元素的半衰期.

从初始时刻 $t=0$ 开始起算, 设在时刻 $t\geqslant 0$ 时的量为 $Q(t)$, 则就有微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-kQ,$$

其中 k 为待定的正常数.

由于上述微分方程已经表明 $Q(t)$ 的导数小于 0, 因此 $Q(t)$ 为 $t\geqslant 0$ 上的严格单调递减函数, 从而就有反函数 $t=t(Q)$, 且得到其导数满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}Q}=-\frac{1}{kQ},$$

这已经成为一个求不定积分的问题. 于是就有

$$t=-\int\frac{1}{kQ}\,\mathrm{d}Q=-\frac{1}{k}\ln Q+C.$$

将初始条件, 即 $t=0$ 时 $Q(0)=Q_0$, 代入后就可以确定出常数为 $C=\frac{1}{k}\ln Q_0$. 于是得到

$$t=-\frac{1}{k}\ln\frac{Q}{Q_0}.$$

又利用半衰期为 1 600 年, 取时间的单位为年, 则就有 $1\,600=-\frac{1}{k}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{k}\ln 2$, 于是解出

$$k=\frac{1}{1\,600}\ln 2.$$

最后即得到所求的衰变规律为

$$\begin{aligned}Q(t)&=Q_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{1\,600}t\ln 2}\\&=Q_0\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{1\,600}t}\\&=Q_0 2^{-\frac{1}{1\,600}t}.\end{aligned}$$ □

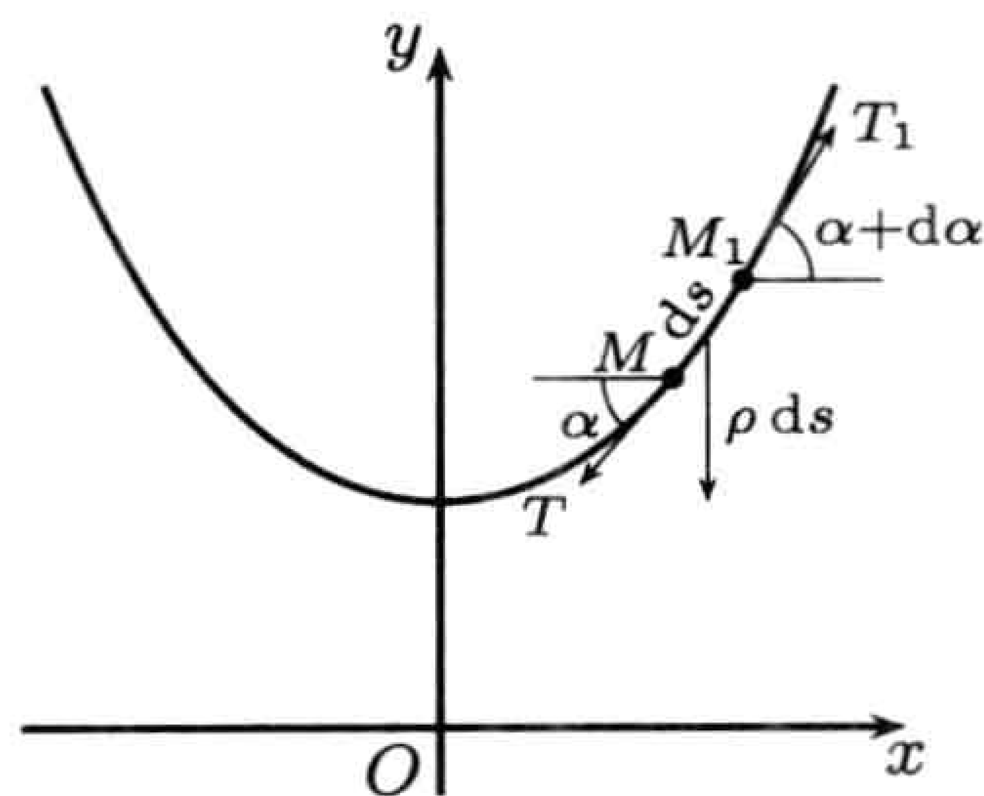
补 充

在 §4.6 的习题 2454 中需要知道悬链线的方程为 $y=a\cosh\frac{x}{a}$. 在该题的注 2 中指出, 悬链线是指一条两端悬挂着的均匀柔软的细绳在平衡状态时所取的形状. 由于对这一点的讨论恰好属于本节的主题, 因此在这里给出证明, 作为对本节的补充 (主要取材于 [17] 的第一卷第二分册 §5.5 的第三个例子).

命题 4.16 悬链线的形状为 $y(x) = a\cosh\dfrac{x}{a}$.

证　如附图所示, 用曲线代表绳子的形状, 在其所在平面上取坐标系, 其中的 Ox 轴沿水平方向, Oy 轴沿垂直方向. 考察绳子的一小段 MM_1. 设这一段的弧长为 $\mathrm{d}s$. 作用在这一小段绳子上有三个力: 作用在点 M 的张力 T, 作用在点 M_1 的张力 T_1 和这段绳子本身的重量 $\rho\,\mathrm{d}s$, 其中 ρ 是绳子的密度.

由于绳子是柔软的, 因此张力方向是沿着曲线的切线方向. 在点 M 和 M_1 处的切线的倾斜角分别记为 α 和 $\alpha+\mathrm{d}\alpha$.



悬链线的示意图

由于上述三个力达到平衡, 因此在水平方向就有

$$T\cos\alpha = T_1\cos(\alpha+\mathrm{d}\alpha) = T_0,$$

其中 T_0 对全段绳子为一个常数. 在垂直方向则有

$$\rho\,\mathrm{d}s + T\sin\alpha = T_1\sin(\alpha+\mathrm{d}\alpha).$$

合并两个等式就得到

$$\rho\,\mathrm{d}s + T_0\tan\alpha = T_0\tan(\alpha+\mathrm{d}\alpha).$$

设曲线方程为 $y=y(x)$, 即未知函数, 则有 $\tan\alpha = y'(x)$, $\mathrm{d}s = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$ 和

$$\tan(\alpha+\mathrm{d}\alpha) = y'(x+\mathrm{d}x) = y'(x) + y''(x)\,\mathrm{d}x.$$

将它们代入前面得到的等式, 于是就得到微分方程为

$$y'' = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{T_0}\sqrt{1+y'^2}.$$

这是一个二阶微分方程, 但其中不出现 $y(x)$, 因此可以先求出 $y'(x)$, 然后再积分求出 $y(x)$. 又由于其中也不出现自变量 x, 因此与习题 2528 类似, 只要将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(y')} = \frac{T_0}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

就可以积分得到

$$x = \frac{T_0}{\rho}\ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) + C,$$

其中 C 为待定常数.

利用反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ (见 §3.1.8 的 (3.11)), 就可将上述等式改写为

$$y' = \sinh\left(\frac{\rho}{T_0}x + C_1\right),$$

再积分一次, 则得到

$$y = \frac{T_0}{\rho}\cosh\left(\frac{\rho}{T_0}x + C_1\right) + C_2,$$

其中含有 C_1 和 C_2 两个待定常数, 它们可以根据悬挂点的位置或其他条件来确定. 若记 $a = T_0/\rho$, 并取 $C_1 = C_2 = 0$, 则就得到前面所述的悬链线方程为

$$y = a\cosh\frac{x}{a}.$$

可以看出, 取不同的 a 只相当于相似变换, 而取不同的 C_1 与 C_2 则相当于曲线在水平方向和垂直方向的平移. □

§4.11 定积分的近似计算法 (习题 2531–2545)

内容简介 由于大量的被积函数的原函数不是初等函数, 如何对积分作近似计算就成为一个重要的问题. 《习题集》在本节介绍了三种最为基本的积分近似计算方法, 它们是计算数学中的数值积分内容的起点 (可参看 [22]).

现在简述这些计算方法的来历 (参见下页的示意图). 设要计算 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分. 对 $[a,b]$ 取 n 等距分划, 并取

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_i=a+ih,\ y_i=y(x_i)\ \ (i=0,1,\cdots,n).$$

前两个方法来自于取特定的黎曼和, 并按其几何形象命名为矩形法和梯形法. 对每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 取其左端点为介点, 就得到矩形法的计算公式. 若对每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 取高度为 $(y_{i-1}+y_i)/2$ 的矩形, 即相当于用直角梯形取代曲边梯形, 则就得到梯形法的计算公式. 这两种方法很直观, 但过于简单, 实际效果一般不是很好.

较有实用价值的是第三个方法, 即抛物线法, 也称为辛普森法. 这时取 $n=2k$, 然后在每个子区间 $[x_{2i-2},x_{2i}]$ $(i=1,\cdots,k)$ 上, 用经过三个点 (x_{2i-2},y_{2i-2}), (x_{2i-1},y_{2i-1}), (x_{2i},y_{2i}) 的抛物线来代替 $y=f(x)$, 这也就是对上述的每个子区间用 §4.7.1 的习题 2460 中的辛普森公式 (俗称万能公式), 然后相加求和, 这样就得到抛物线公式 (也称辛普森公式).

为方便起见将这几个方法列表如下 (其中统一取 $h=\dfrac{b-a}{n}$):

矩形公式:

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

其中

$$R_n=\frac{(b-a)h}{2}y'(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant b);$$

梯形公式:

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=h\Big(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}\Big)+R_n,$$

其中 (4.21)

$$R_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant b);$$

抛物线公式 (辛普森公式): 设 $n=2k$,

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{3}\big[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})\big]+R_n,$$

其中

$$R_n=-\frac{(b-a)h^4}{180}y^{(4)}(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

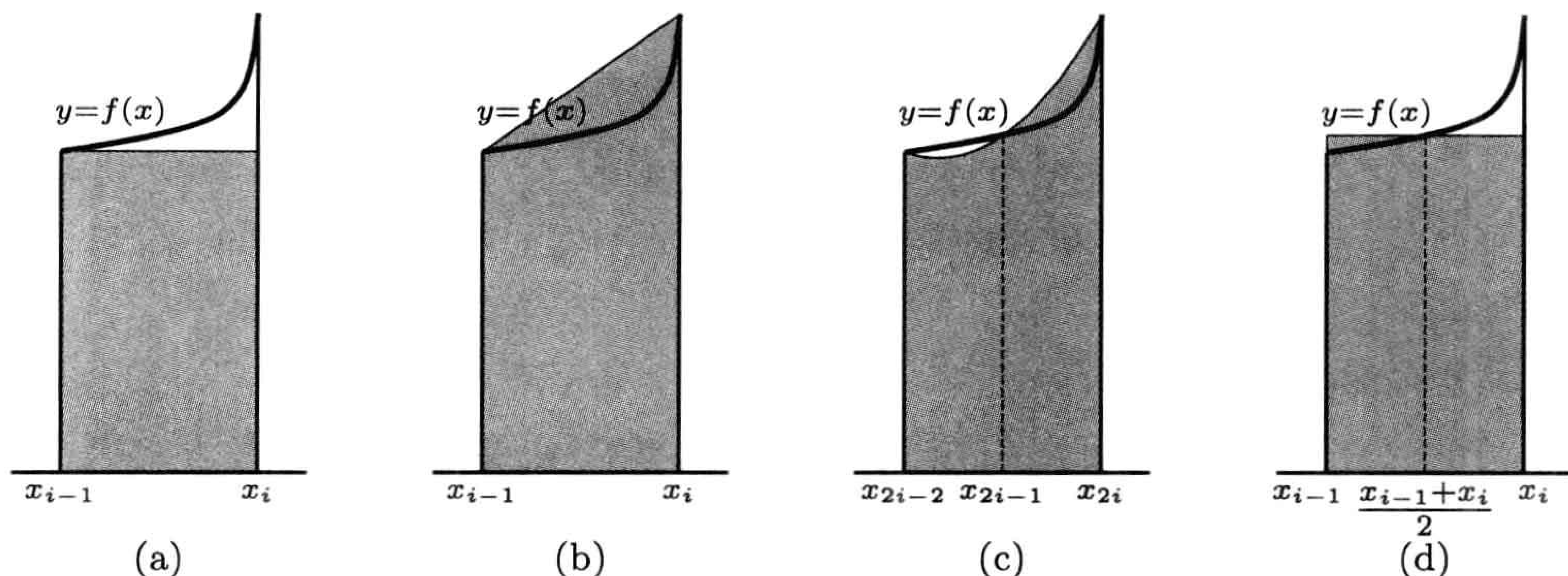
注　在很多教科书中提到的矩形法与这里所说不同 (例如见 [15] 第二卷的 §9.5), 即对每个子区间取其中点为介点, 以下称之为改进的矩形法. 其计算公式为:

改进的矩形公式:

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = h\Big[y\Big(\frac{x_0+x_1}{2}\Big)+y\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)+\cdots+y\Big(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\Big)\Big]+R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{(b-a)h^2}{24}y''(\xi)\ \ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$



近似求积法的示意图: (a) 矩形法, (b) 梯形法, (c) 辛普森法, (d) 改进的矩形法

下面主要讲解用辛普森公式的几个习题. 这时 $n=2k$ 均为偶数, 即将积分区间等分为 k 个子区间, 在每个子区间上用万能公式. 所用到的函数值共有 $n+1=2k+1$ 个.

习题 2537 利用辛普森公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ (n=10)$.

解　记 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 并补充定义 $f(0)=1$, 又记 $h=\frac{\pi}{20}$, $y_i=f(ih)$, $i=0,1,\cdots,10$, 则就有

$$S=\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)].$$

如在第一册的 §1.1.5, §1.2.3 (习题 72) 和 §2.10.3 中所示, 除了方法本身的误差之外, 在每一步计算中还可能有舍入误差. 对本题的上述公式的计算采用 10 位计算器, 这样就较好地控制了舍入误差. 计算得到 $y_0=1$, 其他的 y_i $(i=1,\cdots,10)$ 列表如下:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0.157 079 633	0.995 892 735	6	0.942 477 796	0.858 393 691
2	0.314 159 265	0.983 631 643	7	1.099 557 429	0.810 331 958
3	0.471 238 898	0.963 397 762	8	1.256 637 061	0.756 826 729
4	0.628 318 531	0.935 489 284	9	1.413 716 694	0.698 646 585
5	0.785 398 163	0.900 316 316	10	1.570 796 327	0.636 619 772

最后得到的结果是

$$S \approx 1.370\,762\,947.$$

为了知道其精确程度, 可以用辛普森公式的误差估计公式

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(\xi),\ a \leqslant \xi \leqslant b.$$

这里要计算 4 阶导函数的界限, 计算量较大, 我们只列出最后结果为 $0 \leqslant y^{(4)}(x) \leqslant 0.2,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 这样就得到本题的误差估计为

$$-1.06 \times 10^{-6} < R_n < 0.$$

由此可见, 用辛普森公式计算的结果的小数点后的前 5 位都是精确的.

用 Mathematica 将本题的积分计算到小数后的 10 位, 答案为 1.370 762 168, 可见用辛普森公式得到的结果在小数点后的前 6 位都是准确的. □

注 作为三种方法的比较, 我们可以用以上的数据 $y_i,\ i = 0, 1, \cdots, 10$ 代入矩形法和梯形法的公式中, 并利用相应的误差估计公式, 看用相同的数据所得到的结果与计算方法的关系.

用矩形法, 即得到

$$S_{矩形} = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_9) \approx 1.398,$$

其误差公式给出的范围为 $R_{10} \in (-0.05, 0)$, 可见在矩形公式得到的结果中取前 2 位数字 1.4 是精确的.

用梯形法, 即得到

$$S_{梯形} = h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + \cdots + y_9\right) \approx 1.369\,929,$$

其误差公式给出的范围为 $R_{10} \in (0, 1.1 \times 10^{-3})$, 可见在梯形公式得到的结果中取前 3 位数字 1.37 是精确的.

用改进的矩形法时从误差公式知道其误差是梯形法的一半, 但是对于 $n = 10$ 需要另行计算 10 个子区间的中点处的函数值, 这里从略. 若用 $n = 5$, 则就可以用上述现成的数据进行计算, 得到 1.372 的近似值, 这比 $n = 10$ 的矩形法还要好一些.

习题 2539 取 $n = 10$, 计算卡塔兰常数

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

注 本题的计算与习题 2537 类似. 这里只指出, 卡塔兰常数是在数学中的一个特殊常数, 在 Mathematica 5.0 中举出了它的 33 个不同的表达式. 本题的积分即是其中的第一个表达式. 这里再给出卡塔兰常数的一个无穷级数展开式:

$$\begin{aligned} G &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \cdots. \end{aligned}$$

目前还不知道它究竟是有理数还是无理数, 虽然一般都相信它是无理数, 而且是超越数.

习题 2542 精确到 10^{-4}, 计算 $\int_0^1 (\mathrm{e}^x-1)\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 (概要) 本题的困难在于, 虽然积分是常义的, 然而被积函数从一阶导数开始直到 4 阶导数在 $x=0$ 右侧都无界, 因此不可能用现成的辛普森法的误差估计公式来确定 n 应该取多少.

有各种方法可以克服这个困难. 这里我们推荐用分部积分法消除在导数中出现的上述奇性. 为此有①

$$\int_0^1 (\mathrm{e}^x-1)\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -(\mathrm{e}^x-x-1)\ln x\Big|_{+0}^{1} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\,\mathrm{d}x - 1.$$

这时的被积函数是 $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$, 可以在区间 $[0,1]$ 上估计得到它的 4 阶导数在 $[0.2, 0.5]$ 之间. 利用辛普森法的误差公式, 从而只需要满足不等式

$$\frac{h^4}{180}\cdot 0.5 < 10^{-4},$$

右侧解出 $h < 0.435$. 由于区间长度为 1, 而辛普森法中的 n 必须为偶数, 因此取 $h=0.25$, 即 $n=4$.

以下的计算是简单的, 即用公式

$$S = \frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$

求得 $S=0.317\,908\,917$, 而本题积分的 10 位精确答案为 $0.317\,902\,151$, 可见实际上 $n=4$ 的效果非常好②. □

习题 2543 精确到 0.001, 计算概率积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

提示 本题的困难在于积分区间无界, 因此需要先用变量代换将它转化为常义积分. 在《习题集》的老版中本题有提示: 用 $x=\dfrac{t}{1+t}$. 当然还可以用其他代换. □

习题 2544 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

解 1 在 §4.6 的习题 2453 已经得到了椭圆周长的积分公式. 按照该题的注中的公式, 本题的椭圆的离心率为 0.8, 周长为

$$s = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.64\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

由于本题没有提出计算的精度要求, 我们就用 $n=4$ 的辛普森公式来计算, 并与更精确的答案比较, 以了解计算的效果如何.

---

① 在这里的分部积分计算中, 利用一个函数的原函数可以相差一个任意常数的事实, 在选取 e^x-1 的原函数时, 用的是 e^x-x-1, 而不是简单地取 e^x-x. 这是为了保证右边的第一项为有限数. 这种技巧在 §3.6.2 的习题 2143 的解 2 中已经见到 (参见该题的注).

② 从以上对 h 的选取可知, 若取 $n=2$ 和 $h=0.5$, 效果应当不错. 这就是三点辛普森公式 (即万能公式). 计算得到 $S\approx 1.318\,008$, 与准确值比较, 误差为 1.06×10^{-4}. 即比题设的要求稍稍大了一点.

记 $y(x) = \sqrt{1-0.64\sin^2 x}$, $h = \pi/8$, $x_i = ih$, 则先计算得到 y_i, $i = 0, 1, \cdots, 4$, 列表如右, 然后按照辛普森公式得到

$$S = \frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$

$$\approx 1.276\,474\,456.$$

再乘以 $4a$ 即得椭圆周长 $s \approx 51.058\,978\,26$.

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.392 699 081	0.951 984 333
2	0.785 398 163	0.824 621 125
3	1.178 097 245	0.673 591 738
4	1.570 796 327	0.6

用 Mathematica 计算得到 51.053 997 73, 可见用 $n = 4$ 的辛普森公式得到的结果中的前 4 位数字是精确的. □

解 2 由于在许多问题中需要求椭圆周长, 因此出现了不少只需要少量计算即可得到椭圆周长近似值的公式. 经常使用的有以下不等式 (见 [34] 的例题 11.3.3):

$$\pi(a+b) \leqslant s \leqslant \pi\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

对于本题就是 $16\pi \approx 50.265 < s < 4\sqrt{17}\pi \approx 51.812$. 取两边的算术平均值就得到 $s \approx 51.038$, 可见前 3 位数字是准确的, 相对误差已小于 0.03%.

若进一步使用 [34] 中的近似公式 (16.7), 即

$$s \approx \pi\Big(\frac{9}{8}(a+b)+\frac{3}{16}\sqrt{2a^2+2b^2}-\frac{5}{8}\sqrt{ab}\Big),$$

则对于本题就有

$$s \approx \pi\Big(18+\frac{3}{4}\sqrt{17}-\frac{5}{4}\sqrt{15}\Big) \approx 51.054\,336,$$

可见前 5 位数字都是精确的, 它比解 1 中取 $n = 4$ 的辛普森公式的结果还要好一点. □

本节的最后一题涉及又一个特殊函数——正弦积分.

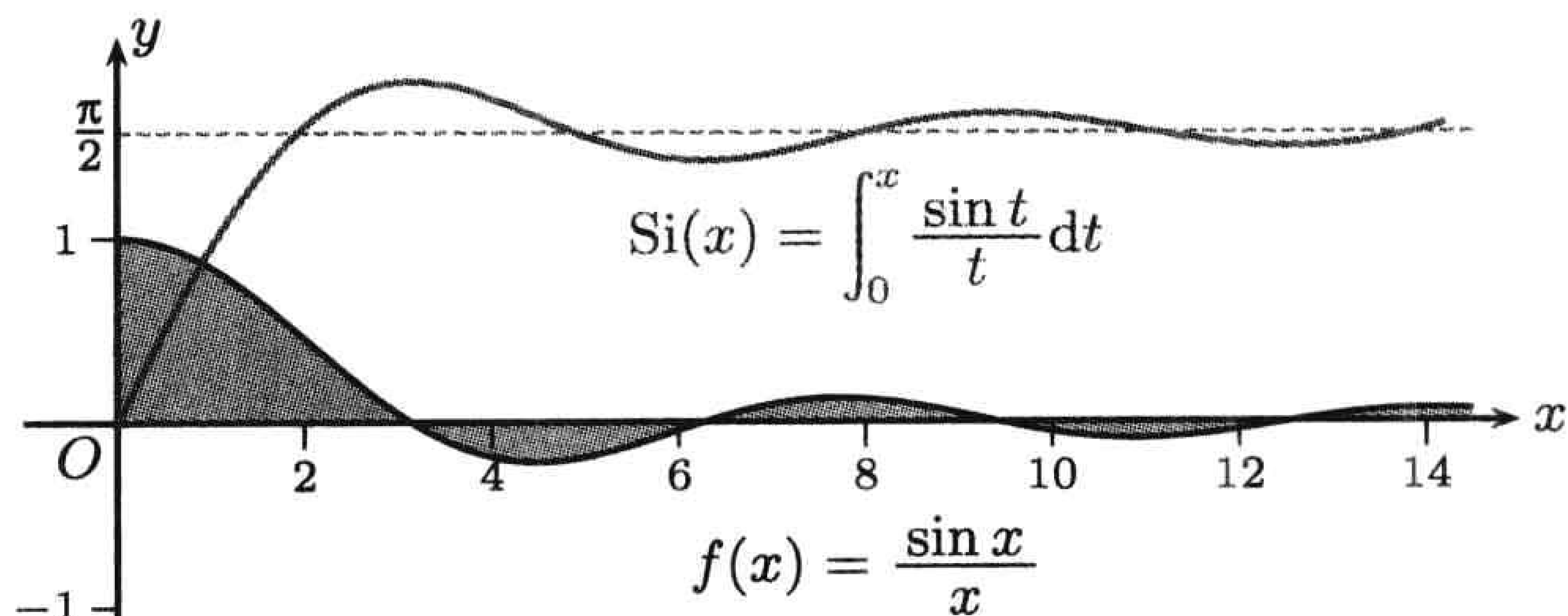
习题 2545 取 $\Delta x = \dfrac{\pi}{3}$, 描点作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

的图像.

注 一般将本题的函数记为 $\mathrm{Si}(x)$, 称为正弦积分函数, 其定义域为 $[0, +\infty)$. 在附图中作出它和被积函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像供参考.

从图中可见 $\mathrm{Si}(x)$ 有水平渐近线 $y = \dfrac{\pi}{2}$, 这来自于在今后会学到的广义积分:



习题 2545 的附图

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\text{①}.$$

① 这个积分的计算见 §5.4.5 末的例题 3, 更一般性的讨论则见 §7.3.2 的习题 3812.1 (狄利克雷积分).

第五章 级数

内容简介 这一章的前六节介绍无穷级数理论本身, 从数项级数、函数项级数直到幂级数和傅里叶级数, 后五节则是无穷级数的应用, 其中有级数求和、积分计算、无穷乘积、斯特林公式和连续函数的多项式逼近.

关于本章的参考书, 除了 [15, 34, 36] 中有关级数的章节之外, 还推荐级数方面的两本名著 [5, 20].

§5.1 数项级数. 同号级数收敛性的判别法 (习题 2546–2655)

内容简介 本节除了无穷级数的一些基本题之外, 主要是学习对同号级数的多种敛散性判别法, 但 §5.1.2 则不限于同号级数. 最后的 §5.1.7 为余项估计.

以下先从级数定义开始对于敛散性判别法作一个浏览.

级数的敛散性是通过数列的敛散性来定义的. 根据定义, 对无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 在定义其部分和数列

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

之后, 该级数收敛 (或发散) 等价于部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛 (或发散), 而在收敛时, 就将部分和数列的极限定义为级数的和.

特别是, 当级数收敛时, 在联系级数通项与部分和的等式

$$a_n = S_n - S_{n-1} \ \ (n \geqslant 2)$$

中, 令 $n \to \infty$ 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此级数通项收敛于 0 是级数收敛的必要条件. 反之, 通项所成数列 $\{a_n\}$ 不是无穷小量就成为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充分条件.

此外, 对于给定的一个数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 只要令 $a_1 = x_1, a_n = x_n - x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \cdots)$, 就可以得到一个无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 它的部分和数列就是原先给定的数列 $\{x_n\}$.

因此可以说, 在敛散性问题上, 研究级数与研究数列是等价的. 例如, 从关于数列的柯西收敛准则就导出无穷级数的柯西收敛准则, 从数列的单调有界收敛定理就导出同号无穷级数收敛等价于其部分和数列有界.

对于初学者也许始料未及的是, 无穷级数的敛散性还有许多更为深入细致的判别法, 它们在数列理论中是看不到的. 只就同号无穷级数而言, 就有着许多种来历不同和深入程度不同的敛散性判别法. 这反映了无穷级数这个主题的重要性和深刻性.

为方便起见, 除了上面已经提到的一些基本方法之外, 再将本节中主要的判别法列表如下 (其中级数通项非负或大于 0 的条件均可放宽为从某一项起如此):

比较判别法 I: 若 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散} \Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散};$$

等价量判别法 (即比较判别法的等价量形式): 若 $a_n > 0, b_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛 (发散)} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛 (发散)};$$

比较判别法 II (以 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 为比较级数):

若 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$, 则有 (记号 O^* 见 §1.6)

(a) 当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

(b) 当 $p \leqslant 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

达朗贝尔 (比值) 判别法: 若 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则有

(a) 当 $q < 1$ 时级数收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数发散;

柯西 (根值) 判别法: 若 $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则有

(a) 当 $q < 1$ 时级数收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数发散;

拉比判别法: 若 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$, 则有

(a) 当 $p > 1$ 时级数收敛, (b) 当 $p < 1$ 时级数发散;

高斯判别法: 若 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

其中 $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$, 则有

(a) 当 $\lambda > 1$ 时级数收敛, (b) 当 $\lambda < 1$ 时级数发散,

(c) 当 $\lambda = 1$ 时, 在 $\mu > 1$ 时级数收敛, 而在 $\mu \leqslant 1$ 时级数发散;

柯西积分判别法: 若 $f(x)$ $(x \geqslant 1)$ 为非负单调递减函数, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 收敛 (发散)} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛 (发散)}.$$

注 1 关于同号级数的判别法还有很多, 除了在本节后面的 §5.1.5 之外, 还可参看 [34] 的 §13.2 的前三个小节和该书的第十三章第二组参考题中有关判别法的题.

注 2 在上面列举的判别法中, 从达朗贝尔判别法开始, 除了柯西根值判别法之外,

都要求级数的通项所成数列 $\{a_n\}$ (至少从某项开始) 单调, 否则就不可能成功地使用它们. 但是柯西根值判别法则不受这个限制, 而且还可以将 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ 推广为上极限形式 (即 §5.1.3 的习题 2594):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

由于数列的上极限必定有意义, 这对于有无限多个缺项 (即存在无限多个 $a_n=0$) 的无穷级数特别合适.

下面大致按照所用的主要方法的不同分成若干小节进行介绍, 对部分习题还会用多种方法来进行讨论.

5.1.1 级数敛散性的基本题 (习题 2546–2570)

本小节的习题除了按照基本定义作敛散性讨论或求和之外, 还包含少量的证明题.

首先看能够从部分和数列出发直接判定收敛且可求和的几个习题. 这里的第一步就是要将部分和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 写成为所谓的封闭形式, 然后求其极限.

这可以通过无穷级数中的第一个重要级数, 即几何级数 (也称为等比级数) $a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$ $(a\neq 0)$, 来解释.

从代数运算可知, 几何级数的部分和在公比 $q\neq 1$ 时, 就可以写成为

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=a(1+q+\cdots+q^{n-1})=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

这时 S_n 中所含的级数的项数 n 变成为上述右边表达式中的参数, 从而可以研究当 $n\to\infty$ 时它是否有极限. 我们一般就将这种表达式称为封闭形式.

利用这个封闭形式就可以知道, 除了公比 $q=1$ 时几何级数明显发散之外, 当 $|q|<1$ 时极限存在且等于 $\dfrac{a}{1-q}$, 而当 $|q|>1$ 或 $q=-1$ 时极限不存在.

然而能够如此写成封闭形式的部分和并不很多. 这里可以回顾 §1.2.1 的习题 55–56, 它们恰好代表了两种不同的方法. 前者以几何级数为基础, 再加上其他技巧. 下面看一个典型例子.

习题 2548 直接证明级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\cdots$ 收敛并求其和.

解 1 根据级数收敛的部分和定义, 这就是要求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right),$$

这在 §1.2.1 的习题 55 已用代数方法求出为 3. □

解 2 解 1 所提到的代数方法也可以直接用于级数求和. 首先, 引入参数 $x\in[0,1)$, 考虑级数

$$x+3x^2+5x^3+\cdots+(2n-1)x^n+\cdots,$$

可以用某种判别法, 例如达朗贝尔比值判别法或者柯西根值判别法, 知道它是收敛的, 因此可以将它的和记为函数 $S(x)$, 其中 $x\in[0,1)$. 然后利用收敛级数的代数运算就有

$$S(x) = x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots + (2n-1)x^n + \cdots,$$
$$xS(x) = \qquad x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots + (2n-1)x^{n+1} + \cdots,$$

将两个级数相减, 就得到

$$(1-x)S(x) = x + 2(x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) = x + \frac{2x^2}{1-x},$$

于是就求出了和函数的表达式为

$$S(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}.$$

令 $x = 1/2$ 代入就得到本题的级数和为 $S = S(1/2) = 3$. □

解 3 除了以上两个解法所用的代数方法之外, 也可以用微分学方法求和.

将级数的部分和如下分拆为两项:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \\
&= \left(\frac{2}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \cdots + \frac{2n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

上式右边的第二项的和是 $1 - \frac{1}{2^n}$, 当 $n \to \infty$ 时的极限等于 1. 对于右边的第一项, 则可用微分学工具求和, 这也就是在 §2.1.4 的习题 1024(a) 中对 P_n 的计算. 即先写出

$$x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x},$$

然后求导得到

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n}{1-x} + \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

用 $x = 1/2$ 代入, 并令 $n \to \infty$ 就得到极限为 4.

合并以上两项的计算可得本题的答案为 3. □

解 4 解 3 中的方法也可以用于一般的级数求和, 只是这里会出现新的理论问题.

首先将级数分拆如下:

$$\begin{aligned}
S(x) &= x + 3x^2 + \cdots + (2n-1)x^n + \cdots \\
&= 2x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) - (x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots),
\end{aligned}$$

这时右边的第二项的级数之和为 $\frac{x}{1-x}$, 而第一项中括号内的级数, 就是第二项的级数逐项求导得到的级数:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) &= (x)' + (x^2)' + \cdots + (x^n)' + \cdots \\
&= 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

如果这一步运算是合理的, 则就得到

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{2x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2},
\end{aligned}$$

即可得到与解 2 相同的答案.

然而 (5.1) 不能从求导数运算的线性法则形式地推出, 因为其中涉及无限项求和与求导数两种运算的交换顺序, 而它们都是极限运算. 这个问题要在学习了函数项级数和幂级数之后解决, 见后面的 §5.4 和 §5.5. 目前我们只能说, 在 (5.1) 成立的前提下, 解 2 中的级数和 $S(x)$ 可以用微分学方法求得. □

求部分和的封闭形式的另一种方法较早体现在 §1.2.1 的习题 56 中, 这就是裂项消去法①. 下面看一个例子.

习题 2552 直接证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 收敛并求其和.

解 如下即可求出部分和的封闭形式:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\\ &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\ &= (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2},\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 即可见其极限, 也就是级数和为 $1-\sqrt{2}$. □

习题 2553 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

解 1 这里的 x 是参数. 若 x 是 π 的整数倍, 则级数的每一项为 0, 因此级数收敛. 比较困难的是余下的情况, 即 x 不是 π 的整数倍的情况. 这时可以证明级数的通项当 $n\to\infty$ 时不是无穷小量, 因此级数发散.

用反证法. 若对某个 $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 级数收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$. 这时也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)x=0$. 于是即可得出

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin[(n+1)x-nx]\\ &= \sin(n+1)x\cos nx-\cos(n+1)x\sin nx\to 0\ \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

然而当 $x\neq k\pi$ 时左边的 $\sin x\neq 0$, 引出矛盾. □

解 2 [6] 若对某个 $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 级数收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$. 于是对于 $\varepsilon=\dfrac{|\sin x|}{4}$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|\sin nx|<\dfrac{|\sin x|}{4}$. 由此可推知有 $|\cos nx|>\dfrac{1}{2}$. 这样就可如下引出矛盾:

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x| &= |\sin nx\cos x+\cos nx\sin x|\\ &\geqslant |\sin x|\cdot|\cos nx|-|\sin nx|\cdot|\cos x|\\ &> \frac{1}{2}|\sin x|-\frac{1}{4}|\sin x|=\frac{1}{4}|\sin x|=\varepsilon.\end{aligned}$$ □

① 裂项消去法也称为连锁消去法, 在英文中有时将这种方法形象化地称为 telescoping, 即可以像望远镜那样将很长的表达式缩短. 在这样的意义上, §1.1.6 之 2 的习题 10(a) 的解 2 中也已使用了这个方法.

下面几个题与加法运算的结合律能否推广到无限项求和有关.

习题 2554 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来, 所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \left(\text{其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \ \ (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

解 记 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列, 则有 $A_1 = a_1 + \cdots + a_{p_2-1} = S_{p_2-1}, \cdots, A_1 + \cdots + A_n = a_1 + \cdots + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}-1}, \cdots$, 可见组合所得的级数的部分和数列为

$$S_{p_2-1}, \cdots, S_{p_{n+1}-1}, \cdots,$$

它是 $\{S_n\}$ 的一个子列. 根据子列的基本定理 (见 §1.2.6 的习题 89), 可见当 $\{S_n\}$ 收敛时, 这个子列也收敛, 且有相同的极限. 因此本题的前半题的结论成立.

反之, 则结论不能成立. 见下面的习题 2556. □

习题 2555 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 且把这级数的各项分别组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

提示 这时原级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 为单调数列, 因此只要引用 §1.2.6 的习题 90 (即单调数列有一个子列收敛就足以保证其收敛) 即可. □

习题 2556 研究级数 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 的收敛性.

解 1 级数的第 n 项为 $(-1)^{n-1}$, 当 $n \to \infty$ 时不是无穷小量, 从而级数发散. □

解 2 若将该级数按照以下两种方式重新组合:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots,$$

$$1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) + \cdots,$$

则分别得到两个收敛的无穷级数, 它们的和分别为 0 和 1. 由此用习题 2554 的前半题的结论, 就知道原来的无穷级数一定发散. □

小结 所谓加法结合律就是在不改变被加项次序时可以采用对和式加括号的方法改变求和顺序, 即将括号内的数先相加, 然后再求和. 对于有限项求和来说, 这是我们早就熟知的定律. 它使得有限项求和有确定的意义, 且可以在很多情况下简化计算. 然而以上三个习题告诉我们, 对于无限项求和来说, 只有当求和有意义 (即级数收敛) 时, 加法结合律才一定成立. 反之, 加括号后的无限项求和有意义时, 去掉括号后可能没有意义. 习题 2556 的解 2 就是最为明显的例子.

然而, 习题 2555 则表明, 对于正项级数来说, 加法结合律无条件成立. 当然, 这对于其他的同号级数, 其中包括非负项级数、负项级数和非正项级数, 也是如此.

对于《习题集》以下的习题 2557–2565, 其中的级数敛散性判定比较容易, 只举一个例子, 并试用在本节开始的列表中举出的各种判别法.

习题 2559 研究级数 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots$ 的收敛性.

解 1 (比较判别法 I) 利用 $1>\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}, \cdots$, 则有

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big),$$

然后利用调和级数发散 (见 §1.2.5 的习题 88), 可见本题的级数也发散. □

解 2 (等价量判别法) 从调和级数发散可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 也发散, 然后再从

$$\frac{1}{2n-1}\sim\frac{1}{2n}\ \ (n\to\infty),$$

即可知本题的级数发散. □

解 3 (比较判别法 II) 从调和级数发散, 然后从 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$ 即可知道 $a_n=O^*\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, 可见本题的级数发散. □

解 4 (高斯判别法) 可以通过代数运算得到

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+1}{2n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2n-1},$$

即有 $\lambda=1$, $\mu=1$, $\varepsilon=1$, $\theta_n=\dfrac{n}{2n-1}$ 有界, 因此级数发散. □

解 5 (柯西积分判别法) 取函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$, 则就可以从

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^{+\infty}=+\infty$$

推知本题的级数发散. □

注 本题还有很多其他解法, 习题 88 的四种解法于此也都有效. 例如用柯西收敛准则等. 这里只指出, 初学者也许不会想到的是, 在本节开始列表的判别法中, 达朗贝尔比值判别法、柯西根值判别法和拉比判别法对于本题都不能作出结论. 实际上对于 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1,\ \lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=1,$$

因此上述三种判别法都失效.

以下是几个基本的证明题.

习题 2566 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (A) 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (B) 皆收敛, 且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ (C) 也收敛. 若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性如何?

解 1 (用柯西收敛准则) 根据级数 (A) 和 (B) 收敛, 对它们用柯西收敛准则的必要性, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 且 $p > 0$ 时, 同时成立不等式 $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ 和 $|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon$. 由这两个不等式和题设的条件 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 就有

$$-\varepsilon < a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \leqslant c_{n+1} + \cdots + c_{n+p} \leqslant b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon,$$

即得到 $|c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}| < \varepsilon$. 再用柯西收敛准则的充分性, 就推出级数 (C) 收敛.

反之, 若级数 (A) 和 (B) 发散, 则不能对级数 (C) 作出任何结论. 为此只要举一个例子: 设对所有的 n 令 $a_n = -1 \leqslant b_n = 1$, 则级数 (A) 和 (B) 都发散, 而这时对于级数 (C) 仅仅知道对每一个 n 有 $|c_n| \leqslant 1$, 这当然不可能推出什么结论了. □

解 2 (用非负项级数的比较判别法) (只解前半题) 利用条件将两个收敛级数 (B) 和 (A) 逐项相减, 得到一个新的收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$, 而且它是非负项级数.

利用题设条件有

$$0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

根据比较判别法, 可见非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛. 再将这个收敛级数与收敛级数 (A) 逐项相加得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, 可见它收敛. □

习题 2568 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 逆命题不成立, 举出例子.

解 由于这时有 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 因此存在 $M > 0$, 使得 $0 \leqslant a_n < M$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 于是就有

$$0 \leqslant a_n^2 \leqslant M a_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M a_n$ 收敛和比较判别法, 即可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

反之, 则从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 可见逆命题不成立. □

注 可以指出, 虽然无穷级数与只含一个奇点 $+\infty$ 的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 有许多相似之处, 然而, 还有不能类比的方面. 本题就是如此. 例如, 在 $(1, +\infty)$ 上, 对每个正整数 n 于 $(n, n+1]$ 上定义非负函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & n < x < n + \dfrac{1}{n^3}, \\ 0, & n + \dfrac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant n + 1, \end{cases}$$

则就可以验证 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 然而 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 发散①.

习题 2570 证明: 若

$$\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

解 由条件可知存在 N, 当 $n > N$ 时 na_n 与 a 同号, 这表明对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以用同号级数的判别法. 然后由条件 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n}\right)$, 用比较判别法 II 即可见结论成立. □

5.1.2 柯西收敛准则的应用 (习题 2571–2577)

无穷级数的柯西收敛准则直接来自数列的柯西收敛准则 (见 §1.2.5), 后者是实数系基本定理之一 (参见 [34] 的第三章).

对于本节开始的各种判别法追本溯源, 可见它们来自于单调有界数列的收敛定理. 这表明对于同号级数的敛散性判定来说, 一般不必用柯西收敛准则. 本小节的部分习题不是同号级数, 方法上除了柯西收敛准则之外也还有其他方法可供选择.

下面是关于正项级数的一个证明题, 它与广义积分的 §4.4.3 的习题 2387 几乎相同.

习题 2571 证明: 若各项为正且其值单调递减的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

解 1 根据柯西收敛准则, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$0 < a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于通项单调递减, 因此上述和式的每一项都大于等于 a_n, 于是有

$$0 < (n-N)a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $n > 2N$, 则有 $\frac{n}{2} < n - N$, 因此得到 $0 < \frac{n}{2}a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, 即是 $0 < na_n < \varepsilon$. □

解 2 模仿习题 2387 的解 2 (参看该习题的附图), 定义一个新的数列:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则从

$$b_n - b_{n-1} = a_n - na_n + (n-1)a_{n-1} = (n-1)(a_{n-1} - a_n) \geqslant 0,$$

可见 $\{b_n\}$ 为单调递增数列. 又因 $b_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, 可见数列 $\{b_n\}$ 又有上界, 因此收敛.

① 与此有关的是: 级数收敛时其通项必定是无穷小量, 然而广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $f(+\infty)$ 可以不存在. 见 §4.4.3 的习题 2384.1 (还可参考习题 2384.2 的分析及其后的命题 4.13).

由此即可从 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_n\ (n=1,2,\cdots)$ 推出存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=A$. 再利用 §5.1.1 的习题 2570 的结论, 即可知 $A=0$. □

注 本题给出了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 存在的充分条件. 可以举例说明, 去掉级数通项单调递减的条件后, 这个极限可以不存在. 下面就是这样的一个正项级数, 它也见于 §5.1.3 的习题 2585(b) 中.

定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为平方数},\\ \dfrac{1}{n^2}, & n\text{ 不是平方数},\end{cases}$$

则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 (其和不超过 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和的两倍), 然而却有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,na_n=1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,na_n=0,$$

因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 不存在.

习题 2576 (调和级数) 利用柯西准则, 证明 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 发散.

注 此题与 §1.2.5 的习题 88 重复, 其中的解 2 则是直接证明其部分和当 $n\to\infty$ 时为无穷大量.

习题 2577(a) 利用柯西准则, 证明级数 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$ 发散.

解 1 用柯西准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的方法是: 证明存在某个 $\varepsilon_0>0$, 使得无论取多大的 N, 总存在 $m>n>N$, 使得 $|a_{n+1}+\cdots+a_m|\geqslant\varepsilon_0$.

对本题来说, 分析 $S_{6n}-S_{3n}$ 即可. 为清楚起见, 对这个差采取加括号的方法如下:

$$\begin{aligned}S_{6n}-S_{3n}&=\left[\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)\right]+\left[\frac{1}{3n+4}+\left(\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{3n+6}\right)\right]\\&\qquad+\cdots+\left[\frac{1}{6n-2}+\left(\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\right)\right]\\&>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>n\cdot\frac{1}{6n}=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

可见本题的级数发散. □

解 2 (概要) 用相同的方法直接估计部分和即可得到

$$S_{3n}>1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}>\frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big),$$

可见本题的级数发散. □

解 3 如果利用欧拉常数 C 的知识 (见 §1.2.3 的习题 146), 则可对部分和有更确切的了解:

$$\begin{aligned}S_{3n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n}-2\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n}\Big)\\&=C+\ln(3n)+\varepsilon_{3n}-\frac{2}{3}(C+\ln n+\varepsilon_n)\sim\frac{1}{3}\ln n\ (n\to\infty).\quad □\end{aligned}$$

5.1.3 达朗贝尔比值判别法和柯西根值判别法 (习题 2578–2597)

从教科书知道, 这两个判别法都是以几何级数为比较级数而得到的, 因此不是很强 (例如见 §5.1.1 的习题 2559 的注), 但由于使用简单, 因此属于最常用的判别法之列.

利用 §1.2.7 的习题 141, 即可知道理论上只要达朗贝尔比值判别法有效, 则柯西根值判别法也必定有效 (这就是本小节的习题 2593). 然而实际计算中也许往往用达朗贝尔判别法更为方便.

对于级数通项中出现阶乘的情况, 初学者会觉得难以使用柯西根值判别法. 其实这是由于不知道沃利斯公式和斯特林公式的缘故, 为此下面以命题的形式给出这两个公式, 这对于本章的许多问题都可能有用. 沃利斯公式的证明还可参考 [34] 的 §11.4.2, 斯特林公式的证明见 §5.9.3 的习题 3104.

命题 5.1 (沃利斯公式) 关于双阶乘 $(2n)!!$ 和 $(2n-1)!!$ 之比有

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n} \ (n \to \infty). \tag{5.2}$$

证 写出积分不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x,$$

并用 §4.2.6 的公式 (4.9) 代入, 就得到

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

将上式加以整理就得到与 (5.2) 直接有关的夹逼不等式:

$$\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{\pi n} < \frac{2n+1}{2n},$$

然后令 $n \to \infty$ 即得. □

注 这里给出的沃利斯公式 (5.2) 是一种便于使用的形式. 在一般文献中较常见的沃利斯公式为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2},$$

它与 (5.2) 等价 (参见《习题集》 §5.10 的习题 3103).

命题 5.2 (斯特林公式) 关于阶乘有

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \ (n \to \infty). \tag{5.3}$$

注 《习题集》中将与斯特林公式有关的计算题单独列为 §5.10. 应当指出, (5.3) 还只是斯特林公式的最简单形式, 更多的内容见 §5.10.2 中的补充材料.

下面的习题中, 除了达朗贝尔比值判别法和柯西根值判别法的应用例子之外, 还包含一些理论上的讨论和应用.

习题 2580 研究级数 $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$ 的收敛性.

解 1 本题用达朗贝尔比值判别法较为方便, 从

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\ (n\to\infty),$$

即可见级数收敛. □

解 2 若用斯特林公式 (5.3), 则用柯西根值判别法也是很方便的. 从

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\ (n\to\infty),$$

即可见级数收敛. □

注 其实本题只要用 §1.2.7 的习题 142 的结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$ 就足够了. 有时将它称为斯特林公式的弱形式.

习题 2585 (b) 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性, 其中 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n=m^2,\\ \frac{1}{n^2}, & n\neq m^2\end{cases}$ (m 为正整数), $n=1,2,\cdots$.

解 记级数的部分和为 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$, 则有

$$S_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k^2\leqslant n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

注 本题的级数已见于 §5.1.2 的习题 2571 的注 2 中. 无论是达朗贝尔判别法还是柯西判别法在这里都失效. 对于前者, 只要取 $n=m^2-1$, 即有 $a_{n+1}=\frac{1}{m^2}$, $a_n=\frac{1}{(m^2-1)^2}$, 因此可见

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

又可以看出有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, 因此柯西判别法也失效.

习题 2585 (c) 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$ 的收敛性.

提示 这是同号级数, 各项符号与 x 相同. $x=0$ 时显然收敛. 只需讨论 $x>0$. 记通项为 a_n, 则有

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n=\frac{nx}{(1+x^2)^n}.$$

以下讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的敛散性已不难. □

习题 2589(d) 研究下列级数的收敛性:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots.$$

解 1 观察通项 $a_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}\ (n=1,2,\cdots)$, 发现它与 §1.2.4 的习题 81 (或 §1.5.7 之 5 的习题 637.1) 的通项 $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}\ (n=1,2,\cdots)$ 之间有密切关系 $a_n = \sqrt{2-x_{n-1}}$, $(n=2,3,\cdots)$. 另一方面, $\{x_n\}$ 有与上式类似的递推式 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$. 这样就有 $(n>1)$

$$a_nx_n=\sqrt{4-x_{n-1}^2}=\sqrt{4-(2+x_{n-2})}=\sqrt{2-x_{n-2}}=a_{n-1}.$$

于是就可以用达朗贝尔比值判别法, 同时利用习题 81 的结论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2},$$

可知级数收敛. □

解 2 (概要) 《习题集》对本题有提示: $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}$. 实际上这相当于习题 81 的解 4 中的方法. 这时有

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),$$

于是就得到本题的级数通项为

$$a_n=\sqrt{2-x_{n-1}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\ \ (n=2,3,\cdots),$$

然后可用达朗贝尔比值判别法或柯西根值判别法, 从略. □

习题 2590 证明: 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ \ (a_n>0),$$

则 $a_n=o(q_1^n)$, 其中 $q_1>q$.

解 定义数列 $b_n=\dfrac{a_n}{q_1^n}\ (n=1,2,\cdots)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{q_1^{n+1}}\cdot\frac{q_1^n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{q_1}=\frac{q}{q_1}<1,$$

所以根据达朗贝尔判别法知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 因此其通项趋于 0, 即有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{q_1^n}=0,$$

这就是 $a_n=o(q_1^n)\ (n\to\infty)$. □

习题 2592 (广义达朗贝尔比值判别法) 证明: 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \ (a_n > 0)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

逆命题不成立, 研究例子 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots$.

注 本题是达朗贝尔比值判别法的一种推广, 证明可参考教科书中该判别法的证明方法. 逆命题不成立的例子也已见于习题 2585(b).

注意这只是达朗贝尔比值判别法在导出收敛结论时的推广. 对于发散情况, 则其推广形式为: 当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

习题 2593 证明: 若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (A), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ (B) 也存在.

逆命题不成立: 若极限 (B) 存在, 则极限 (A) 可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

注 如本小节开始所说, 本题的前半题已经包含在 §1.2.7 的习题 141 中.

习题 2594 (广义柯西根值判别法) 证明: 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \ (a_n \geqslant 0)$, 则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (b) 当 $q > 1$ 时该级数发散.

注 证法与原来类似. 由于上极限总是存在的, 因此只要 $q \neq 1$, 问题就解决了. □

习题 2597(b) 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ 的收敛性.

解 本题要直接用达朗贝尔比值判别法或者柯西根值判别法都有困难, 因为其中的极限是否存在都很不清楚. 然而用习题 2594 提供的广义柯西根值判别法则相当方便, 因为上极限总是存在的, 何况只要给出它的估计就可以了.

由于 $\cos n \in (-1,1)$, 利用函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$ 在 $(-1,1)$ 上严格单调递增 (从 $f'(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$ 可知), 因此就有

$$0 < \frac{1+\cos n}{2+\cos n} < \frac{2}{3}.$$

又利用 $2 - \dfrac{\ln n}{n} > 1$, 就有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} < \frac{1+\cos n}{2+\cos n} < \frac{2}{3},$$

可见 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$, 因此级数收敛. □

5.1.4 拉比判别法和高斯判别法 (习题 2598–2606)

这两个判别法是达朗贝尔比值判别法的发展. 实际上在高斯判别法中 (见本节开始的列表), 如果 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 且有以下分解式:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \boldsymbol{\lambda} + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \ \ (\text{其中 } |\theta_n| < C,\ \varepsilon > 0),$$

则当 $\boldsymbol{\lambda} > 1$ 或 $\boldsymbol{\lambda} < 1$ 时就是达朗贝尔判别法, 而当 $\boldsymbol{\lambda} = 1$ 时, 在 $\mu > 1$ 时或 $\mu < 1$ 时就是拉比判别法. 高斯判别法所额外提供的是在 $\boldsymbol{\lambda} = \mu = 1$ 时, 级数发散①. 前提是能够作出满足以上条件的分解, 即使得 $\varepsilon > 0$, 且 θ_n 有界,

这里可以补充一点, 即除了在不少情况可以利用沃利斯公式或斯特林公式之外, 下一个命题所提供的结论在许多问题中也是很有用的.

命题 5.3 设 $p \neq 0$ 不是负整数, 则成立

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} = O^*\Big(\frac{1}{n^{1-p}}\Big) \ \ (n \to \infty). \tag{5.4}$$

证 若 $p = 1$, 则左边是 1, 已成立. 对其他情况, 可分析如下:
取正整数 m, 使得当 $k \geqslant m$ 时有 $\left|\dfrac{1-p}{k}\right| < 1$, 则当 $n > m$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} &= \frac{[1-(1-p)]\cdot[2-(1-p)]\cdot\cdots\cdot[n-(1-p)]}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\\ &= \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1-p}{k}\Big) = C_1\prod_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1-p}{k}\Big)\\ &= C_1\exp\Big[\sum_{k=m}^{n}\ln\Big(1-\frac{1-p}{k}\Big)\Big]\\ &= C_1\exp\Big[-(1-p)\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=m}^{n}O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big],\end{aligned}$$

其中当 $m = 1$ 时取 $C_1 = 1$, 否则取 $C_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\Big(1-\frac{1-p}{k}\Big)$, 它是与 n 无关的常数.

利用 $\ln(1-t) + t \sim -\dfrac{t^2}{2}\ (t \to 0)$, 可见指数中的第二个和式中的 $O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$ 与 $1/k^2$ 之比是与 k 无关的有界量. 由于级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛, 又利用 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 与 $\ln n$ 之差为有界量 (见 §1.2.3 的关于欧拉常数的习题 146), 这样就可从上式得到:

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} &= C_1\exp[-(1-p)\ln n + C_2 + o(1)] \ \ (\text{其中 } C_2 \text{ 为常数})\\ &\sim \frac{C}{n^{1-p}} \ \ (\text{其中 } C \text{ 为非零常数}). \quad \square\end{aligned}$$

注 命题 5.3 的公式 (5.4) 是个很有用的结果, 由此即可得到二项式系数 C_m^n (其中 m 不是 0 和正整数) 的相应公式:

---

① 高斯判别法的这一部分的证明见 §5.9.3 的习题 3102.

$$\mathrm{C}_m^n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(-m)(-m+1)\cdots(-m+n-1)}{n!}$$
$$= O^*\Big(\frac{1}{n^{m+1}}\Big)\ (n\to\infty).$$

公式 (5.4) 的证明方法很多, 上述证明取自 [34] 的例题 13.3.2. 在该书的例题 13.4.1 和 13.4.4 还给出了两个证明, 其中的工具即本书 §5.9 的无穷乘积和伽马函数的无穷乘积定义 (见后面的 §5.9.3 的习题 3105 及其注 2).

习题 2598 研究级数 $\Big(\frac{1}{2}\Big)^p + \Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\Big)^p + \Big(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\Big)^p + \cdots$ 的收敛性.

解 1　由通项 $a_n = \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p\ (n=1,2,\cdots)$, 可对比值 a_n/a_{n+1} 分析如下:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \Big(\frac{2n+2}{2n+1}\Big)^p = \Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^p$$
$$= 1 + \frac{p}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ (n\to\infty),$$

由高斯判别法可见, 当 $p>2$ 时级数收敛, 而当 $p\leqslant 2$ 时级数发散. □

解 2　利用沃利斯公式 (5.2) 就有

$$a_n = \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p \sim \Big(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Big)^p = O^*\Big(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\Big)\ (n\to\infty),$$

即可得到与解 1 相同的答案. □

习题 2599 研究级数 $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots$ 的收敛性, 其中 a,b,d 均大于 0.

解 1　由通项 $a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\cdots(b+(n-1)d)}$, 可对比值 a_n/a_{n+1} 分析如下:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd} = 1 + \frac{b-a}{a+nd} = 1 + \frac{(b-a)}{d}\cdot\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ (n\to\infty),$$

由高斯判别法可见, 当 $(b-a)/d>1$ 时级数收敛, 而当 $(b-a)/d\leqslant 1$ 时级数发散. □

解 2　利用命题 5.3 的公式 (5.4), 存在非零常数 C_1 和 C_2, 使得成立

$$a_n = \frac{\frac{a}{d}\cdot\Big(\frac{a}{d}+1\Big)\cdots\Big(\frac{a}{d}+n-1\Big)}{\frac{b}{d}\cdot\Big(\frac{b}{d}+1\Big)\cdots\Big(\frac{b}{d}+n-1\Big)} \sim \frac{\dfrac{C_1 n!}{n^{1-\frac{a}{d}}}}{\dfrac{C_2 n!}{n^{1-\frac{b}{d}}}} = O^*\Big(\frac{1}{n^{\frac{b-a}{d}}}\Big)\ (n\to\infty),$$

即可得到与解 1 相同的答案. □

习题 2600 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ 的收敛性.

解 1　对比值 a_n/a_{n+1} 可分析如下:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} = \exp\left[(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right]$$
$$= \exp\left[(n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\right]$$
$$= \exp\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 + \left(p-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ (n \to \infty),$$

由高斯判别法可见, 当 $p > \frac{3}{2}$ 时级数收敛, 而当 $p \leqslant \frac{3}{2}$ 时级数发散. □

解 2 用命题 5.2 的斯特林公式 (5.3) 就有

$$a_n \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{n^p} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} \ (n \to \infty),$$

即可得到与解 1 相同的答案. □

习题 2606 证明: 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, 若在 $n \to \infty$ 时成立条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty),$$

则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right) \ (n \to \infty),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意小量; 并且若 $p > 0$, 则当 $n \to \infty$ 时 $a_n \downarrow 0$, 即从 $n \geqslant n_0$ 开始, a_n 单调递减, 且在 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$.

解 只要证明 $a_n n^{p-\varepsilon} \to 0 \ (n \to \infty)$. 采用命题 5.3 的证法, 有

$$a_n n^{p-\varepsilon} = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left[\frac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p-\varepsilon}\right] = a_1 \mathrm{e}^{b_n},$$

其中

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(p-\varepsilon)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[(p-\varepsilon)\left(\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \left(\frac{p}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right]$$
$$= -\varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

由 $\varepsilon > 0$ 和正项级数的等价量判别法可见有 $b_n \to -\infty \ (n \to \infty)$, 即 $\mathrm{e}^{b_n} \to 0 \ (n \to \infty)$, 因此得到所要证明的 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^{p-\varepsilon} = 0$.

当 $p > 0$ 时, 从关于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的条件可知当 n 充分大时有 $a_n > a_{n+1}$, 即单调递减. 又由于 $\varepsilon > 0$ 可取任意小, 只要取 $\varepsilon < p$ 即可见 $a_n \to 0$. □

注 对本题的 $\varepsilon > 0$ 为任意小量作一些解释. 这与 §1.6 的习题 651(e) 的

$$\ln n = o(n^{\varepsilon}) \ (n \to \infty)$$

相同, 即其中 $\varepsilon > 0$ 无论取什么正数总是成立的, 但若对 $\varepsilon_0 > 0$ 成立, 即可推出对 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 也成立, 因此要强调的是 ε 可为任意小量, 但不为 0.

5.1.5 正项级数敛散性的其他判别法 (习题 2614–2615, 2622, 2624–2625)

为方便起见, 将《习题集》中以习题的形式提供的其他判别法集中在这个小节内. 又为了解释这些判别法如何使用, 在每一个判别法后举一个例题, 其中只用两个简单的级数: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 注意: 对于它们来说, 达朗贝尔比值判别法和柯西根值判别法都失效.

下面的判别法可以看成是柯西根值判别法的进一步发展.

习题 2614 (热梅判别法) 证明: 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, 若当 $n > n_0$ 时

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1,$$

则此级数收敛; 若当 $n > n_0$ 时

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} \leqslant 1,$$

则此级数发散.

解 对前半题, 可以直接估计通项如下:

$$a_n \leqslant \left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)\right]$$
$$= \exp\left[n\left(-\frac{p\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right)\right] = \exp[-p\ln n + o(1)] \sim \frac{1}{n^p}\ \ (n\to\infty),$$

可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

对后半题, 用相同方法得到

$$a_n \geqslant \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)\right]$$
$$= \exp\left[n\left(-\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right)\right] = \exp[-\ln n + o(1)] \sim \frac{1}{n}\ \ (n\to\infty),$$

可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

例题 1 用热梅判别法讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 对通项 $a_n = 1/n^2$, 将离散变量 n 改为连续变量 x, 可计算如下:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[x]{x^2}}\right)\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-x^{-\frac{2}{x}}\right)\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2\ln x}{x}}\right)\frac{x}{\ln x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[1-\left(1-\frac{2\ln x}{x}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right)\right)\right]\frac{x}{\ln x} = 2,$$

可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

对于通项 $a_n = \dfrac{1}{n}$, 利用不等式 $1 - \mathrm{e}^{-x} < x$ 于 $x > 0$ 时成立, 即有

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)\frac{n}{\ln n} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}}\right)\frac{n}{\ln n} < 1,$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散. □

习题 2615 (对数判别法) 证明: 若存在 $\alpha > 0$, 使当 $n \geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha\ (a_n > 0)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $n \geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$, 则此级数发散.

解 利用对数函数的单调性, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 对前半题即有 $a_n \leqslant \dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$, 因此级数收敛; 对后半题则有 $a_n \geqslant \dfrac{1}{n}$, 因此级数发散. □

注 对数判别法不要求级数通项单调, 这与柯西根值判别法相同. 此外, 对数判别法与拉比判别法的关系恰如柯西根值判别法与达朗贝尔比值判别法的关系 (见 [34] §13.2 的练习题 12).

例题 2 用对数判别法讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解 对通项 $a_n = 1/n^2$, 有 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \dfrac{\ln n^2}{\ln n} = 2$, 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

对通项 $a_n = 1/n$, 有 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \dfrac{\ln n}{\ln n} = 1$, 可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散. □

习题 2622 (柯西凝聚判别法) 证明: 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调递减, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

解 利用通项 a_n 单调递减, 对于 $k \geqslant 1$ 有不等式

$$2^{k-1} a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k} \leqslant 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

(例如, 对于 $k = 1, 2, 3$ 即是 $a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1,\quad 2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2,\quad 4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4$.)

取 k 从 1 到 n, 将所得的不等式相加, 就得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}.$$

可见题中的两个正项级数的部分和同时有界或者同时无界, 因此结论为真. □

注 这个判别法的一个特点是不需要用比较级数. 在 [29] 中就是以这个判别法为基础来导出许多基本结论.

例题 3 用柯西凝聚判别法讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 对通项 $a_n = 1/n^2$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

它是收敛的几何级数, 因此推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

对通项 $a_n = 1/n$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. □

习题 2624 (叶尔马科夫判别法) 证明: 若 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\lambda < 1$ 时收敛, 在 $\lambda > 1$ 时发散.

解 不妨设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上满足题设的条件. 于是从柯西积分判别法知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

取 $x_1 = 1$, $x_2 = e$, $\cdots$, $x_n = e^{x_{n-1}}$, $\cdots$, 则数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增趋于正无穷大. 利用积分的变量代换, 就有

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx &= \int_{e^{x_{n-1}}}^{e^{x_n}} f(x)\,dx \ (\text{作代换 } x = e^t) \\ &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(e^t)\,e^t\,dt.\end{aligned}$$

若 $\lambda < 1$, 则有 $\lambda < \frac{1+\lambda}{2} < 1$. 根据题设条件, 存在 $M > 1$, 当 $t > M$ 时, 成立

$$e^t f(e^t) < \frac{1+\lambda}{2} f(t),$$

因此当 n 充分大时就有

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx < \frac{1+\lambda}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,$$

这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$ 收敛 (根据达朗贝尔判别法). 由于 f 为正值函数, 因此上述级数收敛已经保证了广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

若 $\lambda > 1$, 则从题设条件知道存在 M_1, 当 $x > M_1$ 时, 成立 $\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x) > f(x)$. 因此从前面的积分代换所得的等式可推出当 n 充分大时有

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的通项当 n 充分大时为单调递增, 当然发散. □

例题 4 用叶尔马科夫判别法讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解 对通项 $a_n = 1/n^2$, 取 $f(x) = 1/x^2$, 于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

对通项 $a_n = 1/n$, 取 $f(x) = 1/x$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散. □

习题 2625 (罗巴切夫斯基判别法) 证明: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项单调趋于 0, 则此级数与级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m\cdot 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geqslant 2^{-m}\ \ (n = 1, 2, \cdots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的序号.

解 首先要考虑数列 $p_m\ (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 的定义是否合理. 从题设条件可见, 如果 $a_1 \geqslant 1$, 则 p_m 从 $m = 0$ 起就有定义. 但无论如何至少从某个非负整数 m_0 开始, p_m 有定义. 若 $m_0 > 0$, 则级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m\cdot 2^{-m}$ 在 $m < m_0$ 时的项可以认为都是 0. 为简单起见, 以下设 p_m 从 $m = 0$ 起就有定义. 此外, 可看出 p_m 单调递增, 但未必是严格单调的.

从定义可以看出, 当 $n \leqslant p_m$ 时, $a_n \geqslant 2^{-m}$; 而当 $n > p_m$ 时, 有 $a_n < 2^{-m}$. 于是对于 $p_m < p_{m+1}$ 的情况, 在两个级数之间存在下列不等式

$$\frac{p_{m+1} - p_m}{2^{m+1}} \leqslant a_{p_m+1} + a_{p_m+2} + \cdots + a_{p_{m+1}} < \frac{p_{m+1} - p_m}{2^m}.$$

为了利用上述不等式, 对于级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m\cdot 2^{-m}$ 的部分和作如下变换:

$$\sum_{m=0}^{M} p_m \cdot 2^{-m} = p_0 + \frac{p_1}{2} + \cdots + \frac{p_M}{2^M}$$

$$= 2p_0 + (p_1 - p_0) + \frac{p_2 - p_1}{2} + \frac{p_3 - p_2}{4} + \cdots + \frac{p_M - p_{M-1}}{2^{M-1}} - \frac{p_M}{2^M},$$

然后就可以得到在两个级数的部分和之间的不等式关系. 一方面有:

$$\sum_{n=0}^{p_M} a_n = \sum_{n=0}^{p_0} a_n + (a_{p_0+1} + \cdots + a_{p_1}) + \cdots + (a_{p_{M-1}+1} + \cdots + a_{p_M})$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{p_0} a_n + (p_1 - p_0) + \frac{p_2 - p_1}{2} + \cdots + \frac{p_M - p_{M-1}}{2^{M-1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{p_0} a_n - 2p_0 + \frac{p_M}{2^M} + \sum_{m=0}^{M} p_m \cdot 2^{-m},$$

另一方面有:

$$\sum_{m=0}^{M} p_m \cdot 2^{-m} \leqslant 2(a_1 + \cdots + a_{p_0}) + 2(a_{p_0+1} + \cdots + a_{p_1}) + \cdots$$

$$+ 2(a_{p_{M-1}+1} + \cdots + a_{p_M}) = 2\sum_{n=1}^{p_M} a_n,$$

可见两个级数的敛散性是等价的. □

例题 5 用罗巴切夫斯基判别法讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 对通项 $a_n = 1/n^2$, 要使得

$$a_n = \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{2^m},$$

则 n 的最大值可从 $n^2 \leqslant 2^m$ 解出, 即得到 $p_m = [2^{\frac{m}{2}}]$. 于是可见有

$$p_m \cdot 2^{-m} \leqslant \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2^m} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m,$$

因此 $\sum_{m=0}^{\infty} p_m \cdot 2^{-m}$ 收敛, 从而推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

对通项 $a_n = 1/n$, 要使得

$$a_n = \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2^m},$$

则 n 的最大值可从 $n \leqslant 2^m$ 解出, 即是 $p_m = 2^m$. 于是可见级数 $\sum_{m=0}^{\infty} p_m \cdot 2^{-m}$ 是每一项等于 1 的级数, 从而推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. □

5.1.6 杂题 (习题 2607–2613, 2616–2621, 2626–2654)

这些习题主要是级数敛散性的判定, 其中所用的方法除了达朗贝尔比值判别法和

柯西根值判别法之外, 更多的是使用本节开始的判别法列表中的比较判别法 II, 即用 (俗称为 p 级数的) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 为比较级数. 这就是以 $n\to\infty$ 时的 $\dfrac{1}{n}$ 为一阶无穷小量, 然后求出级数通项的无穷小量的阶数. 此外, 还有不少使用柯西积分判别法的例子.

下面举一些例子, 有的只给出提示.

习题 2612 研究通项为 $a_n=\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$ 的级数的收敛性.

提示　利用 §2.9.1 末的习题 1359, 令其中的 $x=1/n$, 即可确定本题的方括号内的表达式当 $n\to\infty$ 时为一阶无穷小量, 于是 a_n 就是 p 阶无穷小量, 从而当 $p>1$ 时级数收敛, 而当 $p\leqslant 1$ 时级数发散. □

习题 2617 研究通项为 $a_n=\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ $(n>1)$ 的级数的收敛性.

解　若将通项的分母写为 $n^{x(n)}$, 于等式 $n^x=(\ln\ln n)^{\ln n}$ 两边取对数即有 $x\ln n=\ln n\cdot\ln\ln\ln n$, 于是得到 $x(n)=\ln\ln\ln n$. 这样就将通项改写为

$$a_n=\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}.$$

虽然这个指数 $x=x(n)$ 与 n 有关, 但可以利用当 $n\to\infty$ 时 $x(n)$ 趋于正无穷大, 可见存在 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $x(n)>2$, 从而使得 $a_n<\dfrac{1}{n^2}$, 因此级数收敛. □

习题 2619 (a) 利用柯西积分判别法, 研究通项为 $a_n=\dfrac{1}{n\ln^p n}$ $(n>1)$ 的级数的收敛性.

解 1　当 $n\to\infty$ 时已知对任何 $\varepsilon>0$ 都有 $\ln n=o(n^{\varepsilon})$, 因此这里不能确定通项 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 趋于 0 的确切阶数, 然而用柯西积分判别法却可以将本题的级数的敛散性等价地转换为广义积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 的敛散性.

当 $p=1$ 时, 有

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^b=+\infty,$$

可见积分发散, 从而级数于 $p=1$ 时也发散.

当 $p\neq 1$ 时, 有

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\ln^{1-p}x\Big|_2^b,$$

即可知道当 $p>1$ 时积分收敛, 而当 $p<1$ 时积分发散, 从而级数也是如此. □

解 2　用 §5.1.5 的习题 2624 的叶尔马科夫判别法. 这时 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^p x}$, 因此有

$$\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\frac{\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^x[\ln(\mathrm{e}^x)]^p}}{\dfrac{1}{x\ln^p x}}=\frac{\ln^p x}{x^{p-1}},$$

于是就知道当 $p>1$ 时级数收敛, 而当 $p\leqslant 1$ 时级数发散. □

习题 2620(b) 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^2}$ 的收敛性, 其中 $\nu(n)$ 为数 n 的位数.

提示 主要是如何表达 $\nu(n)$. 对于 n 的十进位制表示 (取其他进位制也一样), 有

$$10^{\nu(n)-1}\leqslant n<10^{\nu(n)},$$

于是即可得到 $\nu(n)=[\lg n+1]$. 以下从略. □

习题 2621 设 $\lambda_n\ (n=1,2,\cdots)$ 依次是方程 $\tan x=x$ 的各个正根, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ 的收敛性.

提示 观察正切函数 $y=\tan x$ 的图像 (见第一册附录一的习题 289 和 378) 与直线 $y=x$ 的交点, 可见方程 $\tan x=x$ 的从小到大的第 n 个正根 λ_n 在区间 $\left[(n-1)\pi,\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ 内, 这样就可以得到估计 $\lambda_n^{-2}<\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}\ (n=2,3,\cdots)$. □

习题 2630 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ 的收敛性.

解 1 [6] 在 $k\geqslant 3$ 时有 $\ln k>1$, 因此有不等式

$$n-1\leqslant \ln n!=\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n\leqslant (n-1)\ln n.$$

若 $\alpha\leqslant 2$, 则用左边的不等式就有 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}\geqslant\frac{n-2}{n^\alpha}$, 可知原级数发散.

若 $\alpha>2$, 则用右边的不等式就有 $\frac{\ln n!}{n^\alpha}\leqslant\frac{(n-1)\ln n}{n^\alpha}$, 可知原级数收敛. □

解 2 (概要) 因通项的分子可写为 $\ln 2+\cdots+\ln n$, 可以用施托尔茨定理 (见 §1.2.7 之习题 143) 分析极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha-p}},$$

可证明当 $\alpha-p\leqslant 1$ 时为非正常极限 $+\infty$, 而当 $\alpha-p>1$ 时极限为 0. 然后用比较判别法 II 推出当 $\alpha\leqslant 2$ 时级数发散, 而当 $\alpha>2$ 时级数收敛. □

习题 2633 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 的收敛性.

提示 将通项写成为 $\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1$, 然后用 $\mathrm{e}^x-1\sim x\ (x\to 0)$. □

习题 2636 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$ 的收敛性.

提示 若 $a=0$ 则通项等于 1. 对于 $a\neq 0$, 可将 $\sqrt[n]{a_n}$ 写成为 $\mathrm{e}^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}$, 然后计算它在 $n\to\infty$ 时的极限. □

习题 2638 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ 的收敛性.

提示 对通项的分子, 利用 $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{\mathrm{e}}$ (见 §1.2.7 之习题 142 或用 §5.1.3 的命题 5.2 之斯特林公式), 又对通项的分母有 $(n^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \to 1\ (n \to \infty)$. □

习题 2639 研究级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的收敛性.

提示 用柯西根值判别法, 对分子有 $n^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln^2 n}{n}} \to 1\ (n \to \infty)$. □

习题 2640 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \dfrac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ 的收敛性.

提示 对于 $a^{\frac{1}{n}}, b^{\frac{1}{n}}$ 和 $c^{\frac{1}{n}}$ 利用 $a^x = 1 + x\ln a + \dfrac{x^2}{2}\ln^2 a + O(x^3)$ $(x \to 0)$ 等泰勒公式. □

习题 2641 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}} - 1)$ 的收敛性.

提示 只有当 $\alpha < 0$ 时通项趋于 0. 将通项写成为 $\mathrm{e}^{n^{\alpha}\ln n} - 1$, 然后用 $\mathrm{e}^x - 1 \sim x\ (x \to 0)$. □

习题 2643 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n + c\ln^2 n)}$ $(a > 0)$ 的收敛性.

解 (概要) 在 $a \neq 1$ 时, 将 a 写为 $\mathrm{e}^{\ln a}$, 就可以将通项改写为

$$a_n = \mathrm{e}^{\ln n(-b\ln a - c\ln a\ln n)} = \frac{1}{n^{b\ln a + c\ln a\ln n}},$$

然后分 $c = 0$ 和 $c \neq 0$ 讨论即可. 也可用 §5.1.5 的习题 2615 的对数判别法等解决. □

习题 2652 研究通项为 $u_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$ 的级数的收敛性.

提示 由通项分子的表达式可考虑用施托尔茨定理研究其阶. □

5.1.7 级数的余项估计 (习题 2623, 2655)

对于收敛级数来说, 理论上总可以用其部分和来近似级数的和. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 取其前 n 项相加得到部分和 S_n, 它与级数和的差就是余项

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n.$$

从定义可见, 余项 R_n 只对收敛级数才有意义, 而且必定有 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

问题是在给定精度要求时需要计算多少项数. 为此要对余项作尽可能确切的估计.

习题 2655 (a) 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}?

解 1 本题的余项可估计如下:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{N\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{n},$$

于是为了 $R_n < 10^{-5}$, 需要取 $n > 10^5$.

用 Mathematica 可计算出本题的级数和的前 7 位精确数字为 1.644 934, 而取级数的前 10^5 项得到的部分和为 1.644 924, 可见上述余项估计是比较准确的. □

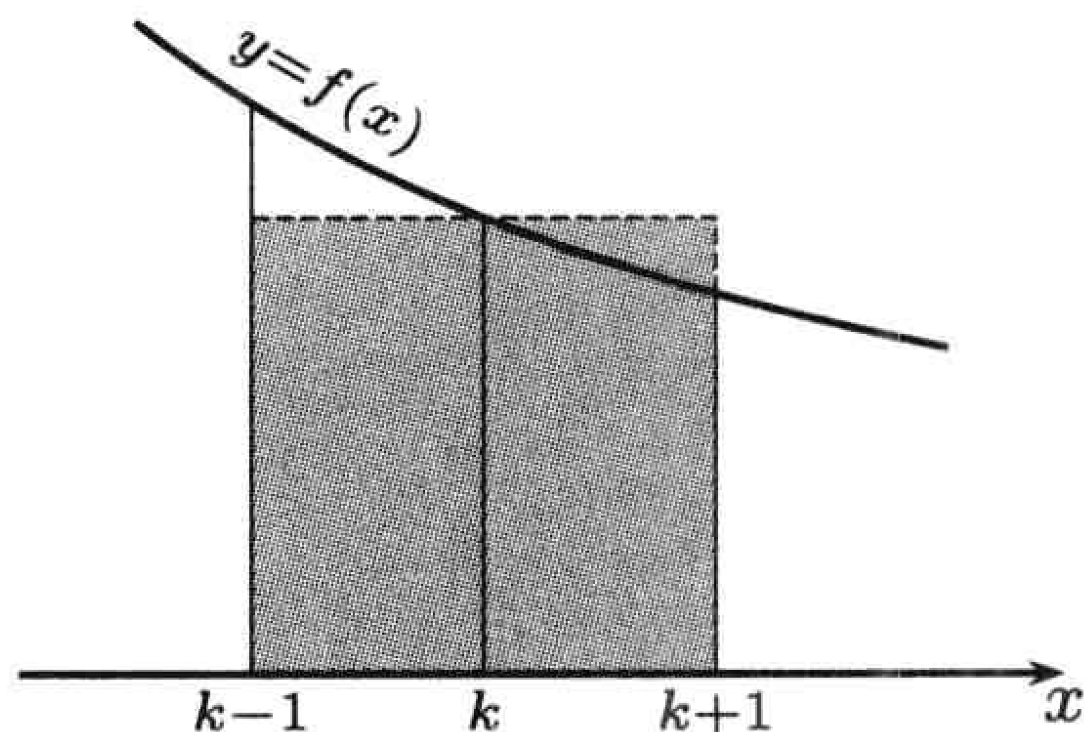
解 2 利用 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 严格单调递减 (参见示意图), 对于 $k > 1$ 有

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{k^2} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2},$$

取 k 从 $n+1$ 到无穷大, 并将这些积分相加, 就得到余项 R_n 的积分估计:

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2},$$

也就是有 $\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$. 以下从略. □



习题 2655(a) 解 2 的示意图

注 本题的级数求和在数学史上以巴塞尔问题著称. 当时的许多著名数学家, 其中包括莱布尼茨和雅各布 · 伯努利等, 都尝试过求其和. 巴塞尔问题最后为欧拉解决.

下面按照 [10] 简要地介绍与此题有关的历史. 如前所述, 级数的部分和当 n 增加时收敛的速度非常慢. 可以计算出 $S_{10} \approx 1.549\,77$, $S_{100} \approx 1.634\,98$, $S_{1000} \approx 1.643\,93$, 其中最后一个也只有准确到小数点后的两位. 由此可见, 要从这样的数值计算来猜测级数和究竟等于什么是太困难了.

欧拉也从数值实验开始. 他利用了函数项级数逐项积分的方法求出了上述级数和的另一个无穷级数表达式, 只需计算其 14 项就得到 $S \approx 1.644\,934$. 然后欧拉又利用类比法求出了级数的准确和为 $S = \frac{\pi^2}{6}$. 这样一个看似平凡的级数的和居然会

与圆周率有关, 实在是谁也没有想到的. 虽然欧拉当时所用的方法还不严格, 但由于 $\pi^2/6 \approx 1.644\,934\,067$, 前 7 位与欧拉的数值实验完全相同, 因此其正确性是无人怀疑的. 还值得提到的是, 欧拉本人在当时还不能将他的方法完全严格化, 于是他在后来又想出计算该级数和的其他较为严格的方法, 得到相同的结果①.

从欧拉的上述工作可以联系到欧拉的下列名言:

"数学这门科学, 需要观察, 还需要实验",

它应当是我们学习数学的座右铭.

习题 2655(b) 对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$, 大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}?

解 利用 §1.2.3 的习题 72 中的余项估计方法, 就有

$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1+\frac{2}{n+3}+\frac{2^2}{(n+3)(n+4)}+\cdots\right)\\ &< \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1+\frac{2}{n+3}+\frac{2^2}{(n+3)^2}+\cdots\right)\\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{n+3}} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{n+3}{n+1}.\end{aligned}$$

由此即可计算出当 $n=10$ 时有 $R_n < 5\times 10^{-6} < 10^{-5}$. 因此取级数的前 10 项即可满足要求.

学过泰勒级数的读者不难看出本题的级数和为 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-3)$, 其 7 位精确数字的近似值为 2.194 528, 而取级数前 10 位计算得到的近似值是 2.194 523, 因此上述误差估计是比较准确的. □

注 对比以上两个题, 可以看到在部分和数列收敛速度很快的情况下, 只需要计算级数中不多的前几项相加就可能对于所要求的级数和得到相当精确的近似值. 对于习题 2655(c) (即关于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$ 的和的近似计算) 用同样的方法可以知道, 只需要取级数中的前 4 项就可以得到误差小于 10^{-5} 的好结果.

这里顺便可以提到, 在写给中学生的科普读物 [19] 中介绍了不少无穷级数求和的知识, 其中的最后一节"级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的渐近值"所讨论的问题就是前面的习题 2655(a) 中的近似计算.

---

① 关于欧拉所用的类比法可以参看 [34] 的例题 13.4.3, 在其注 3 中介绍了欧拉当时的思路. 在本书的 §5.4.5 的例题 2 中给出了巴塞尔问题的一种解法. 此外, 还可以利用傅里叶级数展开式求得巴塞尔问题的解, 见 §5.6.1 的习题 2942, 2961(a) 等.

§5.2 变号级数收敛性的判别法 (习题 2656–2705)

内容简介 本节的习题分为两个小节. 第一小节是对于变号级数的敛散性判定, 第二小节则是与条件收敛级数所具有的特性有关的习题, 其中包括证明题和近似计算的习题, 有的题对于第一小节的敛散性判定有指导性意义, 还有一些题有相当的难度.

5.2.1 变号级数的敛散性判定 (习题 2659–2661, 2664–2689, 2691–2700)

如果在一般项级数中只有有限个正项, 其余均为非正项, 或者相反, 则在敛散性判别问题上与同号级数无差别. 因此本节所关心的变号级数主要是指既有无限多个正项又有无限多个负项的级数. 又将相邻项为一正一负的变号级数称为交错级数.

如教科书所说, 这里需要考虑将级数的每一项取绝对值后得到的新级数. 为方便起见, 将这个级数称为原级数的绝对值级数. 如果它收敛, 就称原级数为绝对收敛.

绝对收敛的级数必定收敛, 这是一个基本定理 (希望初学者能够写出其证明).

在判定一般项级数是否绝对收敛时, 考虑的是绝对值级数, 因此可以对它应用 §5.1 中的所有判别法.

如果绝对值级数的通项不趋于 0, 或者用达朗贝尔比值判别法和柯西根值判别法判定绝对值级数发散, 则同时就知道该级数的通项不趋于 0, 因此原来的级数必定发散. 然而除此之外, 若用 §5.1 中的某个方法判定绝对值级数发散时, 并不能推出原级数是发散还是收敛 (这时若收敛就是条件收敛).

判定一般项级数收敛的方法, 在多数教科书上, 除了柯西准则之外, 主要是莱布尼茨判别法①、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

在判定一般项级数敛散性时, 要注意两点: (1) 不能随便使用同号级数的等价量判别法 (参见 §5.2.1 的习题 2670, §5.2.2 的习题 2701 等); (2) 在判定某级数为收敛后, 不能贸然断定它为条件收敛.

应当注意, 在一般项级数中, 绝对收敛的级数和条件收敛的级数有许多根本性的差异, 见 §5.2.2 的习题 2702.1. 又可以对比 §5.1.7 的习题和 §5.2.2 的习题 2703, 这表明在近似计算的余项估计方面, 绝对收敛级数和条件收敛级数是完全不同的. 因此对于收敛的一般项级数来说, 判定它究竟是绝对收敛还是条件收敛是个重要的问题.

除了上述几个判别法之外, 在一般项级数的收敛性判定中往往还需要其他的方法和技巧, 例如加法结合律的使用等.

回顾 §5.1.1 中的习题 2554–2556, 可见对于收敛级数的加法结合律成立. 反之, 在加括号后的级数收敛时, 对于同号级数来说, 原来的级数也一定收敛. 然而, 对于一般项级数, 则原级数未必收敛. 这时下列命题 (以及习题 2657) 往往有用.

① 又常称满足莱布尼茨判别法条件的级数为莱布尼茨型级数, 这也就是通项绝对值单调递减趋于 0 的交错级数.

命题 5.4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项重新组合后得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 且每一个 A_n 所包含的原级数的各项同号, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 记原级数的部分和数列为 $\{S_n\}$, 又设 $p_0 = 0$, 记

$$A_k = a_{p_{k-1}+1} + \cdots + a_{p_k} \ \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则组合后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和就是原部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{p_n}\}_{n\geqslant 1}$.

于是从组合后的级数收敛可知数列 $\{S_n\}$ 有一个子列收敛. 又由于每一个 A_n 中所包含的原级数的项同号, 因此当 $n = 1, 2, \cdots, p_1$ 时, 部分和 S_n 处于 0 与 S_{p_1} 之间, 而当 $n > p_1$ 时, 则 S_n 处于子列的相继两项之间. 由此可见数列 $\{S_n\}$ 收敛. □

习题 2659 证明级数 $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots$ 收敛并求其和.

提示 从通项 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{n-1}}$ 可证明它满足莱布尼茨判别法的条件, 因此收敛. 其求和可参考 §5.1.1 的习题 2548 中的方法. □

习题 2661 证明级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ 收敛并求其和.

解 1 用莱布尼茨判别法即知其收敛. 利用与欧拉常数有关的调和级数部分和的公式 (见 §1.2.3 的习题 146):

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + o(1) \ \ (n \to \infty),$$

就有

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \ln(2n) - \ln n + o(1) \to \ln 2 \ \ (n \to \infty). \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 求和的另一个方法是利用卡塔兰恒等式, 即从解 1 的推导中可得到

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},
\end{aligned}$$

这样就将问题归结为 §4.2.2 的习题 2220, 也就是 §1.2.3 的习题 147. □

习题 2665 (b) 研究级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$ 的收敛性.

解 1 将每项取绝对值后的级数发散, 因此本题的级数不可能绝对收敛.

可以将这个级数看成为下列三个莱布尼茨型级数之和:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\cdots,$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\cdots,$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

由于其中每一个级数都收敛, 因此本题的级数收敛, 且为条件收敛. □

解 2 (概要) 本题可从头开始将每三项加括号得到一个新级数, 然后用莱布尼茨判别法推出其收敛. 最后可以用命题 5.4 (或 §5.2.2 的习题 2657) 推出原级数收敛. □

习题 2666 设在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 中 $b_n>0$, 且当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to 0$. 由此是否可知该级数收敛? 考察例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

解 本题的目的是要说明, 在莱布尼茨判别法中, b_n 单调趋于 0 的条件不能减弱为仅仅是 $b_n\to 0\ (n\to\infty)$. 所举的例子很简单, 它是交错级数, 但从其通项的如下分解:

$$(-1)^n\cdot\frac{2+(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^n 2}{n}+\frac{1}{n},$$

就可以从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{n}$ 收敛和调和级数发散推出该级数是发散的. □

习题 2667 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100} n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$ 的收敛性.

解 1 将各项取绝对值, 且只看其中 $n=4k+2$ 的项, 则有

$$\left|\frac{\ln^{100}(4k+2)}{4k+2}\sin\frac{(4k+2)\pi}{4}\right|=\frac{\ln^{100}(4k+2)}{4k+2}\geqslant\frac{1}{4k+2},$$

就可见原来的级数不可能绝对收敛.

由于 n 为 4 的倍数时的级数项为 0, 因此可以将该级数看成为下列三个级数之和:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln^{100}(4k+1)}{4k+1},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln^{100}(4k+2)}{4k+2},$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln^{100}(4k+3)}{4k+3}.$$

然后对 $f(x)=\dfrac{\ln^{100} x}{x}$ 求导得到 $f'(x)=\dfrac{\ln^{99} x}{x^2}(100-\ln x)$, 可见当 n 充分大时上述三个级数都可用莱布尼茨判别法判定为收敛, 从而原来的级数收敛, 且为条件收敛. □

解 2 (概要) 如上利用 $f(x)=\dfrac{\ln^{100} x}{x}$ 证明通项的第一个因子当 n 充分大时单调递减趋于 0, 注意到第二个因子关于 n 为周期 8 的数列, 且在一个周期上的和为 0, 这样就可以用狄利克雷判别法知道级数收敛. 然后利用解 1 的方法或者

$$\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| \geqslant \sin^2\frac{n\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2},$$

就可以证明本题的级数为条件收敛 (参见本小节后面的习题 2696(a)). □

习题 2668 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛性.

解　先利用

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{(-1)^n}{2n}\cos 2n,$$

将原级数分解为条件收敛的级数 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与级数 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ 之和.

对第二个级数, 可以证明 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k$ 关于 n 有界. 为此只要仿照 §2.1.4 中的习题 1024(a) 的方法, 利用 $2\cos 1\cos 2k = \cos(2k+1)+\cos(2k-1)$, 就有

$$\begin{aligned}
&2\cos 1[-\cos 2 + \cos 4 - \cdots + (-1)^n\cos 2n]\\
&= -[\cos 1 + \cos 3] + [\cos 3 + \cos 5] - \cdots + (-1)^n[\cos(2n-1) + \cos(2n+1)]\\
&= (-1)^n\cos(2n+1) - \cos 1,
\end{aligned}$$

可见 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right| \leqslant \frac{1}{\cos 1}$. 于是从狄利克雷判别法知道第二个级数收敛, 从而原级数收敛.

将原级数的各项取绝对值后, 可利用 $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n}(1-\cos 2n)$, 将绝对值级数分解为发散级数 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与另一个级数 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 之和. 然后用类似的方法证明第二个级数收敛, 从而知道原来的级数为条件收敛. □

习题 2670 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的收敛性.

解 1　由于将通项的分母去掉 $(-1)^n$ 后所得的级数收敛, 于是可作分解如下:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}.$$

这时右边第二个级数为同号级数, 且从比较判别法的等价量形式知道它与调和级数一样是发散的, 因此本题的级数发散. □

解 2　从头开始对每两项加括号, 则得到一个新级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2k}+1} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right) + \cdots,$$

其通项为

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2k}+1} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} = \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)} < 0,$$

因此是同号级数. 从

$$A_k \sim \frac{-2+o(1)}{2k} \sim -1/k \ (k \to \infty)$$

可知该级数发散, 从而 (根据 §5.1.1 的习题 2554) 原级数也一定发散. □

解 3 [6] 将通项的分子分母同乘以 $\sqrt{n}-(-1)^n$, 就可将原级数分解如下:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}.$$

由于第二个级数发散, 而又可用莱布尼茨判别法知道第一个级数收敛, 从而知道原级数发散. □

注 本题的级数通项显然等价于 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $(n \to \infty)$, 而 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 却是收敛级数, 可见对于变号级数不能随意使用 §5.1 中的等价量判别法.

习题 2671 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$ 的收敛性.

解 (概要) 利用 $\sin(x-n\pi)=(-1)^n\sin x$, 可对通项作如下分析:

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) &= (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}-n\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right), \end{aligned}$$

然后利用 $\sin x$ 当 $|x|$ 充分小时单调, 可见当 n 充分大时可以用莱布尼茨判别法知道级数收敛. 将通项取绝对值后, 可以从比较判别法的等价量形式知道级数发散. 因此本题的级数为条件收敛. □

习题 2672 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的收敛性.

解 (分析法) 从级数的第一项起, 将相继的同号项组合 (即加括号) 而得到新级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, 其中

$$A_1 = -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ A_2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}, \cdots,$$

$$A_k = (-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right), \cdots.$$

如果能够证明 $|A_k|$ 单调递减趋于 0, 则就可以用莱布尼茨判别法知道新的级数收敛. 然后再用命题 5.4 就推出原级数收敛. 它当然是条件收敛.

利用积分估计 (参见 §5.1.7 的习题 2655(a) 的示意图), 就有

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x} < |A_k| < \int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

因此为了建立 $|A_{k+1}| < |A_k|$, 只要证明

$$(|A_{k+1}|<) \int_{(k+1)^2-1}^{(k+2)^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} < \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x} (< |A_k|).$$

求出中间的两个定积分, 并利用下列等价关系:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{(k+2)^2-1}{(k+1)^2-1}\right) < \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}\right)\\
&\iff k^2[(k+2)^2-1] < (k+1)^2[(k+1)^2-1]\\
&\iff k^4+4k^3+3k^2 < k^4+4k^3+5k^2+2k,
\end{aligned}$$

可见关于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为莱布尼茨型级数的猜测成立, 因此本题的级数收敛. □

习题 2675 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 (概要) 这是一个基本题. 容易看出, 当 $p>1$ 时级数绝对收敛, 而当 $p\leqslant 0$ 时级数通项不是无穷小量, 因此发散.

对于余下的情况, 即 $0<p\leqslant 1$, 从莱布尼茨判别法知道级数收敛, 而取通项的绝对值后, 可知道级数发散, 因此原级数为条件收敛. □

习题 2677 研究级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 只有当 $p>0$ 时级数的每一项才有意义, 因此不需要讨论 $p\leqslant 0$.

从 $|\ln(1+x)|\sim|x|\ (x\to 0)$ 可知 $p>1$ 是级数绝对收敛的充要条件.

对于 $0<p\leqslant 1$ 可以采用组合方法. 记级数通项为 a_n, 从 $n=2$ 起将每两项加括号, 则对于 $n=2k$ 有

$$\begin{aligned}
a_{2k}+a_{2k+1} &= \ln\left[1+\frac{1}{(2k)^p}\right]+\ln\left[1-\frac{1}{(2k+1)^p}\right]\\
&= \ln\left[1+\frac{(2k+1)^p-(2k)^p-1}{(2k)^p(2k+1)^p}\right],
\end{aligned}$$

于是当 $p=1$ 时 $a_{2k}+a_{2k+1}=0$, 可见 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k+1})$ 收敛. 用 §5.2.2 的习题 2657 的结论可见原级数条件收敛.

由于在 $0<p<1$ 时,

$$(2k+1)^p-(2k)^p=(2k)^p\left[\left(1+\frac{1}{2k}\right)^p-1\right]\sim\frac{p}{(2k)^{1-p}}\ \ (k\to\infty),$$

因此它是无穷小量. 于是对于 $n=2k$ 有

$$a_n+a_{n+1}\sim-\frac{1}{n^{2p}}\ \ (n\to\infty),$$

因此级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k+1})$ 是同号级数. 于是当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时收敛, 而当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散. 从习题 2657 可推出当 $\dfrac{1}{2}<p<1$ 时原级数条件收敛, 而从 §5.1.1 的习题 2554 可推出当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时原级数发散. □

习题 2683 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 用莱布尼茨判别法知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 收敛. 然后利用因子 $\frac{n-1}{n+1}$ 单调有界, 就可以用阿贝尔判别法知道本题级数收敛. 若记通项为 a_n, 则有 $|a_n|\sim\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$, 因此该级数为条件收敛. □

习题 2691 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 的收敛性.

解 (与 §5.1.1 的习题 2553 类似.) 用反证法. 若级数收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2=0$. 这时也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)^2=0$. 于是就有

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)&=\sin[(n+1)^2-n^2]\\&=\sin(n+1)^2\cos n^2-\cos(n+1)^2\sin n^2\to 0\ \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

由此可见也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n-1)=0$. 于是又可推出

$$\begin{aligned}\sin 2&=\sin[(2n+1)-(2n-1)]\\&=\sin(2n+1)\cos(2n-1)-\cos(2n+1)\sin(2n-1)\to 0,\end{aligned}$$

这与 $\sin 2\neq 0$ 相矛盾. 因此原级数发散. □

习题 2692 设

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数, 其中 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, 且当 $x\geqslant n_0$ 时 $|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$. 研究级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 用等价量判别法, 从 $|R(n)|\sim\frac{|a_0|}{|b_0|}n^{p-q}\ (n\to\infty)$ 可见当 $q-p>1$ 时级数绝对收敛, 而当 $q-p\leqslant 0$ 时级数发散.

由于分子分母都是多项式, 余下只有 $q=p+1$ 需要讨论.

如上所述, 这时绝对收敛是不可能的. 由 $q=p+1$ 可见有 $R(+\infty)=0$. 又可以证明当 x 充分大时函数 $R(x)$ 严格单调 (见 §2.7.1 的习题 1282), 因此数列 $R(n)$ $(n=n_0,n_0+1,\cdots)$ 当 n 充分大时严格单调 (递增或递减) 趋于 0, 从而用莱布尼茨判别法知道级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 收敛, 且只能是条件收敛. □

习题 2693 研究级数 $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$ 的收敛性.

解 容易看出当 $\min\{p,q\}>1$ 时级数绝对收敛, 而当 $\min\{p,q\}\leqslant 0$ 时级数的通项不是无穷小量, 因此发散.

将级数写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^q}$ 之和, 就可以看出当 $0<q<1<p$ 或 $0<p<1<q$ 时, 两个级数中一个收敛, 另一个发散, 因此原来的级数发散.

余下的是 $0<p,q\leqslant 1$ 的情况. 又不难发现, 当 $0<p=q\leqslant 1$ 时级数为条件收敛.

最后, 对于 $0<p,q\leqslant 1$ 但 $p\neq q$ 的情况, 可以直接计算级数的前 $2n$ 项之和. 将它记为 S_{2n}, 则有

$$S_{2n}=\Big(1+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}\Big)-\Big(\frac{1}{2^q}+\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n)^q}\Big),$$

不难用积分来估计这两个和式:

$$1+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}\sim\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^p}\sim O^*\Big(n^{1-p}\Big)\ \ (n\to\infty),$$

$$\frac{1}{2^q}+\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n)^q}\sim\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{(2x)^q}\sim O^*\Big(n^{1-q}\Big)\ \ (n\to\infty),$$

可见在 $p\neq q$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 为无穷大量, 因此级数发散. □

注 对于不可能绝对收敛的变号级数来说, 它能否收敛取决于级数中的正项之和与负项之和是否是等价的无穷大量. 参见 §5.2.2 的习题 2702.1 及其证明.

习题 2696(a) 证明: 级数

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots$$

在区间 $(0,\pi)$ 内收敛而不绝对收敛.

解 利用恒等式 (见 §2.1.4 的习题 1024(b))

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

可见这个和在 (固定) $x\in(0,\pi)$ 时关于 n 有界, 于是用狄利克雷判别法知道级数收敛.

利用

$$\frac{|\sin nx|}{n}\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n},$$

又与前述恒等式类似地可以建立恒等式

$$\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx=\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x},$$

于是对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$ 可以同样用狄利克雷判别法证明它在 $x\in(0,\pi)$ 时收敛, 因此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n}$ 发散, 于是原级数为条件收敛. □

习题 2699 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$$

定出: (a) 绝对收敛域; (b) 条件收敛域.

解 1 若 p 是负整数, 则级数只有有限个非零项, 当然绝对收敛.

对其他情况可以用 §5.1.4 的命题 5.3, 这样就可以对于级数的通项 a_n 得到

$$|a_n| = O^*\Big(\frac{1}{n^{q-p}}\Big)\ (n\to\infty),$$

可见当 $q>p+1$ 时级数绝对收敛, 而当 $q\leqslant p$ 时级数通项不是无穷小量, 因此发散.

对于 $p<q\leqslant p+1$ 的情况, 由于当 n 充分大时级数为交错, 且有

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{(n+1+p)n^q}{(n+1)^{q+1}} = \Big(1+\frac{p+1}{n}\Big)\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-q-1}$$
$$= 1+\frac{p-q}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ (n\to\infty),$$

因此用莱布尼茨判别法就推出级数收敛, 而且是条件收敛级数. □

解 2 (概要) 可以用高斯判别法代替命题 5.3 给出另一个证明. □

5.2.2 条件收敛级数的性质 (习题 2656–2658, 2662–2663, 2701–2705)

对于一般项级数, 首先要正确理解条件收敛和绝对收敛概念的意义. 收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为绝对收敛或条件收敛是按照每一项取其绝对值后得到的非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 是收敛还是发散来定义的.

注意条件收敛级数的一些特点. (1) 在这样的级数中必定既存在无限多个正项, 又存在无限多个负项. (2) 若将上述无限多个正项和无限多个负项分别组成两个无穷级数, 但不改变各项之间原来的次序, 则它们的部分和都是无穷大量. 而且如下面的习题 2702.1 所示, 它们 (在取绝对值后) 还一定是等价的无穷大量. 原级数的部分和必定是 $\infty-\infty$ 型的不定式. (3) 如许多教科书中收入的黎曼定理所示, 条件收敛级数在重排 (即更序) 后的部分和数列可以达到“要什么有什么”的境地. 为读者方便起见, 下面列出在较一般意义上的这个定理, 其证明可在很多教科书中找到.

命题 5.5 (黎曼定理) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则对于给定的 α 和 β, 只要满足条件 $-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant+\infty$, 就必定存在一个重排级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'$, 使得它的部分和数列 $\{S_n'\}$ 具有下列性质:

$$\varliminf_{n\to\infty}S_n' = \alpha\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}S_n' = \beta.$$

习题 2656 证明: 可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分别组合起来, 使所得的新级数绝对收敛.

解　关键是利用级数的部分和数列概念, 特别是如何从部分和数列恢复出原来的级数.

若级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 记其部分和数列为 $\{S_n\}$, 则在组合后的新级数的部分和数列就是 $\{S_n\}$ 的子列 (参看 §5.1.1 的习题 2554). 若将这个子列记为 $\{S_{p_n}\}$, 则从这个子列即可确定新级数的各个项为 $S_{p_1}, S_{p_2} - S_{p_1}, \cdots$. 于是新级数的绝对值级数就是

$$|S_{p_1}| + |S_{p_2} - S_{p_1}| + |S_{p_3} - S_{p_2}| + \cdots + |S_{p_n} - S_{p_{n-1}}| + \cdots. \tag{5.5}$$

于是问题就成为, 是否能够找到部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{p_n}\}$, 使得级数 (5.5) 收敛.

以下对数列 $\{S_n\}$ 用柯西收敛准则. 由于该数列收敛, 对 $\varepsilon = 1/2$, 存在正整数 p_1, 当 $m, n \geqslant p_1$ 时, 有 $|S_m - S_n| < 1/2$. 这时无论 $p_2 > p_1$ 如何取, 总能保证在 (5.5) 中的第二项 $|S_{p_2} - S_{p_1}| < 1/2$.

然后对 $\varepsilon = 1/4$, 存在正整数 $p_2 > p_1$, 当 $m, n \geqslant p_2$ 时, 有 $|S_m - S_n| < 1/4$. 这时无论 $p_3 > p_2$ 如何取, 总能保证 (5.5) 中的第三项 $|S_{p_3} - S_{p_2}| < 1/4$.

如此继续, 就可以取出子列 $\{S_{p_n}\}$, 使得 (5.5) 中的第 n 项 $|S_{p_n} - S_{p_{n-1}}| < 1/2^{n-1}$, $n = 2, 3, \cdots$, 从而 (5.5) 是个收敛级数.

这表明, 只要在原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中按照 $\{p_n\}$ 重新组合, 得到新级数为

$$(a_1 + \cdots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + \cdots + a_{p_2}) + \cdots + (a_{p_{n-1}+1} + \cdots + a_{p_n}) + \cdots,$$

则该级数绝对收敛. □

注　本题的结论对任何收敛级数都成立, 只是对绝对收敛级数不必重新组合了.

习题 2657 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 (a) 当 $n \to \infty$ 时, 此级数的通项 a_n 趋向 0; (b) 在不变更其顺序的情况下分别组合该级数的各项, 所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; (c) 在项 $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \cdots)$ 中相加项 a_i 的数目是有界的, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

解　由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的定义可知, 若记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则问题即是从 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{p_{n+1}-1}\}$ 收敛如何能够推出数列收敛. 设上述子列的极限为 S, 则只要证明 $S_n \to S$ $(n \to \infty)$.

将条件 (c) 中的项数上界记为 M, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 从条件 (a), 存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/2M$.

然后从条件 (b), 存在 N_2, 当 $k \geqslant N_2$ 时, 成立

$$|A_1 + \cdots + A_k - S| = |S_{p_{k+1}-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是只要取 $N = \max\{p_{N_2+1} - 1, N_1\}$, 对于 $n > N$ 的 S_n, 就存在 $k \geqslant N_2$, 使得 $p_{k+1} \leqslant n \leqslant p_{k+2} - 1$. 这样就有

$$\begin{aligned}|S_n - S| &= |a_1 + \cdots + a_n - S| \leqslant |a_1 + \cdots + a_{p_{k+1}-1} - S| + |a_{p_{k+1}} + \cdots + a_n| \\ &\leqslant |S_{p_{k+1}-1} - S| + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. □

注 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为同号级数, 则其部分和数列单调, 因此只要利用 §1.2.6 的习题 90 就可以从其一个子列收敛推出部分和数列收敛. 因此本题结论主要用于交错级数.

习题 2658 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则级数的和不变.

解 设原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其部分和数列为 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$. 又将重排后的级数的部分和数列记为 S'_n $(n = 1, 2, \cdots)$.

根据条件, 当 $n > m$ 时, 在 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 中的前 $n - m$ 项, 即 $a_1, \cdots, a_{n-m}$, 一定在 S'_n 的被加项之中, 即没有被更换.

不妨设 S_n 中的其余 m 项在重排后为原级数中的 $a_{n_1}, \cdots, a_{n_m}$ 项所更换, 且有 $n < n_1 < \cdots < n_m$. 这是在 S_n 中的后 m 项完全被更换的情况. 于是可以估计

$$|S_n - S'_n| \leqslant |a_{n-m+1}| + \cdots + |a_n| + |a_{n_1}| + \cdots + |a_{n_m}|.$$

由于 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $k > N$ 时有 $|a_k| < \varepsilon$. 令 $n > N + m$, 则就得到 $|S_n - S'_n| < 2m\varepsilon$.

除了上述极端情况之外, 另一个极端是在 S_n 中的后 m 项没有更换 (但可以有次序变更), 此外还有介于两个极端之间的情况. 可以看出, 对于所有其他情况, 上面所得的估计式仍然成立. 这样就证明了两个部分和数列的极限相同. □

注 本题表明, 虽然对于条件收敛级数有惊人的黎曼定理, 但级数的和在“有节制”的重排干扰下仍然保持不变. 换言之, 能够改变级数和的重排所必须满足的条件是: 各项在重排前后的位置之间的距离无界. 上述证明参考了美国数学月刊的第 110 卷 (2003), 57 页 (中译文见数学译林的第 23 卷 (2004), 第 3 期, 288 页).

习题 2662 (a) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. 将该级数的各项重排, 得到下列级数:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

求此级数的和.

解 1　分析重排级数的前 $3n$ 项之和 S_{3n}. 观察从头开始的每三项一组, 就可以看出其规律:

$$\begin{aligned}S_{3n} &= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\\&=\Big(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\&=\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

若记 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sigma_n$, 则从题中提供的已知级数和 (见 §5.2.1 的习题 2661) 有

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\\&=\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)-2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\&=\sigma_{2n}-\sigma_n\to\ln 2\ \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}S_{3n}&=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n\\&=(\sigma_{4n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)\to\frac{3}{2}\ln 2\ \ (n\to\infty).\quad\square\end{aligned}$$

解 2　可以直接用关于欧拉常数的公式 (见 §1.2.3 的习题 146):

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+o(1)\ \ (n\to\infty),$$

则就有

$$\begin{aligned}S_{3n}&=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n\\&=\ln(4n)-\frac{1}{2}\ln(2n)-\frac{1}{2}\ln n+o(1)\\&=\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2+o(1)\to\frac{3}{2}\ln 2\ \ (n\to\infty).\quad\square\end{aligned}$$

注　由于本题中的重排前和重排后的级数和不同, 因此如习题 2658 的结论所示, 如果将原来处于第 n 位置的项在重排后的位置记为 $f(n)$, 则 $|n-f(n)|$ 一定是无界的. 例如, 对于本题的 $n=2k$ 位的项 $\dfrac{(-1)^{2k-1}}{2k}$, 有 $f(n)=3k$, 可见 $|n-f(n)|=k$, 它确实是无界的.

习题 2701 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$, 则可否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛? 研究例子: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\Big]$.

解　如本节开始所述, 对一般项级数的回答是不能. 为此只要举出反例. 除了本题中提供的明显例子之外, 在《习题集》中还提供了其他例子, 例如 §5.2.1 的习题 2670, 其通项为 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ $(n\geqslant 2)$, 级数发散, 而用与这个通项等价的 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为通项构成的级数却是收敛的 (用莱布尼茨判别法). $\square$

注 再次指出, 对于一般项级数不能随意使用 §5.1 中对同号级数的等价量判别法. 这是初学者最容易犯的错误之一.

习题 2702.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是非绝对收敛级数,

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| + a_i}{2},\ N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| - a_i}{2}\ \ (n = 1, 2, \cdots),$$

证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

解 从定义可见, P_n 就是题设级数的前 n 项中的非负项之和, N_n 就是级数的前 n 项中的非正项之和再乘以 -1, 因此它们与级数的前 n 项之和 S_n 有以下关系:

$$S_n = P_n - N_n.$$

由于题设级数为条件收敛, 因此就有

$$\lim_{n \to \infty} (P_n - N_n) = S, \quad \lim_{n \to \infty} (P_n + N_n) = +\infty,$$

其中 S 是级数的和.

由此可见, 当 $n \to \infty$ 时, P_n 和 N_n 都是正无穷大量:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}[(P_n + N_n) + (P_n - N_n)] = +\infty,$$

$$\lim_{n \to \infty} N_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}[(P_n + N_n) - (P_n - N_n)] = +\infty,$$

然后就可以得到

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{N_n}{P_n} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{N_n - P_n}{P_n}\right) = 0. \quad \square$$

习题 2702.2 证明: 对于每一个 $p > 0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

解 1 记级数通项为 a_n, 部分和数列为 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 则对每个 n 有

$$S_{2n-1} = S_{2n-3} + a_{2n-2} + a_{2n-1} = S_{2n-3} - (|a_{2n-2}| - |a_{2n-1}|) < S_{2n-3},$$

可见 $\{S_{2n-1}\}$ 严格单调递减. 由于 $S_1 = a_1 = 1$, 因此级数和 $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n-1} < 1$.

现在考虑

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} + a_{4k+1}).$$

记 $f(x) = \frac{1}{x^p}$, 则有 $f'(x) = -px^{-p-1}$, $f''(x) = p(p+1)x^{-p-2}$, 因此当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 为严格凸函数. 于是对 $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$a_{4k-1} + a_{4k} + a_{4k+1} = \frac{1}{(4k-1)^p} - \frac{1}{(4k)^p} + \frac{1}{(4k+1)^p} > \frac{2}{(4k)^p} - \frac{1}{(4k)^p} = \frac{1}{(4k)^p},$$

这样就有

$$S_{4n+1} > 1 + \Big(-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}\Big) + \Big(-\frac{1}{6^p}+\frac{1}{8^p}\Big) + \cdots + \Big(-\frac{1}{(4n-2)^p}+\frac{1}{(4n)^p}\Big)$$
$$= 1 - \frac{1}{2^p} S_{2n}.$$

令 $n \to \infty$, 得到

$$S \geqslant 1 - \frac{1}{2^p} S \Longrightarrow S \geqslant \frac{2^p}{2^p+1}.$$

由于最后一个表达式是 $p\ (\geqslant 0)$ 的严格单调递增函数, 因此只要令 $p=0$ 代入即得到 $S > \frac{1}{2}$. □

解 2 [31] 记级数和为 S, 则有

$$S = 1 - \Big(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\Big) - \cdots - \Big(\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p}\Big) - \cdots,$$

可见 $S < 1$.

另一方面有

$$S = \Big(1 - \frac{1}{2^p}\Big) + \Big(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\Big) + \cdots.$$

与解 1 一样利用 $f(x) = 1/x^p$ 为严格凸函数, 于是就有 $2f(2n) < f(2n-1) + f(2n+1)$, 也就是 $f(2n-1) - f(2n) > f(2n) - f(2n+1)$.

这样就得到

$$1 - \frac{1}{2^p} > \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p},\ \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} > \frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p},\ \cdots$$
$$\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} > \frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p},\ \cdots.$$

因此有

$$S > \Big(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\Big) + \Big(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p}\Big) + \cdots$$
$$= 1 - S,$$

所以得到 $S > \frac{1}{2}$. □

习题 2703 (a) 在级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ 中应取多少项来计算级数的和, 方可使其精度达到 $\varepsilon = 10^{-6}$?

解 对于莱布尼茨型级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ (即满足莱布尼茨判别法的条件的级数), $\{b_n\}$ 是单调递减趋于 0 的非负数列, 因此从

$$R_n = (-1)^{n+1}[b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \cdots]$$
$$= (-1)^{n+1}[b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - \cdots]$$
$$= (-1)^{n+1}[(b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+3} - b_{n+4}) + \cdots],$$

由此可见有 $0 \leqslant (-1)^{n+1}R_n \leqslant b_{n+1}$, 特别是有 $|R_n| \leqslant b_{n+1}$. 这表明: 余项的符号与其所含的第一项相同, 而其绝对值不超过该项的绝对值. 于是对本题就有

$$|R_n| < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{n}.$$

可见取 $n = 10^6$ 即可使得 $|R_{10^6}| < 10^{-6}$. □

注 由这个例子可见, 对于条件收敛级数来说, 有可能要取非常多的项相加才能得到合乎精度要求的近似值. 对本题的级数来说, 用计算机得到以下三个结果:

$$S_{10^4} \approx 0.440\,867\,5,\ S_{10^5} \approx 0.440\,912\,5,\ S_{10^6} \approx 0.440\,917\,0.$$

与用 Mathematica 得到的 0.440 917 474 比较, 可见 $R_n < 1/n$ 的估计是比较准确的.

习题 2703(b) 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 中应取多少项来计算级数的和, 方可使其精度达到 $\varepsilon = 10^{-6}$?

解 本题是非莱布尼茨型的变号级数, 其误差估计可以用阿贝尔变换来得到. (阿贝尔变换是教科书中导出阿贝尔判别法和狄利克雷判别法时所用的主要方法.)

首先要估计 $A_k = \sin(n+1) + \cdots + \sin(n+k)$. 仿照对 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k$ 的求和方法, 有

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{1}{2}\cdot A_k = 2\sin\frac{1}{2}\cdot[\sin(n+1)+\cdots+\sin(n+k)]\\
&= \Big(\cos(n+\tfrac{1}{2}) - \cos(n+\tfrac{3}{2})\Big) + \cdots + \Big(\cos(n+k-\tfrac{1}{2}) - \cos(n+k+\tfrac{1}{2})\Big)\\
&= \cos(n+\tfrac{1}{2}) - \cos(n+k+\tfrac{1}{2}),
\end{aligned}$$

因此有 $|A_k| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}} = M \approx 2.086.$

记级数通项为 a_n, 然后就可以用阿贝尔变换估计如下:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = \frac{\sin(n+1)}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{\sqrt{n+p}}\\
&= \frac{A_1}{\sqrt{n+1}} + \frac{A_2 - A_1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{A_p - A_{p-1}}{\sqrt{n+p}}\\
&= A_1\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\Big) + \cdots + A_{p-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n+p-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+p}}\Big) + \frac{A_p}{\sqrt{n+p}}.
\end{aligned}$$

于是就有

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant \frac{M}{\sqrt{n+1}}.$$

最后令 $p \to \infty$, 就得到 $|R_n| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{n+1}}$.

为了满足题设的精度要求, 从 $\dfrac{M}{\sqrt{n+1}} < 10^{-6}$ 即可解出 $n > M^2 \cdot 10^{12} \approx 4.35 \times 10^{12}$. □

注 为了观察上述余项估计与实际误差之间的差距如何, 不妨将精度要求改为 10^{-k}, 其中取 $k = 1, 2, 3$, 然后作一些实际计算. 这时不难用 $n \approx 4.35 \times 10^{2k}$ 计算出级数的部分和分别为

$$1.015\,25,\ 1.046\,10,\ 1.043\,55,$$

可见上述余项估计还是比较准确的.

习题 2704 证明: 若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重排, 使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

解 将重排后的级数再作重新组合 (即加括号): 将前 $p+q$ 个项之和记为 A_1, 然后将接下来的 $p+q$ 个项之和记为 A_2, 如此继续下去, 则只要求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的和 (同时证明了收敛性), 然后用前面的习题 2657 就知道重排后的级数收敛, 且有相同的和 (参见习题 2657 的证明).

由于 $A_1+\cdots+A_n$ 就是重排前的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 中的前 np 个正项和前 nq 个负项之和, 因此就可以计算如下 (其中记 σ_n 为调和级数的前 n 项之和):

$$\begin{aligned}
A_1+\cdots+A_n &= \Big(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\Big)\\
&=\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2np-1}+\frac{1}{2np}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2np}\Big)\\
&\qquad-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2nq}\Big)\\
&=\sigma_{2np}-\frac{1}{2}\sigma_{np}-\frac{1}{2}\sigma_{nq}\\
&=\ln(2np)-\frac{1}{2}\ln(np)-\frac{1}{2}\ln(nq)+o(1)\\
&\to \ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}\ \ (n\to\infty),
\end{aligned}$$

其中利用了 $\sigma_n=\ln n+C+o(1)$ $(n\to\infty)$, C 是欧拉常数, 但并不需要知道它的数值. □

习题 2705 证明: 若改变调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

中的部分项的符号, 使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 $(p\neq q)$, 但不变更原来的顺序, 则此级数仍是发散的. 仅当 $p=q$ 时得到收敛级数.

解 首先作重新组合 (即加括号), 将前 $p+q$ 个项相加记为 A_1, 将接下来的 $p+q$ 个项相加记为 A_2, 如此继续, 则得到新的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 其通项为

$$
\begin{aligned}
A_n = & \frac{1}{(n-1)(p+q)+1} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(p+q)+p} \\
& - \frac{1}{(n-1)(p+q)+p+1} - \cdots - \frac{1}{n(p+q)} \\
\sim & \frac{p-q}{p+q} \cdot \frac{1}{n} \ (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

可见当 $p \neq q$ 时, 以 A_n 为通项的级数是同号级数, 从而由上述等价关系即可推出该级数发散. 然后从 §5.1.1 的习题 2554 (的逆否命题) 推出在重新组合之前的级数发散.

对于 $p = q$, 可用狄利克雷判别法. 由于级数

$$
\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p\text{ 项}}\underbrace{-1-1-\cdots-1}_{p\text{ 项}}+\cdots
$$

的部分和有界, 又因为当 $n \to \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 可见级数收敛. □

注 对于 $p = q$ 的情况, 从级数的第一项开始将相继的 p 项组合在一起, 就可得到一个莱布尼茨型的级数, 因此收敛.

5.2.3 补注 (习题 2690)

由于此题有特殊困难, 因此放在这里讨论.

习题 2690 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 1 对通项的分子用积化和差公式得到

$$
\sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2}[\cos(n(n-1)) - \cos((n+1)n)],
$$

于是即可知道关于 n 成立不等式:

$$
\left|\sin 1 \cdot \sin 1^2 + \sin 2 \cdot \sin 2^2 + \cdots + \sin n \cdot \sin n^2\right| \leqslant 1,
$$

因此用狄利克雷判别法知道级数收敛.

为了判定上述收敛究竟是绝对收敛还是条件收敛, 可以对绝对值级数作如下讨论①.

取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $\pi - 2\delta > 3$. 于是对每个正整数 k, 区间 $(k\pi + \delta, (k+1)\pi - \delta)$ 的长度大于 3, 因此其中至少有三个整数 (至多也就有四个整数). 将它们记为 $n-1, n, n+1$, 则 $|\sin(n-1)|$, $|\sin n|$, $|\sin(n+1)|$ 均大于 $\sin\delta$.

接下来可以证明在 $|\sin(n-1)^2|$, $|\sin n^2|$, $|\sin(n+1)^2|$ 中间至少有一个大于 $\sin\delta$. 用反证法, 若这三个数均小于等于 $\sin\delta$, 则就有三个整数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$
(n-1)^2 = k_1\pi + \delta_1,\ n^2 = k_2\pi + \delta_2,\ (n+1)^2 = k_3\pi + \delta_3,
$$

且有 $|\delta_1| < \delta$, $|\delta_2| < \delta$, $|\delta_3| < \delta$. 这样就有

$$
2 = (n-1)^2 + (n+1)^2 - 2n^2 = (k_1 + k_3 - 2k_2)\pi + (\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2).
$$

① 在新版的《习题集》中特别指出本题不必讨论其绝对收敛性, 但这样一来也就不能判定级数的收敛是否是条件收敛了. 实际上这个问题早在 [6] 中就解决了, 即解 1.

由于 $|\delta_1+\delta_3-2\delta_2|<4\delta$, 而 $\delta>0$ 充分小, 因此上式右边或者是个绝对值充分小的数 (若 $k_1+k_3-2k_2=0$), 或者是与 π 的某个整数倍充分接近的数 (若 $k_1+k_3-2k_2\neq 0$), 从而等式不可能成立.

于是就可以对每一个正整数 k 找到级数中相继的三项, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, 使得它们的下标在区间 $(k\pi+\delta,(k+1)\pi-\delta)$ 中, 而且满足

$$|a_{n-1}|+|a_n|+|a_{n+1}|>\frac{\sin^2\delta}{(k+1)\pi}.$$

由此可见, 对于正整数 N, 就有

$$\sum_{n<(N+1)\pi}|a_n|>\frac{\sin^2\delta}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1},$$

可见绝对值级数发散. 因此本题的级数为条件收敛. □

解 2 只证明绝对值级数发散①.

在平面的单位圆周上考虑 4 段短弧, 它们的角度为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\delta,\frac{k\pi}{2}+\delta\right)$, $k=0,1,2,3$, 其中取 δ 满足 $0<\delta<\frac{\pi-3}{4}$.

考虑绝对值级数中的下列 6 项之和: $A_k=|a_{6k+1}|+|a_{6k+2}|+\cdots+|a_{6k+6}|$. 将它们的下标 n 等同于单位圆上的点 $(\cos n,\sin n)$, 则可看出, 如果有一个下标 n 落在上述 4 段短弧内, 则接下来的三个下标一定不会落在这 4 段短弧内了. 于是可见在 6 个下标中或者前三个下标都不在这 4 段短弧内, 或者总有接连的其他三个下标不在这 4 段短弧内. 将它们记为 $n-1,n,n+1$. 这时就有

$$|\sin(n-1)|\geqslant\delta,\ |\sin n|\geqslant\delta,\ |\sin(n+1)|\geqslant\delta,\ |\cos n|\geqslant\delta.$$

于是有

$$A_k\geqslant\frac{\delta}{6k+6}[\,|\sin(n-1)^2|+|\sin n^2|+|\sin(n+1)^2|\,].$$

取数 $a>0$ 充分小, 使得满足 $b=\sqrt{1-a^2}\cos 1-a\sin 1>0$, 则或者 $|\sin n^2|\geqslant a$, 或者 $|\sin n^2|<a$. 对于后一种情况, 有

$$\begin{aligned}|\sin(n-1)^2|+|\sin(n+1)^2|&\geqslant|\sin(n-1)^2-\sin(n+1)^2|=2|\cos(n^2+1)\sin 2n|\\&\geqslant 4(|\cos n^2|\cdot\cos 1-|\sin n^2|\cdot\sin 1)\cdot|\sin n|\cdot|\cos n|\\&\geqslant 4b\delta^2.\end{aligned}$$

令 $C=\min\{a\delta,4b\delta^2\}$, 则就有 $A_k\geqslant\frac{C}{6k+6}$. 由于这对每个正整数 k 成立, 这样就已经证明了绝对值级数发散. □

① 这个解法是刘嘉荃教授提供的.

§5.3 级数的运算 (习题 2706–2715)

内容简介 本节是级数之间的求和运算与求乘积运算.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的和定义为逐项求和得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, 在前两个级数均收敛时, 作为它们的和的第三个级数也收敛, 且成立下列等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n).$$

关于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘积, 则要复杂得多. 它有多种定义方式, 但在本节中只考虑柯西乘积, 即定义

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

根据梅尔滕斯定理, 当两个收敛级数中至少有一个为绝对收敛时, 它们的柯西乘积级数收敛, 且上述等式成立 (参见 [15] 第二卷的 389–392 小节).

习题 2706 若两个级数, (a) 一个收敛, 而另一个发散; (b) 两个都发散, 则关于这两个级数的和可下何种断言?

解 (a) 这时可以肯定: 两个级数的和是一个发散级数①.

用反证法. 例如设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 而它们的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 收敛, 则就有

$$b_1 + \cdots + b_n = [(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)] - (a_1 + \cdots + a_n),$$

然后令 $n \to \infty$, 由于右边的两个部分和分别有极限, 因此就导致级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的结论, 这与条件矛盾. □

(b) 这时它们的和可以发散, 也可以收敛.

前者的例子是级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

与自身相加, 所得的和是级数 $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$, 仍然发散.

后者的例子是级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \text{ 与 } -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots,$$

它们的和是 $0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$, 即每一项等于 0 的收敛级数. □

---

① 这在 §5.2 中已多次使用 (例如见 §5.2.1 的习题 2666 等).

习题 2711 证明: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$

解 根据级数的柯西乘积定义, 有 $c_0=1\cdot 1=1$, 而对 $n>0$ 则有

$$\begin{aligned}c_n&=1\cdot\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot 1\\&=\frac{(-1)^n}{n!}[\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_n^k+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n].\end{aligned}$$

用二项式定理于 $(1-1)^n$, 就可以知道 $c_n=0$. 于是柯西乘积级数为 $1+0+0+\cdots=1$. □

注 根据 §1.5.7 之 4 的习题 611(b), 本题的级数乘积等式就是 $\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1$.

习题 2713–2714 涉及两个莱布尼茨型级数的柯西乘积. 这方面有下列的一般性命题 (见 [5]).

命题 5.6 (普林斯海姆定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为单调递减趋于 0 的数列, 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=B$ 的柯西乘积级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$, 其中 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛等价于下列的两个条件的每一个:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(b_1+\cdots+b_n)=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)b_n=0$.

解 条件 (a) 显然是柯西乘积级数收敛的必要条件. 下面证明它也是充分条件.

将题中的三个级数的部分和分别记为 A_n, B_n 和 C_n, 则有

$$\begin{aligned}C_n&=c_1-c_2+c_3-\cdots+(-1)^{n-1}c_n\\&=a_1b_1-a_1b_2+a_1b_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_1b_n\\&\qquad-a_2b_1+a_2b_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_2b_{n-1}\\&\qquad\qquad+a_3b_1+\cdots+(-1)^{n-1}a_3b_{n-2}\\&\qquad\qquad\qquad+\cdots\quad\cdots\\&\qquad\qquad\qquad\quad+(-1)^{n-1}a_nb_1\\&=a_1B_n-a_2B_{n-1}+a_3B_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_nB_1.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}|C_n-A_nB|&=|(a_1B_n-a_2B_{n-1}+a_3B_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_nB_1)\\&\qquad-(a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n)B|\\&=|a_1(B_n-B)-a_2(B_{n-1}-B)+\cdots+(-1)^{n-1}a_n(B_1-B)|.\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 是莱布尼茨型级数, 因此其余项估计满足下列不等式①

① 参见 §5.2.2 的习题 2703(a).

$$|R_k| = |B - B_k| \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k \ (k = 1, 2, \cdots),$$

从而就有

$$|C_n - A_n B| \leqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = c_n.$$

因此若有条件 $c_n \to 0 \ (n \to \infty)$, 则就得到

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n B = AB.$$

对于条件 (b), 只需要证明它与条件 (a) 等价即可.

若条件 (a) 成立, 则利用 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为单调递减的非负数列, 就有

$$0 \leqslant a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqslant a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n = c_n,$$

$$0 \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) b_n \leqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = c_n,$$

可见条件 (b) 成立.

反之, 若条件 (b) 成立, 则有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant c_{2n} &= a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} + \cdots + a_n b_{n+1} + a_{n+1} b_n + \cdots + a_{2n} b_1 \\ &\leqslant (a_1 + \cdots + a_n) b_n + a_n (b_1 + \cdots + b_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant c_{2n+1} &= a_1 b_{2n+1} + a_2 b_{2n} + \cdots + a_n b_{n+2} + a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_n + \cdots + a_{2n+1} b_1 \\ &\leqslant (a_1 + \cdots + a_n) b_n + a_{n+1} b_{n+1} + a_n (b_1 + \cdots + b_n), \end{aligned}$$

可见当 $n \to \infty$ 时就有 $c_n \to 0$. □

习题 2713 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

解 从命题 5.6 的条件 (a) 知道, 只要证明这时柯西乘积级数的通项不趋于 0.

写出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的通项为

$$c_n = (-1)^{n-1} \Big(\frac{1}{\sqrt{1 \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot 1}} \Big),$$

然后用平均值不等式, 对于 $k = 1, \cdots, n$ 有 $\sqrt{k \cdot (n+1-k)} \leqslant \frac{n+1}{2}$, 因此得到

$$|c_n| \geqslant n \cdot \frac{2}{n+1} \geqslant 1,$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散. □

习题 2714 证明: 下面两个收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \ (\alpha > 0) \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \ (\beta > 0)$$

的乘积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

解 这时用命题 5.6 的条件 (b) 较为方便.

对于

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\Big(1+\frac{1}{2^{\beta}}+\cdots+\frac{1}{n^{\beta}}\Big),$$

若 $\beta>1$, 则上式括号内的和式有上界, 因此当 $n\to\infty$ 时的极限为 0.

若 $\beta\leqslant 1$, 则由于

$$\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\beta}}\leqslant 1+\frac{1}{2^{\beta}}+\cdots+\frac{1}{n^{\beta}}\leqslant 1+\int_1^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\beta}},$$

因此有

$$1+\frac{1}{2^{\beta}}+\cdots+\frac{1}{n^{\beta}}=O^*\Big(\frac{1}{n^{\beta-1}}\Big)\ (n\to\infty).$$

于是得到

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\Big(1+\frac{1}{2^{\beta}}+\cdots+\frac{1}{n^{\beta}}\Big)=O^*\Big(\frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}\Big)\ (n\to\infty).$$

综合以上, 可见 $\alpha+\beta>1$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\Big(1+\frac{1}{2^{\beta}}+\cdots+\frac{1}{n^{\beta}}\Big)=0$ 的充分必要条件.

由对称性可见, $\alpha+\beta>1$ 也是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}}\Big(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\Big)=0$ 的充分必要条件.

于是从命题 5.6 的条件 (b) 就知道当 $\alpha+\beta>1$ 时柯西乘积级数收敛, 而当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时柯西乘积级数发散. 习题 2713 就是 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 的特例. □

§5.4 函数项级数 (习题 2716–2811.2)

内容简介 本节的习题可分为以下部分: 函数项级数的收敛域计算, 函数序列与函数项级数的一致收敛性及其应用. 在补注小节中介绍一些理论问题和黎曼引理的应用.

5.4.1 函数项级数的收敛域计算 (习题 2716–2740)

这里的习题仍然是讨论逐点收敛问题, 因此与 §5.1 和 §5.2 中的习题在方法上没有区别, 只是在观念上有所不同. 这里的级数通项是某个或几个变量的函数, 在收敛的情况下, 级数的和就成为变量的函数. 因此本小节的问题就是确定用无穷级数表示的函数的定义域. 这与 §5.1 和 §5.2 中含有参数的级数题实际上是一样的, 只是在函数项级数的通项中也还可以含有参数.

习题 2717 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n$ 的绝对收敛域和条件收敛域.

解 当 $x=-1$ 时级数通项无意义, 不必讨论.

记级数通项为 a_n, 令 $u=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则当 $|u|<1$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|u|,$$

可见当 $|u|<1$ 时级数绝对收敛, 而当 $|u|>1$ 时级数通项不是无穷小量, 因此发散. 容易看出 $u=-1$ 是不可能的, 而 $u=1$ 对应于 $x=0$, 这时级数为条件收敛.

将不等式 $|u|=\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|<1$ 改写为 $|1-x|<|1+x|$, 然后两边平方, 就可解出 $x>0$. 因此就得到结论: (1) $x>0$ 时级数绝对收敛; (2) $x=0$ 时级数条件收敛; (3) 其他情况级数发散. □

习题 2723 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}$ $(q>0, 0<x<\pi)$ 的绝对收敛域和条件收敛域.

解 本题除了变量 x 之外, 还含有两个参数 p 和 q.

记通项为 $u_n(x)$. 当 $q>p+1$ 时, 从 $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^{q-p}}$, 可见级数在 $0<x<\pi$ 上绝对收敛.

当 $q\leqslant p$ 时 $|u_n(x)|\sim n^{p-q}|\sin nx|$ $(n\to\infty)$, 不是无穷小量, 因此级数发散 (参见 §5.1.1 的习题 2553).

当 $p<q\leqslant p+1$ 时, 可以仿照 §5.2.1 的习题 2696(a) 的方法证明级数为条件收敛, 只是需要证明 $\dfrac{n^p}{1+n^q}$ 关于 n 为单调递减. 从 $p<q$ 可见当 $n\to\infty$ 时它趋于 0 是没有问题的.

为证明上式的单调性, 定义函数 $f(t)=\dfrac{t^p}{1+t^q}$, $t\geqslant1$, 则有

$$f'(t)=\frac{(p-q)t^{p+q-1}+pt^{p-1}}{(1+t^q)^2}.$$

利用 $q>0$, 因此当 t 充分大时上式的分子中的第一项起主要作用. 又因有 $p<q$, 可见当 t 充分大时有 $f'(t)<0$, 因此当 n 充分大时 $\frac{n^p}{1+n^q}$ 关于 n 为严格单调递减. □

习题 2724 (兰伯特级数) 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 的绝对收敛域和条件收敛域.

解 当 $|x|=1$ 时级数无意义.

当 $|x|>1$ 时级数通项当 $n\to\infty$ 时不是无穷小量, 因此级数发散.

当 $|x|<1$ 时, $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\sim|x^n|\ (n\to\infty)$, 因此级数绝对收敛. □

习题 2732 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\ (x>0,y>0)$ 的绝对收敛域和条件收敛域.

解 这是正项级数, 有两个变量 x 和 y, 当级数收敛时其和为二元函数.

由于通项关于 x,y 对称, 因此不妨设 $x\geqslant y$, 即 $y=\min\{x,y\}$.

若 $x=y>0$, 则通项为 $u_n=\frac{y^{2n}}{2y^n}=\frac{y^n}{2}$, 因此当 $y<1$ 时级数收敛, 而当 $y\geqslant 1$ 时级数发散.

若 $0<y<x$, 则通项 $u_n=\frac{y^n}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^n}\sim y^n\ (n\to\infty)$, 因此当 $y<1$ 时级数收敛, 而当 $y\geqslant 1$ 时级数发散.

综合以上, 可见当 $0<\min\{x,y\}<1$ 时级数收敛, 其他情况级数发散. □

习题 2737 (洛朗级数) 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$ 时收敛, 则此级数当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛.

解 若级数通项的系数 a_n 于下标为负整数时全为 0, 则就得到幂级数 (见 §5.5). 应用教科书中幂级数的基本定理 (阿贝尔第一定理), 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 于 $x_2\neq 0$ 收敛时, 级数对于满足 $|x|<|x_2|$ 的 x 均为绝对收敛①.

除了上述情况外, 当变量 $x\neq 0$ 时级数的通项才有意义.

洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 收敛的定义是以下两个级数

$$\text{(A)}\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ \ \text{和}\ \text{(B)}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}x^{-n}$$

① 为读者方便起见, 这里简述其证明. 从 $x=x_2$ 时的级数收敛, 可知 $a_nx_2^n\to 0\ (n\to\infty)$, 从而存在 $M>0$, 使得对一切 n 成立 $|a_nx_2^n|<M$. 于是有 $|a_nx^n|=|a_nx_2^n|\cdot\left|\frac{x}{x_2}\right|^n\leqslant M\left|\frac{x}{x_2}\right|^n$. 在 $|x|<|x_2|$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_2}\right|^n$ 是收敛的几何级数, 从比较判别法知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛.

同时收敛. 因此洛朗级数的收敛域是上述两个级数的收敛域之交集.

于是当以上两个级数在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 同时收敛且 $0 < |x_1| < |x_2|$ 时, 由前述幂级数基本定理可知, 当 x 满足 $|x| < |x_2|$ 时级数 (A) 收敛, 又将级数 (B) 看成为变量 $1/x$ 的幂级数, 则就知道当 x 满足 $|x| > |x_1|$ 时级数 (B) 收敛, 因此当 x 满足 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时这两个级数都收敛, 从而洛朗级数收敛. □

习题 2739 (牛顿级数) (a) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{[n]}}{n!}$ 的绝对收敛域和条件收敛域, 其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$①.

解 若 x 为 0 或正整数, 则级数只有有限项, 因此绝对收敛.

对于其他情况, 用 §5.1.4 的命题 5.3 及其注, 就有等价量公式

$$\frac{x^{[n]}}{n!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = O^*\left(\frac{1}{n^{1+x}}\right) \ (n \to \infty),$$

可见当 $x > 0$ 级数绝对收敛, 而当 $x \leqslant -1$ 时级数通项于 $n \to \infty$ 时不是无穷小量, 因此级数发散.

对于 $-1 < x < 0$, 牛顿级数为交错级数. 从上述等价量公式可知其绝对值级数发散, 而级数通项当 $n \to \infty$ 时趋于 0. 又从级数的后项与前项之比为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x-n}{n+1},$$

可见此时 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, 因此用莱布尼茨判别法知道级数收敛, 且为条件收敛. □

5.4.2 函数序列的一致收敛性 (习题 2741–2766)

一致收敛性是整体性概念. 函数项级数或函数序列的一致收敛性必定是对于指定的区间而言的. 这与函数的有界性 (和一致连续性等) 概念相类似.

例如, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上处处有定义, 而且在 $(0,1)$ 内的每一个闭子区间上有界, 然而却在 $(0,1)$ 上无界. 与此类似, 一个函数项级数或函数序列也可能在某个区间 (a,b) 上处处收敛 (即逐点收敛), 且在 (a,b) 内的每一个闭子区间上一致收敛 (即所谓内闭一致收敛), 然而却在 (a,b) 上不一致收敛.

从无穷级数与其部分和数列的联系出发, 可见函数项级数与其部分和函数序列在一致收敛性方面也有密切联系. 然而从具体研究来看, 函数序列的一致收敛性讨论往往比较容易. 这在很大程度上依赖于本小节下面的第一个习题所提供的方法.

习题 2741 证明: 序列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

① 这个记号相当于 §1.1.1 的习题 5 中于 $h = 1$ 时所用的记号.

解 分两部分来证明.

充分性 记 $a_n = \left\{\sup\limits_{x\in X} r_n(x)\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此对于给定的任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时 $a_n < \varepsilon$. 这也就是 $|f(x) - f_n(x)| = r_n(x) < \varepsilon$ 于 $x \in X$ 上都成立, 因此 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

必要性 若序列 $f_n(x)$ 于 X 上一致收敛, 则有极限函数 $f(x)$, 且对给定的任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得对于 $n > N$ 和所有的 $x \in X$ 成立 $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. 于是就有

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

也就是 $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sup\limits_{x\in X} r_n(x)\right\} = 0$. □

注 对于给定的集合 X 和在其上有定义的函数序列 $\{f_n(x)\}$, 要用本题的结论来验证它是否一致收敛, 一般的做法是: (1) 求出极限函数 $f(x)$; (2) 求出 $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ 在 X 上的上确界, 如果这个确界能够达到, 则就是最大值. 本小节的习题大多数都是用这个方法来解决的.

习题 2746 研究序列 $f_n(x) = x^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; (b) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 (a) 在区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 上, 函数序列 $\{x^n\}$ 的极限函数为 $f(x) \equiv 0$. 因此就有

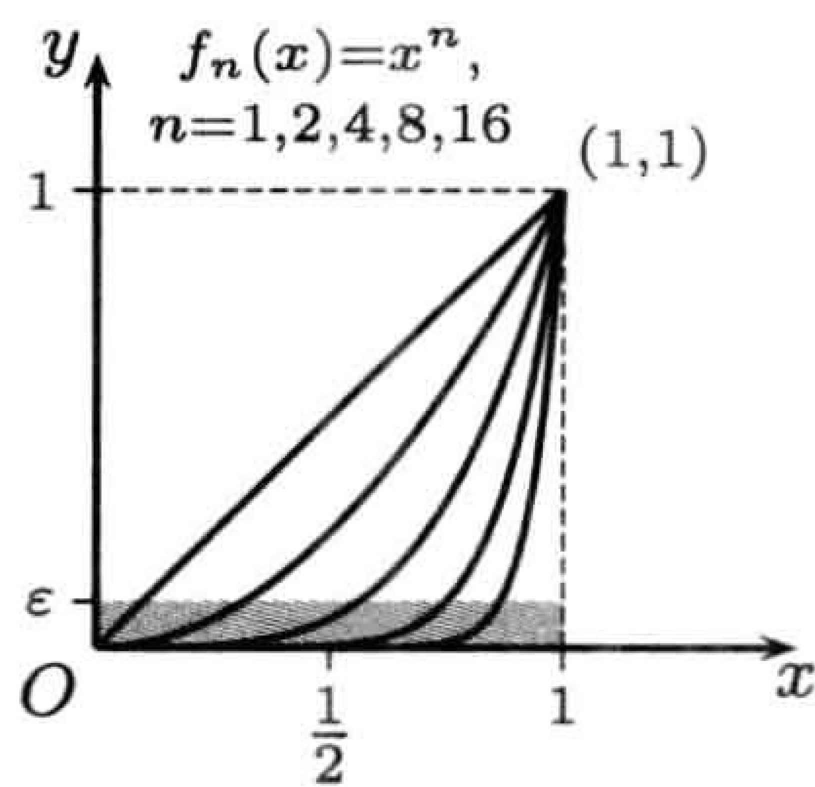
$$a_n = \sup_{x\in[0,1/2]} |x^n| = \frac{1}{2^n} \to 0 \ \ (n\to\infty),$$

即可见 $x^n \rightrightarrows 0$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上成立.

(b) 在区间 $[0,1]$ 上极限函数为 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$
因此在 $[0,1)$ 上 $r_n(x) = |x^n - 0| = x^n$, 而在 $x=1$ 时有 $r_n(1) = 0$. 于是有

$$a_n = \sup_{x\in[0,1)} x^n.$$

对每个固定的正整数 n, 都有 $a_n = 1$, 因此不满足习题 2741 的条件. 这表明序列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. □



习题 2746 的附图

注 1 本题有明显的几何意义. 如附图所示, 阴影区是 $\{(x,y) \mid 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < \varepsilon\}$. 由于在 $x=1$ 处 $f_n(1) = f(1) = 1$, 因此 $r_n(1) = 0$, 从而不需要考虑 $x = 1$ 这一个点. 然而问题恰恰就出在这个点的左侧邻近.

从图上可见, 无论 n 取多大, 只要固定 n, 当 x 趋于点 1 的左侧时, $r_n(x)$ 必定趋于 1. 因此对每一个正整数 n, 只要 $0 < \varepsilon < 1$, $f_n(x) = x^n$ 的图像就一定会越出阴影区. 这表明序列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, 尽管在点 $x=1$ 处 $r_n(1) \equiv 0$.

类似的情况也发生在其他的非一致收敛函数序列中. 例如 §4.3 的习题 2326.1(b), 用这里的语言来说, 序列 $\{\sin^n x\}$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上不一致收敛 (参见该题的附图).

注 2 利用连续函数序列的一致收敛的极限函数必定连续的定理 (见教科书), 因此从极限函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 左侧不连续就可推出 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注 3 由函数序列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛即可推出该序列在 $[0,1)$ 上也不一致收敛. 用反证法, 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时对所有 $x\in[0,1)$ 成立 $|x^n|<\varepsilon$. 那么由于在 $[0,1]$ 上的极限函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上等于 0, 在 $x=1$ 处等于 1, 而 x^n 在 $x=1$ 处恒等于 1, 从而同时对 $x\in[0,1]$ 成立

$$|x^n-f(x)|<\varepsilon,$$

这与 (b) 的结论矛盾.

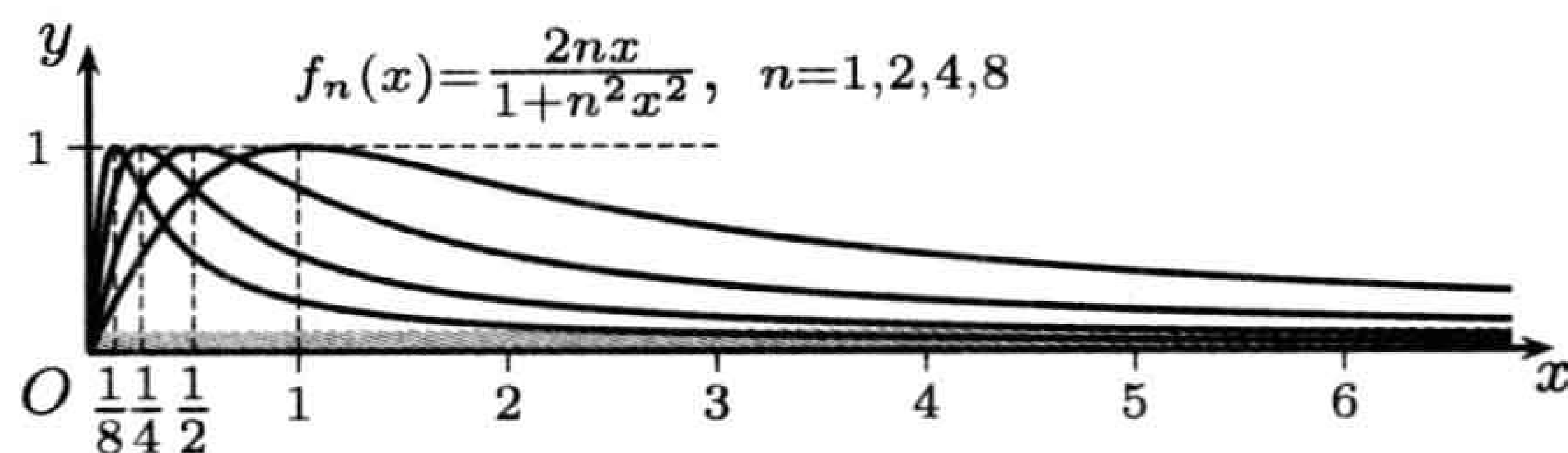
习题 2752 研究序列 $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) $0\leqslant x\leqslant 1$; (b) $1<x<+\infty$.

解 可以看出在区间 $[0,+\infty)$ 上的极限函数 $f(x)\equiv 0$. 于是有 $r_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$.

(a) 在区间 $[0,1]$ 上, 利用平均值不等式就有

$$nx=\sqrt{1\cdot n^2x^2}\leqslant\frac{1+n^2x^2}{2},$$

且于 $1=nx$ 时成立等号, 可见 $f_n(x)\leqslant 1$, 且于 $x=1/n$ 时达到最大值 1. 在下面的附图中作出了 $n=1,2,4,8$ 的 $f_n(x)$ 的图像. 从图中可见, 每一个 $f_n(x)$ 的图像都有一个峰, 其高度相同都是 1. 当 n 增大时, 这个峰左移. 然而这个峰的存在不影响序列 $\{f_n(x)\}$ 在每个点 $x\in[0,+\infty)$ 处收敛于 0.



习题 2752 的附图

于是在区间 $[0,1]$ 上对每个 n 都有 $r_n(1/n)=1$, 因此序列 $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(b) 在区间 $(1,+\infty)$ 上的情况则不同. 如图所示, $f_n(x)$ 在这个区间上是 x 的单调递减函数. 这可以通过

$$f_n'(x)=\frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}<0\ \ (x>1)$$

而得到证明. 这样就可以计算出

$$a_n=\sup_{x>1}r_n(x)=r_n(1)=f_n(1)=\frac{2n}{1+n^2},$$

从而当 $n\to\infty$ 时有 $a_n\to 0$. 因此函数序列 $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上一致收敛. □

注 由于每条曲线的峰左移趋于 $x=0$ 的右侧, 可以证明, 对任何 $\delta>0$, 本题的函数序列在 $[\delta,+\infty)$ 上均为一致收敛, 而在 $[0,\delta]$ 或者 $(0,\delta]$ 上均不一致收敛.

习题 2758 研究序列 $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) $-l<x<l$, 其中 l 为任意正数; (b) $-\infty<x<+\infty$.

解 对每个 x 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-(x-n)^2}=0$, 因此极限函数 $f(x)\equiv 0,\ -\infty<x<+\infty$.

(a) 给定 $l>0$, 则当 $n>l$ 时就有

$$\sup_{-l<x<l}|f_n(x)-f(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-(n-l)^2}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

因此函数序列 $\{\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\}$ 在 $(-l,l)$ 上一致收敛.

(b) 这时对每个 n, $|f_n(x)-f(x)|=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$ 在 $x=n$ 处达到最大值 1, 因此函数序列 $\{\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛. □

习题 2760 研究序列 $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) 在有限的区间 (a,b) 上; (b) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上.

解 如 §1.5.7 之 4 的习题 611(a) 所示, 极限函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(a) 利用习题 611(a) 和 (b) 中的结果, 就有

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|&\leqslant\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right|\\&\qquad+\left|\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-\mathrm{e}^x\right|\\&\leqslant\frac{x^2}{2n}\cdot\mathrm{e}^{|x|}+\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|x|},\end{aligned}$$

其中假设 n 已充分大使得 $n+2-|x|>0$.

由此可见, 对于任何给定的有界区间 (a,b), 总可以取到正数 M, 使得上式右边不超过 $\dfrac{M}{n}$, 从而证明了函数序列 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 (a,b) 上一致收敛.

(b) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的情况则不同. 实际上 $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 是 n 次多项式, 当 $x\to\pm\infty$ 时, 多项式的性态与指数函数 e^x 的性态完全不一样.

用反证法. 若函数序列 $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 则对于 $\varepsilon_0=1$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时对于每一个实数 x 都成立不等式

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|<1.$$

然而只要用 $x=n$ 代入, 上式就成了 $|2^n-\mathrm{e}^n|<1$, 而这在 n 充分大时就不能成立. □

注 也可以用习题 2741 的方法估计 $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. 由于 x 的多项式 $P(x)$ 在 $x\to\infty$ 时必为无穷大量 (见 §1.5.3 的习题 408), 同时又有 $P(x)=o(\mathrm{e}^x)$ $(x\to+\infty)$, 因此就不仅可以得到 (b) 中的结论, 而且还可以证明该函数序列在 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b]$ 上都不一致收敛.

习题 2765 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x)=n\Big[f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)-f(x)\Big].$$

证明: 在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上 (其中 $a<\alpha<\beta<b$), $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$.

解 从 $f_n(x)$ 的表达式可见在 (a,b) 上的极限函数为 $f'(x)$.

取 δ 满足 $0<\delta<b-\beta$, 则当 n 充分大时, 对于 $x\in[\alpha,\beta]$, 必可使得 $x+1/n\in[\alpha,\beta+\delta]\subset(a,b)$. 然后在区间 $[x,x+1/n]$ 上用拉格朗日微分中值定理于 $f_n(x)$, 就有 $\theta_n\in(0,1)$, 使得成立

$$|f_n(x)-f'(x)|=\Big|f'\Big(x+\frac{\theta_n}{n}\Big)-f'(x)\Big|.$$

利用 $f'(x)$ 在 $[\alpha,\beta+\delta]$ 上连续, 从而一致连续, 因此对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in[\alpha,\beta+\delta]$ 且 $|x_1-x_2|<\eta$ 时, 就有 $|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon$.

最后对于上述 η 和 δ, 取 N, 使得当 $n>N$ 时有 $\dfrac{1}{n}<\min\{\delta,\eta\}$, 则就对于所有 $x\in[\alpha,\beta]$ 成立

$$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon,$$

这样就证明了在区间 $[\alpha,\beta]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$. □

习题 2766 设 $f_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\Big(x+\frac{i}{n}\Big)$, 其中 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 证明: 序列 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在任何有限闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解 从 $f_n(x)$ 的表达式和 f 连续可见极限函数为 $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$. 这样就可估计如下:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-g(x)|&=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\Big(x+\frac{i}{n}\Big)-\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\Big|f\Big(x+\frac{i}{n}\Big)-f(x+t)\Big|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然后利用 f 在区间 $[a,b+1]$ 上连续, 从而一致连续, 于是对于给定的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 当 $x_1,x_2\in[a,b+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

最后取 N, 使得当 $n>N$ 时有 $1/n<\delta$. 于是对 $x\in[a,b]$, 在区间 $t\in[x+\dfrac{i-1}{n},x+\dfrac{i}{n}]$ 时, 就有 $|f(x+\dfrac{i}{n})-f(x+t)|<\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,n$. 从而就得到

$$|f_n(x)-g(x)|<\varepsilon,$$

即已经证明在 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows g(x)$. □

5.4.3 函数项级数的一致收敛性 (习题 2767–2791)

设函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在集合 X 上有定义, 又记其部分和函数序列为 $S_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$, 则根据定义, 该函数项级数在 X 上一致收敛等价于上述部分和函数序列在 X

上一致收敛. 于是上一小节的习题 2741 提供的方法也有可能用于判定函数项级数在 X 上的一致收敛性. 本小节开始的几个习题 2767–2773 就是这方面的练习题.

然而对于大多数函数项级数来说, 我们很难通过对其部分和序列的一致收敛性讨论来判定原来的函数项级数的一致收敛性.

回顾 §5.4.2 中的主要工具, 即习题 2741, 这里首先需要求出函数项级数的和函数 $S(x)$, $x \in X$ (如果函数项级数在 X 上处处收敛的话), 而这往往不一定做得到. 例如, 和函数可能不是初等函数, 甚至根本不属于已知的函数范围. 其次, 如何求出函数项级数的余项序列 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 的封闭形式又往往是个困难问题①. 最后, 如何求出在 X 上的函数序列 $|R_n(x)|$ 的最大值或上确界, 也可能不容易.

因此, 利用类似于 §5.1 和 §5.2 那样的一致收敛性判别法, 在不需要求和函数的情况下就判定函数项级数的一致收敛性, 乃是一个合理的选择. 实际上, 在一致收敛时至少可以对于和函数作近似计算. 因此在许多情况下为了判定一致收敛性而先要求出和函数实在是不太合理的, 因为后者是性质完全不同的另一个问题, 而且往往要困难得多. 在《习题集》的 §5.7 中将专门讨论级数求和问题.

《习题集》在本节开始列举了函数项级数的各种一致收敛性判别法, 其中最基本的是柯西一致收敛判别法, 最为常用的则是魏尔斯特拉斯判别法, 也称为强级数判别法.

还值得指出, 正如级数通项不收敛于 0 时的级数必定发散一样, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛即可推出通项 $u_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 0, 因此其逆否命题就成为利用通项特性得到的 (关于非一致收敛性) 一个简单的充分性判别法:

$$u_n(x) \text{ 在 } X \text{ 上不一致收敛于 } 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 在 } X \text{ 上不一致收敛.}$$

习题 2767 研究级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) $|x| < q$, 其中 $q < 1$; (b) $|x| < 1$.

解 1 (用习题 2741 的方法) 这个几何级数的收敛域为 $|x| < 1$, 在 $x \neq 1$ 时有

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

且可由此得到和函数 $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

于是可以用习题 2741 的方法来讨论一致收敛性.

(a) 当 $|x| < q\ (< 1)$ 时, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| < \frac{q^n}{1-q},$$

从而可见当 $n \to \infty$ 时就有 $\sup\limits_{|x|<q} |S_n(x) - S(x)| \to 0$, 即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在区间 $|x| < q\ (< 1)$ 上一致收敛.

① 当然这并非求 $|R_n(x)|$ 的上确界或最大值的必要条件.

(b) 当 $|x| < 1$ 时, 在 $|S_n(x) - S(x)| = \left|\dfrac{x^n}{1-x}\right|$ 的表达式中, 令 $x \to 1-0$ 就只能得到无穷大量, 可见级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在区间 $(-1, 1)$ 上不一致收敛. □

解 2 (用判别法) (a) 用强级数的一致收敛性判别法.

当 $|x| < q\ (< 1)$ 时, 有 $|x|^n < q^n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 因此只要用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 为强级数, 即可得到函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q\ (< 1)$ 时的一致收敛性.

(b) 利用通项的特性.

由 §5.4.2 的习题 2746(b) 知道函数序列 $\{x^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛, 且可由此推出它在 $[0, 1)$ 上不一致收敛于 0 (见该题的注 3). 于是它在 $(-1, 1)$ 上也不一致收敛于 0, 这样就知道以 x^n 为通项的函数项级数在 $(-1, 1)$ 上不一致收敛. □

习题 2768 (b) 研究级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 1 (用习题 2741) 从 §1.5.7 之 4 的习题 611(b) 知本题的级数和为 e^x. 利用带拉格朗日型余项的泰勒公式 (见 §2.10.3 的习题 1394(a)), 就有

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

由这个表达式可以看出, 在 $0 < x < +\infty$ 上, 只要令 $x = n+1$ 代入, 就有 $R_n(x) > 1$. 因此根据习题 2741 可见本题的级数在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. □

解 2 (利用通项) 可以证明本题的级数通项在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0, 于是由此即可推出级数在该区间上不一致收敛的结论.

用反证法. 若级数通项在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛于 0, 则对于 $\varepsilon_0 = 1$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对于所有 $x > 0$ 成立不等式

$$\frac{x^n}{n!} < 1.$$

而这个不等式对于每一个 n 都不能在 $(0, +\infty)$ 上成立. □

注 可以将解 2 中的方法用于证明更为一般的下列结论.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n(x)$ 的通项 $p_n(x)$ 为多项式 (其次数无限制), 则称为多项式级数. 可以证明, 若一个多项式级数在无界区间上一致收敛, 则存在 N, 当 $n > N$ 时 $p_n(x) \equiv 0$. 因此这样的级数的和函数只能是多项式 (见 [34] §16.3.6 的练习题 8). 特别是可推出, 含有无限多个非零项的幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一定不一致收敛.

习题 2773 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在下列区间上的一致收敛性 (其中 $\varepsilon > 0$): (a) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$; (b) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

解 (用习题 2741) 利用通项 $u_n(x)$ 的裂项分解:

$$u_n(x)=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

就可得到部分和函数序列的封闭形式:

$$S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

并得到级数和为 $S(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,+\infty),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(a) 在区间 $[0,\varepsilon]$ 上, 有

$$\sup_{x\in[0,\varepsilon]}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{x\in(0,\varepsilon]}\left|\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|=1,$$

可见级数不一致收敛.

(b) 在区间 $[\varepsilon,+\infty)$ 上有

$$\sup_{x\in[\varepsilon,+\infty)}|S(x)-S_n(x)|=\frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\cdots(1+n\varepsilon)}\leqslant\frac{1}{n!\varepsilon^n}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\varepsilon^n}$ 可用达朗贝尔判别法知其收敛, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!\varepsilon^n}=0$ (也见 §1.2.2 的习题 61), 从而知级数在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上一致收敛. □

注 其他方法: 对于 (a), 可以利用和函数于点 $x=0$ 右侧不连续而推知级数不一致收敛; 对于 (b), 可以用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(\varepsilon)$ 为强级数.

习题 2774 含 12 个小题, 均可以用强级数判别法. 下面只对其中几题指出方法.

习题 2774 利用魏尔斯特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所指定区间内的一致收敛性:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解 (概要) 从 $0<\frac{1}{x^2+n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$, 即可用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为强级数. □

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<+\infty$.

解 (概要) 利用平均值不等式即可有 $n^{\frac{5}{2}}\cdot x=\sqrt{1\cdot n^5x^2}\leqslant\frac{1+n^5x^2}{2}$, 可见对于所有 x 成立

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

因此可以用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 为强级数. □

(j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$.

解 (概要) 利用 $t \geqslant 0$ 时有 $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$, 就有

$$0 \leqslant \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n\ln^2 n} < \frac{a^2}{n\ln^2 n},$$

因此可以用 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ 为强级数 (参见 §5.1.6 的习题 2619(a)). □

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx},\ 0 \leqslant x < +\infty$.

解 (概要) 对函数 $x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 求导即可知级数通项在 $[0,+\infty)$ 上的最大值为 $\frac{4}{n^2}\mathrm{e}^{-2}$, 因此就可以用 $4\mathrm{e}^{-2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为强级数. □

总结以上几个例子, 可得到下列命题, 它刻画了魏尔斯特拉斯判别法的有效范围.

命题 5.7 能够用魏尔斯特拉斯判别法判定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于集合 X 上一致收敛的充分必要条件是下列非负项级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

其中 $a_n = \sup\limits_{x\in X}|u_n(x)|\ (n=1,2,\cdots)$.

证 充分性是明显的, 由于非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 从其通项的定义可见这个级数就可以用作为强级数.

必要性. 如果能够用魏尔斯特拉斯判别法证明题中的函数项级数于 X 上一致收敛, 则存在强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 它是一个收敛的非负项级数, 且对每个 n 和 $x\in X$ 满足条件:

$$|u_n(x)| \leqslant b_n.$$

这就表明对每一个 n 有 $0 \leqslant a_n = \sup\limits_{x\in X}|u_n(x)| \leqslant b_n$, 因此根据比较判别法就知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

注 1 用强级数方法判定在 X 上的级数一致收敛时, 该级数还必定在 X 上处处绝对收敛. 命题 5.7 只是给出了强级数方法能够成功应用的充分必要条件, 但并不是函数项级数在 X 上绝对一致收敛的充分必要条件. 若命题中的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则命题只表明不能用强级数方法, 然而该级数仍然可能在 X 上绝对收敛且一致收敛. 下面的习题 2786 就是如此.

读者还可以将命题 5.7 与 §5.4.2 的习题 2741 作比较, 可以看到它们在表面上有相似性, 但结论不同. 特别是不能从魏尔斯特拉斯判别法的不成功推出不一致收敛的结论, 因为它只是充分条件.

同样, 在函数项级数的一致收敛性问题中常用的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法一般也只是充分性判别法①. 为了判定函数项级数在指定数集上为非一致收敛, 除了利用通项特性的 (不是很强有力的) 方法之外, 主要的工具还是柯西一致收敛判别法.

习题 2775 研究函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在下列区间上的一致收敛性: (a) $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi-\varepsilon$, 其中 $\varepsilon>0$; (b) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

解 利用 §5.2.1 的习题 2696(a), 已知本题的级数在 $[0,2\pi]$ 上处处收敛, 且在 $x \neq 0,\pi,2\pi$ 时条件收敛, 因此不可能用魏尔斯特拉斯判别法.

(a) 在区间 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ (这里要求 $0<\varepsilon<\pi$) 上有估计

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\varepsilon}{2}\right|},$$

因此用狄利克雷判别法就知道级数在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

(b) 利用对偶法则 (参见 §1.2.5 的习题 87 及其注或参考 [34] 的 §1.4), 从关于函数项级数的柯西一致收敛准则的下列形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \text{ 于 } X \text{ 上一致收敛} \iff \text{对任意给定的 } \varepsilon>0, \text{ 存在 } N, \text{ 使得对 } n>N,$$
$$p>0 \text{ 和 } x\in X, \text{ 成立 } |u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

就可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \text{ 于 } X \text{ 上不一致收敛} \iff \text{存在某个 } \varepsilon_0>0, \text{ 对任意给定的 } N, \text{ 存在 } n>N,$$
$$p>0 \text{ 和 } x\in X, \text{ 成立 } |u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于对每一个给定的 N 要同时确定 n,p 和 x 是比较困难的, 以下固定取 $p=n$ (参见 §1.2.5 的习题 88 的解 1), 于是对于本题就要求成立不等式

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\cdots+\frac{\sin 2nx}{2n}\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

若取 $x=\dfrac{\pi}{4n}$, 则在上式左边的绝对号内的每一个分式的分子都大于 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因此这 n 项之和就大于 $n\cdot\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

根据以上分析, 取定 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 则对任意给定的 N, 就可取 $n=p=N+1$, $x=\dfrac{\pi}{4n}$, 这时就得到

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\cdots+\frac{\sin 2nx}{2n}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{n}{2n}=\varepsilon_0.$$

① 已经证明, 在广义积分、数项级数和函数项级数中同名的这两个判别法不仅是充分条件, 而且在被积函数或级数通项存在所要求的乘积形式分解的意义上也是必要条件 (参见[34] 的 §13.3.1 最后的注), 但目前还没有看到这样的必要性在判定不一致收敛上的应用.

这样就证明了函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上不一致收敛. □

注 今后将会知道本题的函数项级数的和函数于 $x=0,2\pi$ 处不连续, 从而即可推出 (2) 中的结论 (参见 §5.4.5 的例题 1 和 §5.6.1 的习题 2941).

习题 2776 研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ 在区间 $0<x<+\infty$ 上的一致收敛性.

解 利用当 $x>0$ 时有 $|\sin x|<x$, 可见本题的级数通项满足不等式

$$|u_n(x)|\leqslant\frac{2^n}{3^n x},$$

因此在区间 $(0,+\infty)$ 上级数处处绝对收敛. 然而虽则 $u_n(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 上处处收敛于 0, 但在该区间上却并非一致收敛于 0. 利用 §5.4.2 的习题 2741, 只需写出

$$\sup_{x>0}\left|2^n\sin\frac{1}{3^n x}\right|,$$

就可见对每个固定的 n, 由于 $x>0$ 可取任意小, 此上确界是 2^n, 它当然不趋于 0. 因此本题的级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

习题 2777 研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在区间 $0<x<+\infty$ 上的一致收敛性.

解 由于对每个 $x>0$, 级数均为莱布尼茨型, 因此在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛. 又由于该级数处处为条件收敛, 因此不可能用魏尔斯特拉斯判别法.

记级数的部分和为 $S_n(x)$, 级数和为 $S(x)$, 则可以利用莱布尼茨型级数的余项 $R_n(x)$ 的绝对值不超过 $|u_{n+1}(x)|$, 于是就有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1},$$

可见此级数于 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. □

注 本题当然也可以用狄利克雷判别法或者阿贝尔判别法得到相同的结论.

习题 2786 证明: 绝对收敛且一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, 其中

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2^{-(n+1)},\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0, & 2^{-n}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

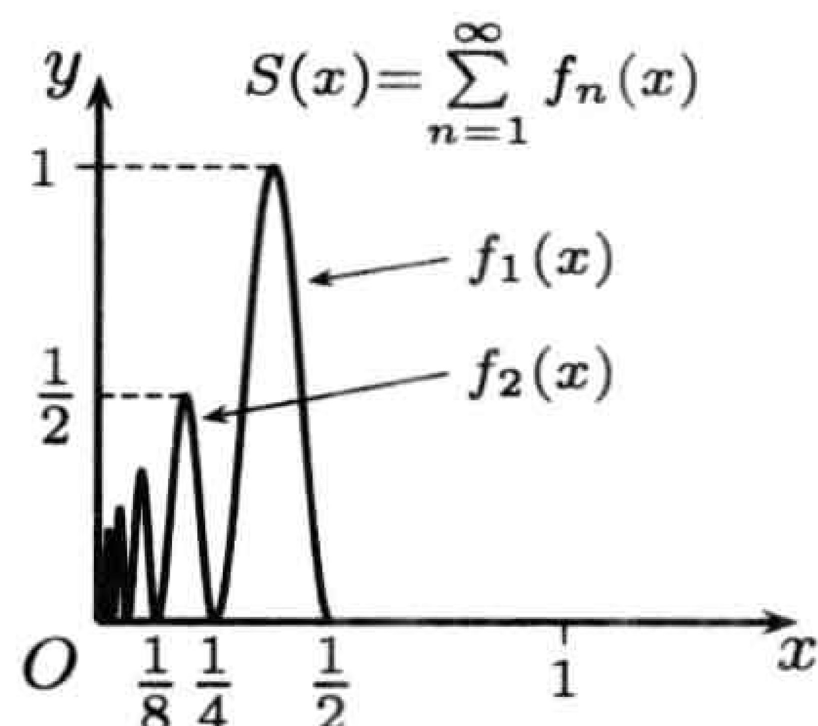
不能用非负项的收敛数项级数作为其强级数.

解 可以看出对于区间 $[0,1]$ 中的每一个 x, 级数中至多只有一项不等于 0. 因此级数在 $[0,1]$ 上处处收敛. 记级数和为 $S(x)$ (参见附图中的和函数的示意图), 部分和为 $S_n(x)$, 则余项

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$$

也具有类似的性质, 即对于每一个 x, 在 $R_n(x)$ 的上述和式中至多只有一项不等于 0. 由于又有 $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, 因此可知此级数于 $[0,1]$ 上一致收敛.

若存在强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 则就在 $[0,1]$ 上对每个 n 成立 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant a_n$. 由 $f_n(x)$ 的表达式可见必有 $a_n \geqslant 1/n$, 而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 已经发散. 因此这样的收敛正项级数是不可能存在的. □



习题 2786 的附图

注　可以构造更为简单的例子. 如附图所示, 只要使级数通项 $f_n(x)$ 在区间 $(2^{-(n+1)}, 2^{-n})$ 上取常数值 $1/n$ 就足够了. 本题的取法则使得 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

习题 2788　证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上是绝对收敛且一致收敛的.

提示　本题是幂级数理论中的基本内容, 其证明见教科书. 这里要对初学者指出, 如一个幂级数的收敛域是含有端点的区间, 则该幂级数在端点上未必绝对收敛. 这影响到本题的结论和所用的方法. □

5.4.4　和函数与极限函数的性质 (习题 2792–2811.2)

本小节的习题接触到函数项级数的核心内容, 其中的主要问题是: 函数项级数的和函数的三个基本性质, 即连续性、可微性和可积性, 能否从级数的通项所具有的相应性质推出? 若可以, 则和函数的导数和积分能否通过函数项级数的逐项求导和求积分得到? (对于函数序列也有同样的问题, 即其极限函数的连续性、可微性和可积性能否从函数序列所具有的相应性质推出? 若可以, 则极限函数的导数和积分能否通过函数序列的求导和求积与求极限运算交换顺序得到?)

历史上为解决这些问题曾经提出过多种工具, 一致收敛性概念就是其中之一.

由于这里有较多的理论问题需要讨论, 我们将有关内容集中放在下一个补注小节中作介绍. 建议初学者在做本小节的习题前先浏览其中的内容.

习题 2792　证明: 函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

解　由于级数的通项 $u_n(x)$ 连续, 且有强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, 因此级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 从而 $f(x)$ 在此区间上连续.

为研究 f 的可微性, 将级数对 x 逐项求导得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. 由于这个级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上可以用强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 保证其一致收敛, 且为连续函数, 从而就知道对于 $f(x)$ 的求导数运算和级数的求和运算可交换, 于是可通过对级数的逐项求导得到

$$f'(x)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

从而知道 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微. □

注　初学者必须注意, 在教科书的逐项可微定理中, 为了级数的和函数可导且其导数可以通过逐项求导得到, 即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x},$$

关键条件是上式右边的级数, 即逐项求导所得到的级数, 在所论区间上为一致收敛. 这一点与和函数的连续性定理以及逐项积分定理完全不同.

习题 2796 设 r_k $(k=1,2,\cdots)$ 是区间 $[0,1]$ 内的全体有理数, 证明函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

具有下列性质: 1) 连续; 2) 在无理点处可微而在有理点处不可微.

解　1) 由于级数的每一项在 $[0,1]$ 上连续, 又有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}$ 为强级数, 因此从连续性定理可知级数的和函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

2) 因级数的各项在点 $x=r_k$ 处不可导, 因此不能用现成的逐项可微定理.

设 $x_0\in[0,1]$ 为无理数, 则存在 $\delta>0$, 使得邻域 $O_\delta(x_0)\subset[0,1]$. 直接写出差商

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_0+h-r_k|-|x_0-r_k|}{3^kh},\tag{5.6}$$

并利用三点不等式 $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|$, 就有

$$\left|\frac{|x_0+h-r_k|-|x_0-r_k|}{h}\right|\leqslant 1,$$

从而可见 (5.6) 右边的级数有强级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$, 因此对于满足 $0<|h|<\delta$ 的 h 为一致收敛. 于是 $h\to 0$ 的极限运算可以与级数的求和运算相交换, 这样就有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_0+h-r_k|-|x_0-r_k|}{3^kh}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\lim_{h\to 0}\frac{|x_0+h-r_k|-|x_0-r_k|}{3^kh}\Big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pm 1}{3^k},\end{aligned}$$

其中利用了函数 $|x-r_k|$ 在无理点 x_0 处可微. 在最后一个级数的各项的分子中, 当 $x_0>r_k$ 时取正号, 当 $x_0<r_k$ 时取负号.

由于最后一式的级数绝对收敛, 因此就证明了 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导.

现设 $x\in[0,1]$ 为有理数, 则存在唯一的 k_0, 使得 $x=r_{k_0}$. 这时可以将 $f(x)$ 的级数表达式分解如下 (其中设 $k_0>1$, 对于 $k_0=1$ 的情况讨论是类似的):

$$f(x)=\frac{|x-r_{k_0}|}{3^{k_0}}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{|x-r_k|}{3^k}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}. \tag{5.7}$$

这时等式右边的第一个和式只有有限项, 且在点 $x=r_{k_0}$ 处均可导, 而第二个和式则与前面 x_0 为无理数的情况一样可以证明在点 $x=r_{k_0}$ 处可导. 然而 (5.7) 右边的第一项在点 $x=r_{k_0}$ 处不可导. 这样就证明了 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的有理点处均不可导. □

习题 2797 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在区间 $x>1$ 内连续, 且在此区间内有各阶的连续导函数.

解 由正项级数的柯西积分判别法 (或其他判别法), 可知 $\zeta(x)$ 在 $x>1$ 时有定义.

对任意点 $x_0>1$, 取 $\delta>0$ 充分小 (例如令 $\delta=(1+x_0)/2$), 使得有 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(1,+\infty)$. 在这个闭区间上有强级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0-\delta}}$, 因此从魏尔斯特拉斯判别法知道级数在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上一致收敛, 从而和函数在点 x_0 处连续. 由于 $x_0\in(1,+\infty)$ 的任意性, 可见 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处连续.

对级数逐项求导得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln n}{n^x}.$$

对任意点 $x_0>1$, 与前面同样地取 $\delta>0$, 使得 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(1,+\infty)$, 则在这个闭区间上有强级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x_0-\delta}}$, 因此从魏尔斯特拉斯判别法知道上述逐项求导得到的级数在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上一致收敛, 从而知道 $\zeta(x)$ 在点 x_0 处可导, 且成立

$$\zeta'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln n}{n^{x_0}}.$$

由于 $x_0\in(1,+\infty)$ 的任意性, 可见 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处可导, 且其导数可以从原来的级数逐项求导得到.

以下可以用数学归纳法证明 $\zeta(x)$ 在其定义域内处处有任意阶导数. 从略. □

注 由于以上出现的所有函数项级数都在 $x=1$ 处发散, 因此它们在 $(1,+\infty)$ 或任何有界区间 $(1,A)$ 上均非一致收敛. 由于连续性和可导性都是函数的局部性质, 因此只要用一个充分小的区间将所讨论的点 x_0 包含于其内部, 然后就只需对这个小区间来验证所需要的一致收敛性条件即可. 本题的讨论在这方面具有典型意义.

习题 2799(b) 确定函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$ 的存在域并研究它的可微性.

解 1 级数在点 $x=0$ 处显然收敛, 且 $f(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时, 通项 $u_n(x)=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(n\to\infty)$, 因此收敛. 于是函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

由于 f 为偶函数, 以下先研究在 $x\in(0,+\infty)$ 时的可微性.

在 $x>0$ 范围内对级数逐项求导, 由于 $\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)'=\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$, 且有

$$\left|\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{n^2+x^2}{(n^2+x^2)^2}=\frac{1}{n^2+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

可见逐项求导得到的级数在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. 对点 $x_0>0$ 可作一个闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 使得 $x_0\in(a,b)$. 对于此区间 $[a,b]$ 用逐项可微定理, 就知道 $f(x)$ 在点 x_0 可导. 由于 $x_0>0$ 的任意性, 可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内处处可导, 且有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2},\ \ x\in(0,+\infty).$$

由于上式右边的级数于 $x=0$ 收敛, 且于 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 因此取 $x\to+0$ 的极限可以与级数求和交换顺序, 这样就求出了导函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的右侧极限:

$$f'(+0)=\lim_{x\to+0}f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+0}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

其中最后一个等式见 §5.1.7 的习题 2655(a) 及其注.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 根据单侧导数极限定理 (见 §2.6.4 的习题 1258.1), 即有

$$f'_+(0)=f'(+0)=\frac{\pi^2}{6}.$$

最后, 由于 f 为偶函数, 因此也就知道它在 $(-\infty,0)$ 内处处可微, 且有

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2},\ \ x\in(-\infty,0).$$

又由于 f 是偶函数, 因此就有 $f'_+(0)=-f'_-(0)$①, 于是从 $f'_+(0)\neq 0$ 就知道 $f(x)$ 于点 $x=0$ 处不可微, 即在该点存在两个不相等的单侧导数. □

解 2 (概要) 可能更为简单的方法是将级数各项的共有因子 $|x|$ 提出到求和前, 得到函数 $f(x)=|x|\cdot g(x)$, 其中 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, 然后分别讨论两个因子即可得到与解 1 相同的结论. □

习题 2802 试确定参数 α 取何值时下列命题为真: (a) 序列 $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上收敛; (b) 该序列在 $[0,1]$ 上一致收敛; (c) 可在积分号下取极限求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

① 这里可以参考 §2.1.4 的习题 1027, 即当 f 为可微偶函数时, f' 必是奇函数.

解 (a) 在 $x=0$ 处总有 $f_n(0)=0$, 因此函数序列收敛于 0. 在 $0<x\leqslant 1$ 时, 若 $\alpha\leqslant 0$, 则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 若 $\alpha>0$, 则从 §1.2.2 的习题 60 就知道极限也是 0. 因此, 所给的函数序列对参数 α 的任何值在 $[0,1]$ 上都收敛于极限函数 $f(x)\equiv 0$.

(b) 通过求导不难确定 $f_n(x)$ 在点 $1/n$ 达到极大值

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f_n(x)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1},$$

因此只要用 §5.4.2 的习题 2741 中的充要条件, 就知道于 $x\in[0,1]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows 0$ 的充分必要条件是 $\alpha<1$.

(c) 由于已知极限函数 $f(x)\equiv 0$, 因此若 $n\to\infty$ 的极限运算能通过积分号, 则结果就是 0.

直接计算积分得到

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=n^{\alpha}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=n^{\alpha-2}-\frac{n^{\alpha-2}+n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^n},$$

可见成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

的充要条件是 $\alpha<2$. □

注 当 $\alpha\in[1,2)$ 时, 本题的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上虽然并不一致收敛, 但积分与 $n\to\infty$ 的极限顺序却仍可交换 (参见后面 §5.4.5 的命题 5.8).

习题 2811.1 设 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是无穷多次可微的函数, 且其导数 $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的序列在每一个有限区间 (a,b) 上一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明: $\varphi(x)=C\mathrm{e}^x$, 其中 C 为常数.

解 这时在每一个区间 (a,b) 上, 序列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 和 $\{f^{(n+1)}(x)\}$ 都是一致收敛, 因此就知道对每一个 x 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n)}(x)=\lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x).$$

这样既有 $f^{(n)}(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, 又有 $f^{(n+1)}(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, 因此上式就是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=\varphi(x).$$

由此即可得到 $\varphi(x)=C\mathrm{e}^x$ (参见 §4.10 的习题 2528). □

习题 2811.2 设函数 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且有界, 在任何闭区间 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$. 由此能否可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f_n(x)=\sup_x\varphi(x)?$$

考察例子 $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$, $n=1,2,\cdots$.

解 不一定. 若取 $f_n(x)\equiv c$ $(n=1,2,\cdots)$, 则也有 $\varphi(x)\equiv c$, 于是题中所考虑的等式当然成立.

然而对于题中提出的例子来说, 从 §5.4.2 的习题 2758 可知, $\varphi(x) \equiv 0$, 因此 $\sup\limits_x \varphi(x) = 0$. 然而, 对每个 n 均有 $\sup\limits_x \mathrm{e}^{-(x-n)^2} = 1$, 因此当 $n \to \infty$ 时其极限只能是 1, 从而得到

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sup_x \{\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\} \neq \sup_x \{\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-(x-n)^2}\} = 0. \quad \square$$

5.4.5 补注

这个小节包含两个内容: (1) 对本节内容的理论背景作一个综述, (2) 介绍黎曼引理及其若干应用.

1. 关于函数项级数和函数序列的补充

函数项级数和函数序列是数学分析中在微积分的基础上发展出来的研究函数的重要手段. 这里不仅有许多用函数项级数定义的非初等函数 (例如 §5.4.4 的习题 2797 的黎曼 ζ 函数), 就以初等函数来说, 除了有理函数之外, 其他函数的计算也都离不开函数项级数这个工具.

作为基础, 本节只涉及如何利用函数项级数与函数序列来研究其和函数与极限函数的基本性质.

下面只对于无穷级数的情况分别列出主要结果, 并指出需要注意之处. 将它们转移到函数序列上去是容易的.

对无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 而言, 设该级数在集合 X 上收敛, 其和函数记为 $S(x)$.

(1) 对于点 x_0, 设它是 X 的聚点, 则问题是: 对和函数取 $x \to x_0$ 时的极限与级数求和是否可交换顺序? 这也就是问下列等式是否成立:

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

在 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 均于点 x_0 处连续时, 也就是问和函数 $S(x)$ 于点 x_0 处是否连续.

如教科书中所说, 在级数于 X 上一致收敛时, 上述两种极限的顺序交换是正确的.

这里要指出, 一致收敛性只是充分条件, 并不是必要条件. 《习题集》的 §5.4 中提供了这方面的例子, 即习题 2794. 在 [34] 的 §14.2.3 介绍了将一致收敛性减弱为准一致收敛性的著名结果, 它可从通项连续性条件保证和函数连续性, 而且是充分必要条件.

(2) 设前述级数的通项均为区间 $X = [a, b]$ 上的可积函数, 则问题是: 其和函数 $S(x)$ 是否是 $[a, b]$ 上的可积函数? 又问: 如果 $S(x)$ 可积, 则其积分能否通过对级数逐项积分得到? 这也就是问下列等式是否成立:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

这时右边是一个数项级数.

按照教科书中的定理, 当上述级数在 $[a,b]$ 上一致收敛时, 以上两个问题的答案都是正面肯定的.

然而这也只是充分条件. 在《习题集》中举出了多个例子表明一致收敛条件不是必要的. 例如上一小节的习题 2802(c) 等.

在这方面, 相当一般的充分性条件是由下列著名定理给出的.

命题 5.8 (阿尔泽拉定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛, 其通项 $u_n(x)$ 和级数的和函数 $S(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 且级数的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界, 即存在 $M>0$, 使得对每个 n 和每个 $x\in[a,b]$, 同时满足 $|S_n(x)|\leqslant M$, 则成立

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 在 $u_n(x)$ 和 $S(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数时, 命题也称为奥斯古德定理. 在 [34] 的 §14.2.3 中收入了命题 5.8 的较为容易理解的证明 (还可参考 [15] 的第二卷的 §14.4).

(3) 设前述级数的通项均为区间 $X=(a,b)$ 上的可微函数, 则问题是: 其和函数 $S(x)$ 是否是 (a,b) 上的可微函数? 又问: 如果它可微, 则其导数能否通过对级数逐项求导得到? 这也就是问下列等式是否成立:

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big]\overset{?}{=}\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

按照教科书, 这里的一致收敛性条件是加在逐项求导得到的级数上的. 这就是说, 要求上式最右边的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

在 (a,b) 上一致收敛. 注意在条件满足之前, 我们并不知道这个级数收敛或一致收敛, 更不知道它的和函数是否等于 $S'(x)$. (参见 §5.4.4 的习题 2792, 2796 等.)

可以证明, 只要上述逐项求导得到的级数在 (a,b) 上一致收敛, 且又已知原来的级数在 (a,b) 的某一点处收敛, 就可以推出它在 (a,b) 上一致收敛. 初学者容易犯的一个错误是只去验证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛性, 而不知道这既非必要, 也不充分. 仅仅这一个条件满足并不能保证其和函数可微, 在可微时也不能保证可微与求和这两个极限运算的顺序可交换.

在《习题集》的 §5.4 中举出了这方面的例子, 如习题 2800, 2801 等.

与 (1) 和 (2) 类似, 这里对逐项求导级数的一致收敛性条件也是充分而非必要的. 例子见 [15] 的第二卷的 435 小节.

2. 黎曼引理及其应用

下面看几个例子. 它们可以说明很多问题. 在此之前先列出其中所用的一个重要工

具——黎曼引理. 由于在绝大多数教科书的傅里叶级数章节中都有它的证明, 这里只列为下列命题, 证明从略.

命题 5.9 (黎曼引理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积与绝对可积①, 则有

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0. \tag{5.8}$$

例题 1 研究函数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的可微性, 并求 $S(x)$.

解 从 §5.2.1 的习题 2696(a) 已知级数处处收敛, 因此和函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 又可见 $S(x)$ 是周期 2π 的周期函数.

为研究其可微性, 将级数逐项求导得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots.$$

可以证明这个级数处处发散. 为此只要证明对每个 x, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=0$ 不能成立.

对于 x 是 π 的整数倍的情况, 有 $|\cos nx|=1$. 对于其他 x, 可以用反证法. 若对某个不等于 π 的整数倍的点 x_0, 有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx_0=0,$$

则也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)x_0=0$. 于是就有

$$\begin{aligned}\sin x_0&=\sin[(n+1)x_0-nx_0]\\&=\sin(n+1)x_0\cos nx_0-\cos(n+1)x_0\sin nx_0\to 0\ \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

这与 $\sin x_0\neq 0$ 相矛盾 (参见 §5.1.1 的习题 2553).

然而逐项求导得到的级数处处发散并不表明原级数的和函数一定不可导.

实际上, 我们即将证明, 本题的函数 $S(x)$ 有非常简单的表达式, 从而可以直接看出它在 x 不等于 2π 的整数倍的所有点上的导数恒等于 $-\dfrac{1}{2}$.

由于 $S(x)$ 有周期 2π, 且有 $S(0)=S(2\pi)=0$, 因此只需在开区间 $(0,2\pi)$ 上求 $S(x)$.

这时先计算级数的部分和序列如下:

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\cos kt\,\mathrm{d}t=\int_0^x\Big(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

① 这在 [15] 中称之为傅里叶级数的第一引理. 对常义积分来说, $f(x)$ 可积即可推出 $|f(x)|$ 可积, 反之则未必, 而对广义积分来说, $|f(x)|$ 可积可推出 $f(x)$ 可积, 反之则未必. 由于命题中的积分可以是广义积分, 因此在条件中同时要求 $f(x)$ 可积和绝对可积. 此外, 当积分区间 $[a,b]$ 无界时命题也成立.

从公式 (5.8) 还可看出, 由于积分号下的被积函数当 $p\to\infty$ 时不存在极限, 因此这是极限不能与积分交换顺序的典型例子.

由于函数 $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ 在 $[0,x]$ 上的积分发散, 因此还不能对最后一式中的积分用黎曼引理.

利用 $S(\pi)=0$ 就有公式①

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

合并以上计算就得到

$$S_n(x)=\frac{\pi-x}{2}-\int_x^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

由于 $x\in(0,2\pi)$, 函数 $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ 在区间 $[x,\pi]$ 上常义可积, 因此只要对最后一个积分用黎曼引理, 就得到和函数的表达式为

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{\pi-x}{2}.$$

由此可见, 在 $(0,2\pi)$ 上 $S'(x)\equiv-\dfrac{1}{2}$, 而在 $x=0,2\pi$ 处 $S(x)$ 不连续, 当然不可导. □

下面我们将利用例题 1 中的和函数 $S(x)$ 的表达式以及函数项级数的逐项求积和逐项求极限的方法, 求出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和, 即数学史上的巴塞尔问题. (参见 §5.1.7 的习题 2655(a) 及其注).

例题 2 (巴塞尔问题) 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

解 取 $\varepsilon\in(0,\pi)$, 则在区间 $[\varepsilon,\pi]$ 上有

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

由于上式右边的函数项级数在 $[\varepsilon,\pi]$ 上一致收敛, 因此在将上式两边于此区间上积分时, 右边可以用逐项积分的方法来计算. 这样就有

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\varepsilon}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\cos nx\Big)\Big|_{\varepsilon}^{\pi}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to+0$, 因上式左边的积分是积分下限 ε 的连续函数, 从而得到

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4},$$

又因前式右边的级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\varepsilon$ 关于 ε (在任何范围上) 一致收敛, 因此 $\varepsilon\to0$ 的极限运算和级数求和可交换. 这样就得到

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

① 若作代换 $t=2x$ 就可以从 §4.2.6 的习题 2291 导出此公式.

记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之和为 S, 则利用

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2},$$

就有 $\frac{\pi^2}{4} = \frac{3S}{2}$, 从而得到 $S = \frac{\pi^2}{6}$. □

例题 3 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

证 从例题 1 中的公式

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

开始. 用洛必达法则或泰勒公式可知

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = O(x) \quad (x \to 0),$$

因此从黎曼引理即有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是就得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left(f(x) + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin(n+\frac{1}{2})x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

利用代换即有

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

由于已知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 收敛 (见 §4.4.2 的习题 2378), 因此就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \quad □$$

§5.5 幂级数 (习题 2812–2935)

内容简介 幂级数是两类最重要的函数项级数之一 (另一类是 §5.6 的傅里叶级数). 本节的习题有以下几个部分: 对给定的幂级数计算其收敛域, 将给定的函数于某点附近展开为幂级数, 此外还有幂级数的求和与幂级数在近似计算中的应用. 一些较为理论性的问题将在最后的补注小节中讨论.

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \tag{5.9}$$

其中的求和一般从 $n=0$ 开始, 点 a 称为该幂级数的中心 (点). 由此可见, 幂级数至少在中心点 $x=a$ 处收敛.

若对于幂级数的上述表达式作平移变换 $t=x-a$, 并再将 t 记为 x, 则就得到以原点为中心的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5.10}$$

为方便起见, 在无其他说明时, 经常采用中心为原点的 (5.10) 的形式.

容易看出, 如果从某个下标起的系数 a_n 全等于 0, 则幂级数就是多项式. 因此幂级数可以看成是多项式的直接推广. 这对于近似计算来说特别方便, 因此幂级数是计算数学中的最常用工具之一.

作为一类特殊的函数项级数, 幂级数的一大特点就是其收敛域具有特殊的形状.

按照收敛域, 幂级数可以分为三类: (1) 只在 $x=a$ 收敛的幂级数; (2) 处处收敛的幂级数; (3) 存在非零正数 R, 使得当 $|x-a|<R$ 时级数收敛, 而当 $|x-a|>R$ 时级数发散. 称这个数 R 为该幂级数的收敛半径. 将这个概念推广至前两类, 则称第 (1) 类幂级数为收敛半径 $R=0$ 的幂级数, 称第 (2) 类幂级数为收敛半径 $R=+\infty$ 的幂级数.

由上可见, 幂级数的收敛域是关于其中心 a 具有对称性的区间. 对第 (1) 类幂级数, 它是只含一个点 a 的退化区间; 对第 (2) 类幂级数, 收敛区间就是 $(-\infty,+\infty)$; 然而对 R 为正有限数的第三类幂级数来说, 在收敛区间的端点 $a-R$ 和 $a+R$ 处幂级数可以收敛, 也可以发散, 这里各种可能性都会出现. 对于以原点为中心的幂级数 (5.10) 来说, 以正有限数为收敛半径 R 的收敛域可以是以下 4 种区间中的任何一种:

$$[-R,R],\ (-R,R),\ (-R,R],\ [-R,R).$$

对于中心为 a 的一般幂级数 (5.9) 也是如此, 即当收敛区间的长度为正有限数时, 幂级数在其两个端点处的收敛或发散可以出现所有可能的组合.

因此对于"幂级数收敛区间关于中心为对称"的说法, 应当注意其中的对称性并不包含区间的两个端点①. 在下面的第一小节的习题中就会看到各种可能情况.

① 在不少教科书中当 R 为正有限数时, 将 $(a-R,a+R)$ 称为收敛区间. 在《习题集》的老版中也是如此, 然而这时说幂级数在其外发散就不对了. 在《习题集》的新版中则将 $|x-a|\leqslant R$ 称为收敛区间, 更不妥当. 因此本书将主要使用收敛域的概念, 当 $R\in(0,+\infty)$ 时, 它可以是 4 种收敛区间中的任意一种.

5.5.1 幂级数的收敛域计算 (习题 2812–2837)

这里的问题仍然是逐点收敛, 因此在 §5.1 和 §5.2 中的方法都有效. 然而对于幂级数来说, 存在直接计算其收敛半径的特殊方法. 这就是柯西–阿达马公式:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5.11}$$

其中约定, 当右边的上极限为 0 时取 $R=+\infty$, 而当右边的上极限为 $+\infty$ 时取 $R=0$.

于是在多数情况下可以直接用公式 (5.11) 计算出收敛半径 R, 然后对于 $R\in(0,+\infty)$ 的情况, 则还需要讨论幂级数在两个端点处是否收敛, 这也就是讨论两个数项级数的敛散性.

利用 §5.1.3 的习题 2593 (或 §1.2.7 的习题 141), 可见对于收敛半径的计算还可以有下列公式:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{5.12}$$

然而必须指出: 这个公式与 (5.11) 不同, 只有当右边的极限存在时它才有效. 特别对于幂级数有无穷多个系数为 0 的情况就不可能直接用这个公式. 由于数列的上极限总有意义, 因此公式 (5.11) 是普遍有效的. 当然对于具体问题来说, 公式 (5.12) 较便于计算的情况也是很多的.

习题 2812 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ 的收敛域.

解 1 根据柯西–阿达马公式 (5.11) 并计算出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$ (利用 §1.2.2 的习题 65), 就得到 $R=1$. 然后对于 $x=1$ 可见当 $p>1$ 时收敛, 否则发散; 而对于 $x=-1$ 则当 $p>0$ 时收敛, 否则发散.

这样就可知当 $p>1$ 时的收敛域为 $[-1,1]$, 当 $0<p\leqslant 1$ 时的收敛域为 $[-1,1)$, 而当 $p\leqslant 0$ 时的收敛域为 $(-1,1)$. □

解 2 利用公式 (5.12), 即有

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{n^p}=1,$$

其余同解 1. □

习题 2814 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域.

解 1 先用沃利斯公式 (见 §5.1.3 的命题 5.1 和公式 (5.2)) 于系数 a_n $(n=0,1,\cdots)$, 得到

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}\ \ (n\to\infty),$$

然后用柯西–阿达马公式 (5.11) 即可得到 $R=4$. 同时又可看出, 当 $x=\pm4$ 时的级数通项的绝对值发散于无穷大, 因此级数发散. 于是本题的幂级数的收敛域为 $(-4,4)$. □

解 2　用公式 (5.12) 即有

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4,$$

对于端点 $x=\pm 4$, 直接比较级数的后项与前项之比的绝对值, 就有

$$\left|\frac{4^{n+1}a_{n+1}}{4^n a_n}\right|=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}>1,$$

可见级数发散. □

习题 2816 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛域.

解　用柯西–阿达马公式 (5.11), 即有

$$R=\lim_{n\to\infty}a_n^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-1}.$$

对于端点 $x=\mathrm{e}^{-1}$, 级数的通项为 $\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n$. 利用 $\ln x$ 的泰勒公式就可以求出[①]

$$\begin{aligned}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n&=\exp\left\{n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\right\}\\&=\exp\left\{n\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\right]\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{1}{2}+o(1)\right\}\to\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

可见该级数发散. 同理在端点 $x=-\mathrm{e}^{-1}$ 处级数也发散. 因此收敛域为 $(-\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1})$. □

解 2　只对于端点 $\pm 1/\mathrm{e}$ 处的级数发散给出另一个解法.

对于端点只需要证明级数通项不趋于 0, 因此可以利用 §1.2.3 的习题 69, 即数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 严格单调递增趋于 e, 而数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 严格单调递减趋于 e, 从而对每个 n 有

$$\left|a_n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n>\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right]^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{\mathrm{e}},$$

可见级数发散. □

习题 2820 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ 的收敛域.

解　若 m 为非负整数, 则幂级数只有有限个非零项, 即为多项式, 因此收敛半径 $R=+\infty$. 以下只需讨论 m 不是非负整数的情况.

利用公式 (5.12) 即可求出收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1.$$

① 类似的函数极限问题见《习题集》 §2.9 的习题 1364. 它们都是极限计算中的 1^∞ 型的不定式问题.

为讨论在 $x=\pm1$ 处的敛散性, 利用 §5.1.4 的命题 5.3 及其注, 就可以得到二项式系数 a_n 的下列渐近等式:

$$a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=O^*\Big(\frac{1}{n^{m+1}}\Big)\ (n\to\infty).$$

当 $m>0$ 时, 从通项的上述渐近等式即可见当 $x=\pm1$ 时两个级数均为绝对收敛, 而当 $m<0$ 时则不可能绝对收敛.

又可看出当 $m\leqslant -1$ 时, 两个级数的通项均不趋于 0, 因此级数发散.

对于余下的情况, 即 $-1<m<0$, 从

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{m-n}{n+1}$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数, 且 $\{|a_n|\}$ 为严格单调递减趋于 0 的数列, 因此用莱布尼茨判别法知道它收敛, 且从渐近等式知道它为条件收敛, 而当 $x=-1$ 时级数发散.

小结 当 m 为非负整数时级数为多项式, 对于其他情况可列表如下:

	$m\leqslant -1$	$-1<m<0$	$m>0$
$x=1$	发散	条件收敛	绝对收敛
$x=-1$	发散	发散	绝对收敛
收敛域	$(-1,1)$	$(-1,1]$	$[-1,1]$

□

习题 2830 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域.

解 1 这是缺项幂级数, 即其中有无限多个系数等于 0, 因此不可能用公式 (5.12) 来计算收敛半径. 将此级数改写为幂级数的标准形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 则其中的通项系数为

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^k}, & n=k^2\geqslant 1,\\ 0, & n\neq k^2.\end{cases}$$

于是可以用柯西–阿达马公式 (5.11) 计算收敛半径如下:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{1}{2^k}\Big)^{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2}}=1.$$

又可直接看出在 $x=\pm1$ 处级数绝对收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$. □

解 2 将此级数看成为一般的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 则可用达朗贝尔比值判别法, 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1,\\ +\infty, & |x|>1.\end{cases}$$

可见当 $|x| \leqslant 1$ 时级数绝对收敛, 否则发散. □

解 3 按照解 2 的思路, 也可用柯西根值判别法, 于是有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2} = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

可见当 $|x| \leqslant 1$ 时级数绝对收敛, 否则发散. □

习题 2831 (a) (普林斯海姆级数) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ 的收敛域.

解 由于幂级数的系数 a_n 的绝对值为 $1/n$, 可见收敛半径为 $R = 1$, 且在端点 ± 1 处级数不可能绝对收敛. 对于 $x = 1$, 引用 §5.2.1 的习题 2672, 知道级数为条件收敛.

对于 $x = -1$, 可以将级数分拆如下 [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{n=1, n\neq k^2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n},$$

这时右边的第一个级数收敛, 问题是如何处理第二个级数.

现在来验证第二个级数为交错级数 (参考习题 2672 中按照符号的组合方法). 先观察处于 $n = k^2$ 之后到 $n = (k+1)^2$ 之前的这一组中的各项的符号. 它们的 n 如下:

$$k^2+1, k^2+2, \cdots, (k+1)^2-1.$$

由这样的 n 决定的 $(-1)^{[\sqrt{n}]} = (-1)^k$ 对所有这些项来说是相同的, 然而再乘上 $(-1)^n$ 之后就变成交错项了. 再考虑这一组的最后的 $n = (k+1)^2 - 1$ 与下一组的第一项 $n = (k+1)^2 + 1$. 由于它们的奇偶性相同, 因此对应项的符号分别由 $(-1)^k$ 和 $(-1)^{k+1}$ 确定, 于是它们的符号也是交错的. 这样就可见上述第二个级数为交错级数.

再考虑到去掉了 $n = k^2$ 的项之后, 第二个级数的通项的绝对值仍然严格单调递减趋于 0, 因此从莱布尼茨判别法知道它收敛.

合并以上就知道 $x = -1$ 时级数也收敛. 于是收敛域为 $[-1, 1]$. □

习题 2832 (超几何级数) 求幂级数

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n + \cdots$$

的收敛域.

解 为使得级数通项有意义, γ 不能为 0 或负整数. 又若 α, β 取 0 或负整数, 则级数只有有限个非零项, 因此不必再讨论. 以下设 α, β, γ 均不为 0 和负整数.

利用公式 (5.12) 即可求出收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right| = 1.$$

为讨论幂级数在 $x=\pm1$ 处的敛散性, 将通项系数 a_n 的分子分母同除以 $n!$, 然后三次使用 §5.1.4 的命题 5.3 及其公式 (5.4), 就得到系数 a_n 的下列渐近等式:

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}=O^*\Big(\frac{1}{n^{1+\gamma-\alpha-\beta}}\Big).$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时, 从通项的上述渐近等式可见当 $x=\pm1$ 时两个级数均为绝对收敛, 而当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$ 时则不可能绝对收敛.

又可由此看出当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant-1$ 时, 两个级数的通项均不趋于 0, 因此级数发散.

对于余下的情况, 即 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$, 从

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

可见当 n 充分大时 $\{a_n\}$ 是严格单调递减趋于 0 的正项数列. 由于 $x=1$ 时的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 n 充分大时为正项级数, 而 $x=-1$ 时的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 当 n 充分大时为交错级数, 因此前者发散, 后者为条件收敛.

小结 对于 α,β,γ 均不等于 0 和负整数的情况可列表如下:

	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant-1$	$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$	$\gamma-\alpha-\beta>0$
$x=1$	发散	发散	绝对收敛
$x=-1$	发散	条件收敛	绝对收敛
收敛域	$(-1,1)$	$[-1,1)$	$[-1,1]$

□

注 在方法上本题与习题 2820 相同. 由于超几何级数的重要性, 我们还是详细写出解法. 此外, 若在本题中取 $\beta=\gamma$, $\alpha=-m$, 又作代换 $x=-t$, 并将 t 再记为 x, 则就得到习题 2820 中的幂级数. 因此该级数 (即二项式级数) 是超几何级数的一个特例.

下面的习题 2833–2837 是广义幂级数的收敛域的计算. 所谓广义幂级数, 即是用变量代换可以变为幂级数的级数. 从略.

5.5.2 将函数展开为幂级数 I (习题 2838–2868)

为学习方便起见, 将函数展开为幂级数的习题分为两小节. 在这一小节中的基本方法与 §2.10.1 中的泰勒公式计算类似, 而将主要涉及逐项积分和逐项求导方法的习题放到下一小节中.

这里主要有两种方法: 直接法和间接法.

为用直接法将给定的函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 附近展开为幂级数 (即泰勒级数):

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots,\quad(5.13)$$

一般需要先计算出 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的所有阶导数, 这样就可以写出 (5.13) 的级数; 其次需要求出该级数的收敛域; 最后还需要求出该级数的和函数与 $f(x)$ 相等的范围. 例如, 在教科书中关于 $\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x$ 等几个基本的泰勒级数展开式就都是如此证明的.

然而由于在余项估计中需要函数 $f(x)$ 的所有阶的导函数的表达式, 而这一般很难得到, 因此直接法往往不容易施行. 这方面可以参看补注小节 §5.5.6 的说明和其中的习题.

间接法是从几个最基本的泰勒级数出发, 通过各种运算得到所要求的泰勒级数. 本小节的多数习题都可以用间接法求解.

为了使用间接法, 自然需要有几个最为基本的泰勒级数. 现将它们列表如下.

$$
\begin{aligned}
&\text{I. } \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),\\
&\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),\\
&\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),\\
&\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots\\
&\qquad + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^n}{n!} + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1),\\
&\text{VI. } \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),\\
&\text{VII. } \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + \cdots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

注 公式 VI 和 VII 的推导见 §5.5.3 的习题 2869 和 2870. 公式 IV 即二项式函数 $(1+x)^m$ 的泰勒级数, 其中含有参数 m, 下面是几个最常用的情况:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),\\
&\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1).
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

习题 2838 按二项式 $x+1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = x^3$.

解 1 (初等代数方法) 将 x 写成为 $(x+1)-1$ 代入就可得到

$$x^3 = [(x+1)-1]^3 = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \quad \square$$

解 2 (直接法) 为求 $f(x) = x^3$ 在点 $x=-1$ 处的幂级数展开式, 先求 $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 3$, $f''(-1) = -6$, $f'''(-1) = 6$, 且有 $f^{(n)}(-1) = 0$ $(n = 4, 5, \cdots)$, 于是就得到

$$
\begin{aligned}
x^3 &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3\\
&= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \quad \square
\end{aligned}
$$

习题 2839 把函数 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ 按以下方式展开为幂级数: (1) 依 x 的幂展开; (2) 依二项式 $x-b$ 的幂展开, 此处 $b\neq a$; (3) 依 $\dfrac{1}{x}$ 的幂展开. 求出相应的收敛域.

提示 (1) 将函数写为

$$f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{a}};$$

(2) 将函数写为

$$f(x)=\frac{1}{(a-b)-(x-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}};$$

(3) 将函数写为

$$f(x)=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a}{x}}.\quad\square$$

将函数展开为幂级数的许多习题涉及两个或更多个幂级数 (参见最后一个小节 §5.5.6 的习题 2897) 的运算. 这里先就两个幂级数的求和与求乘积说起.

为简明起见假设它们都以原点为中心且有正收敛半径 R_1 和 R_2, 则只要取 $R=\min\{R_1,R_2\}$, 就可以在区间 $(-R,R)$ 内按照逐项相加方式求两个幂级数之和, 此外又可以求它们的乘积 (见 §5.3 关于级数乘积的定义), 这时两个幂级数在 $x\in(-R,R)$ 时均为绝对收敛的事实起重要作用.

作为级数乘积的特例, 对于收敛半径为 R 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 它的平方, 以及指数 $k\geqslant 2$ 的幂, 也都有意义, 其结果都是在 $|x|<R$ 内绝对收敛的幂级数.

在下面的习题 2845, 2846 中将遇到较为复杂的问题. 我们只讨论其中的第一个习题, 先作分析, 然后补充将级数代入级数的一个命题, 最后给出其解答.

习题 2845 写出函数 $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$ 按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 并求出其收敛域.

分析 若计算出函数 $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$ 在点 $x=0$ 处的所有阶导数值, 则就可以写出泰勒级数. 然而为了确定在收敛域上的级数和是否等于 $f(x)$, 则还需要求出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的一个邻域上的所有阶的导函数, 否则就无法估计泰勒公式的余项 (参见 §5.5.6), 而这项计算一般来说不容易.

从基本初等函数生成初等函数的运算来看, 除了四则运算之外, 还有复合运算. 若记 $y=y(x)=\arcsin x$, 则本题的 $f(x)$ 即可写为 $f(x)=\sin(\mu y(x))$, 于是就可在

$$f(x)=\mu y-\frac{1}{3!}\mu^3y^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\mu^{2n-1}y^{2n-1}+\cdots$$

中用 $y=\arcsin x$ 代入得到

$$f(x)=\mu\arcsin x-\frac{1}{3!}\mu^3(\arcsin x)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\mu^{2n-1}(\arcsin x)^{2n-1}+\cdots.\quad(5.16)$$

如前所说, 其中每一个 $(\arcsin x)^k$ $(k=1,3,\cdots)$ 都是幂级数, 然后将它们相加即可得到 $f(x)$ 的幂级数展开式. 我们将这样的运算称为级数代入级数. 这是用间接法求幂级数展开式中的一种重要方法. 然而它的合理性何在? 所得的展开式的收敛半径是多少? 这些都是需要回答的问题. □

这方面的材料可参见 [15] 的第二卷的 446 小节. 下面将其中的主要结果列为一个命题和它的推论, 然后给出习题 2845 的解.

命题 5.10 设函数 $\varphi(y)$ 在区间 $(-\rho,\rho)$ 上可展开为幂级数

$$\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty} h_m y^m, \tag{5.17}$$

同时函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 上可展开为幂级数

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{5.18}$$

且 $|a_0|=|f(0)|<\rho$, 那么对于足够小的 x, $|f(x)|<\rho$, 因此有复合函数 $\varphi(f(x))$, 且可在点 $x=0$ 的附近展开为幂级数①.

推论 若在命题 5.10 中的 $\rho=+\infty$, 则关于 $|a_0|$ 的条件是多余的, 而且此时的复合函数 $\varphi(f(x))$ 的幂级数展开式在 $(-R,R)$ 上成立.

习题 2845 的解 按照上述推论, 由于 $\sin y$ 的幂级数展开式的收敛半径为 $+\infty$, 因此复合函数 $\sin(\mu\arcsin x)$ 的幂级数展开式的收敛半径与 $\arcsin x$ 的幂级数展开式的收敛半径相同 (见本小节的表格 (5.14) 之 VII), 即等于 1.

余下的只有两个问题: (1) 写出该幂级数, (2) 讨论在端点 $x=\pm1$ 处是否收敛.

为了写出这个幂级数, 只需要求出 $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$ 在点 $x=0$ 处的所有阶导数. (这就是《习题集》的 §2.5 的习题 1221(b), 由于《学习指引》的第一册没有给出此题的解, 下面将简述其主要计算过程, 从方法上看与 §2.5.5 的习题 1220(b) 相同.)

对 $f(x)$ 求导, 乘以 $\sqrt{1-x^2}$ 后再求导得到 $f''(x)(1-x^2)-xf'(x)+\mu^2 f(x)=0$. 然后用莱布尼茨公式求该表达式的 n 阶导数, 最后再令 $x=0$ 代入, 即得到在 $x=0$ 处的导数的递推公式:

$$f^{(n+2)}(0)=(n^2-\mu^2)f^{(n)}(0).$$

由于 $f(0)=0$, $f'(0)=\mu$, 就知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 的所有偶数阶导数为 0 (这从 $f(x)$ 为奇函数即可知道), 而奇数阶的导数为

$$f^{(2n-1)}(0)=\mu(1-\mu^2)\cdots[(2n-3)^2-\mu^2]\ \ (n=1,2,\cdots).$$

于是就可写出所要求的幂级数展开式:

$$\sin(\mu\arcsin x)=\mu x+\frac{\mu(1-\mu^2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{\mu(1-\mu^2)\cdots[(2n-3)^2-\mu^2]}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots,$$

① 该幂级数的计算方法是: 将幂级数 (5.18) 代入 (5.17) 中的 y, 并求出所有 $[f(x)]^m$ $(m=1,2,\cdots)$ 的幂级数形式, 然后再归并同幂次项.

且已知其收敛半径为 $R=1$[①].

最后只需要讨论在端点 $x=\pm1$ 处的展开式是否成立. 将 $x=1$ 代入上述级数, 并将所得数项级数的通项记为 a_n, 则可见当 n 充分大时 $a_n>0$. 然后就有

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{(2n)(2n+1)}{(2n-1)^2-\mu^2}-1\Big)=\frac{3}{2}>1,$$

用拉比判别法可见收敛. 于是在端点 $x=\pm1$ 处两个级数都是绝对收敛的.

由于函数 $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 的两个端点处均单侧连续, 根据阿贝尔第二定理[②]就知道, 该函数的幂级数展开式在这两个端点处也成立.

于是本题的幂级数展开式的收敛域为 $[-1,1]$. □

习题 2847 写出函数 $f(x)=x^x$ 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

解 (对该函数 $f(x)$ 的分析及其图像见 §2.12.2 的习题 1526) 若用直接法, 则难以看出展开式成立的范围, 因此下面还是用级数代入级数的间接法做.

$$\begin{aligned}f(x)&=\exp[x\ln x]=\exp\{[1+(x-1)]\ln[1+(x-1)]\}\\&=\exp\{(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3+O((x-1)^4)\}\\&=1+[(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3]+\frac{1}{2}[(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2]^2\\&\qquad+\frac{1}{6}(x-1)^3+O((x-1)^4)\\&=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+O((x-1)^4)\ \ (x\to1),\end{aligned}$$

根据命题 5.10 及其推论, 知道 $f(x)$ 的幂级数展开式在 $0<x<2$ 上成立. □

习题 2848 写出函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ \mathrm{e}, & x=0\end{cases}$ 按变量 x 的非负整数次幂展开式的前三项.

解 (概要) (该函数在 $x\neq0$ 时的图像见 §1.4.7) 仍然用级数代入级数的计算方法, 答案为

$$f(x)=\mathrm{e}\Big(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+O(x^4)\Big)\ \ (x\to0),$$

且知道此展开式在 $(-1,1)$ 上成立. 对于此展开式的通项系数的一般表达式见数学译林, 第 26 卷 (2007), 第 3 期, 227–229 页. □

① 容易直接证明上述幂级数的收敛半径为 1, 然而不能由此推出幂级数在 $(-1,1)$ 上的和函数就是原先给定的 $\sin(\mu\arcsin x)$. 正文中的结论是由命题 5.10 的推论导出的.

② 为读者方便, 这里简述阿贝尔第二定理的内容及其推论. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 R 为正有限数, 则当该幂级数于端点 $x=R$ 处收敛时, 即在 $[0,R]$ 上一致收敛. 因此若记幂级数的和函数为 $S(x)$, 则就可推出该函数于点 R 处左连续, 即 $\lim\limits_{x\to R-0}S(x)=S(R)$. 关于左端点 $x=-R$ 有类似的结论.

习题 2860 写出函数 $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 关于 x 的幂级数展开式.

解 1 由 f 的表达式可见其幂级数展开式成立的范围只能在 $(-1,1)$ 内. 利用在 $(-1,1)$ 上成立的下列两个幂级数展开式:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_n=1\ \ (n=0,1,\cdots);$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ b_{2k}=1,b_{2k+1}=0\ \ (k=0,1,\cdots);$$

将它们在 $(-1,1)$ 上相乘, 并再乘以 x, 得到 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}$, 其中系数

$$c_{2k}=b_0+b_1+\cdots+b_{2k}=k+1=\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{2},$$

$$c_{2k-1}=b_0+b_1+\cdots+b_{2k-1}=k=\frac{(2k-1)+1}{2},\ \ k=0,1,\cdots,$$

于是有

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}\Big)x^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n}{2}+\frac{1-(-1)^n}{4}\Big)x^n\ \ (-1<x<1).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (概要) 利用部分分式分解 (见 §3.2.1) 得到

$$f(x)=-\frac{1}{4(1-x)}-\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)^2},$$

用二项式函数的泰勒级数展开式将右边的三项分别展开, 然后求和. □

习题 2862(a) 写出函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ 关于 x 的幂级数展开式.

解 (概要) 将所给的函数写为

$$f(x)=(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3}=(1-x)\cdot(1+x^3+\cdots)$$

即可得到, 且可确定展开式成立于 $(-1,1)$ 上. □

习题 2863 写出函数 $f(x)=\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ 关于 x 的幂级数展开式.

解 在复数域中可将 $f(x)$ 的表达式中的分母因式分解为 $(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$ (参见 §4.1.1 的习题 2192 中对于分母 $1-2x\cos\alpha+x^2$ 的几何分析), 然后即可计算如下:

$$\begin{aligned}f(x)&=-\frac{x}{2}\Big(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}+\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\Big)=\frac{x}{2}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\Big)\\&=\frac{x}{2}\Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})^n+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n\Big)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(n+1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(n+1)}}{2}\Big)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha.\end{aligned}$$

根据 $|xe^{\pm i\alpha}|=|x|<1$ 的要求, 又利用 $\cos n\alpha$ 当 $n\to\infty$ 时不趋于 0 (参见 §5.4.5 的例题 1 中的证明), 可知收敛域为 $(-1,1)$. □

习题 2864 写出函数 $f(x)=\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ 关于 x 的幂级数展开式.

解 (概要) 类似于上题即可得到 $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha\ \ (|x|<1)$. □

5.5.3 将函数展开为幂级数 II (习题 2869–2896, 2901–2905)

如上一小节开始所说, 在这一小节中的许多习题可以用逐项求导或逐项积分方法求幂级数展开式, 但这并非绝对. 对许多题往往还有其他方法可用, 特别是其中也有一些题可以很简单地求解. 此外, 这里除了幂级数相乘的习题之外还出现幂级数相除的习题, 对于其合理性需要讨论.

下面是逐项积分法的两个典型例子: 求反正切函数和反正弦函数的幂级数展开式.

习题 2869 先展开函数 $f(x)=\arctan x$ 的导函数, 然后用逐项积分的方法求其幂级数展开式. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

解 先写出

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots,$$

且注意这个展开式的有效范围为开区间 $(-1,1)$, 它也是右边的幂级数的收敛域.

根据幂级数的性质, 当 $x\in(-1,1)$ 时可逐项积分得到

$$\begin{aligned}f(x)=\arctan x&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\right)\mathrm{d}t\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\quad(-1<x<1).\end{aligned}$$

由于此幂级数于 $x=\pm1$ 处为莱布尼茨型级数, 因此用阿贝尔第二定理和 $f(x)=\arctan x$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性, 可见反正切函数的上述幂级数展开式在 $[-1,1]$ 上成立. 特别当 $x=1$ 时就求得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ (参见 §4.2.6 的习题 2283 与 §5.6.1 的习题 2938). □

习题 2870 先展开函数 $f(x)=\arcsin x$ 的导函数, 然后用逐项积分的方法求其幂级数展开式.

解 用指数为 $-\dfrac{1}{2}$ 的二项式级数 (见表格 (5.15)), 将其中的 x 换为 $-x^2$, 就可得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots\quad(-1<x<1).$$

由沃利斯公式可见在端点 $x=\pm1$ 处通项 $\sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, 因此两个级数均发散.

在 $x\in(-1,1)$ 时于 $[0,x]$ 上逐项积分, 就得到

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots \quad (-1<x<1).$$

由于在端点 $x=\pm1$ 处级数的通项为 $O^*\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, 因此均收敛. 利用阿贝尔第二定理和 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 就知道反正弦函数的上述幂级数展开式在 $[-1,1]$ 上成立. □

注 利用数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 和柯西–阿达马公式, 就知道幂级数在逐项求积和逐项求导时的收敛半径不变. 然而对于端点来说, 其收敛情况可能有变化. 上述两个习题都是如此. 由阿贝尔第二定理知道, 这时的逐项积分和逐项微分的结论可总结如下(其中只写出右端点):

命题 5.11 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为正有限数 R.

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛, 则逐项积分公式

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-R,R),$$

在 $x=R$ 时仍然成立;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nR^{n-1}$ 收敛, 则逐项求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ x\in(-R,R),$$

在 $x=R$ 时仍然成立.

习题 2872 先展开函数 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$ 的导函数, 然后用逐项积分的方法求其幂级数展开式.

提示 利用 §5.5.2 的习题 2863 的展开式逐项积分即可, 只是要根据参数 α 的不同情况讨论最后的展开式的端点情况. □

习题 2873 利用各种方法, 求下列函数的幂级数展开式:

(a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

(b) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x$;

(c) $f(x)=\arctan\dfrac{2-2x}{1+4x}$;

(d) $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}$;

(e) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

(f) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$;

(g) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

(h) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

提示 除了其他方法之外, 这里的每个小题都可以考虑用逐项积分方法. □

习题 2874(a) 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$$

的唯一性, 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 的 n 阶导函数.

解 写出

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(x+h)^2}-\mathrm{e}^{x^2}&=\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{2xh+h^2}-1)\\&=\mathrm{e}^{x^2}\Big[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\Big],\end{aligned}$$

收集右边的 h^n 项的系数为

$$\mathrm{e}^{x^2}\Big[\frac{(2x)^n}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{C}_{n-1}^1(2x)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}\mathrm{C}_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\Big],$$

然后乘以 $n!$ 就得到

$$(\mathrm{e}^{x^2})^{(n)}=\mathrm{e}^{x^2}\Big[(2x)^n+n(n-1)(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big],$$

其中方括号内各项的 $(2x)$ 的指数相继减 2 直到降至 1 或 0①. □

注 1 本题介绍了通过泰勒级数求函数的高阶导函数的一种方法. 就具体的答案而言, 则与 §2.5.5 的习题 1229 有关, 即复合函数 $f(\varphi(x))$ 的 n 阶导函数是 $f^{(k)}(\varphi(x))$ $(k=1,\cdots,n)$ 的线性组合, 其组合系数只与 $\varphi(x)$ 有关. 本题的 $\varphi(x)=x^2$, 这就解释了本题的上述答案与《习题集》§2.5 中的习题 1230, 1231 的答案的相似的来历.

注 2 按照相同的方法, 《习题集》的习题 2874(c) 要求 $f(x)=\arctan x$ 的高阶导函数. 其答案与 §2.5.5 的习题 1218 不同, 后者的封闭形式对于某些应用 (例如泰勒公式的余项估计) 可能更为方便.

习题 2880 若我们定义

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

证明:

$$\text{(a)}\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;\qquad \text{(b)}\ \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

注 虽然本题只是级数乘积的练习题, 但实际上可以从本题的幂级数定义证明得到三角函数的所有其他熟悉的性质 (例如周期性) 和公式. 关于三角函数的各种定义方法以及它们之间的联系, 可以参看专著 [26] 的第六章: 三角函数的解析理论. □

习题 2881 写出函数 $f(x)=\Big[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x^n}{n+1}\Big)\Big]^{-1}$ 的幂级数展开式中的若干项.

分析 本题涉及对幂级数取倒数. 这在用间接法求幂级数展开式中是常见的运算之一. 为此先以命题的形式介绍这方面的一个基本结果, 然后再给出本题的解.

① 例如 $(\mathrm{e}^{x^2})'=2x\mathrm{e}^{x^2}$, $(\mathrm{e}^{x^2})''=(4x^2+2)\mathrm{e}^{x^2}$.

命题 5.12 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 邻近可以展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 且 $a_0 \neq 0$, 则其倒函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 也可以在 $x=0$ 邻近展开为幂级数.

证 (概要) 本命题的一种证法是用强级数, 见 [34] 的命题 14.4.4, 这里将用级数代入级数的命题 5.10 给出证明.

为此不妨设 $a_0=1$, 且定义 $g(x)=-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 于是可将倒函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 看成为 $\varphi(y)=\dfrac{1}{1-y}$ 和 $y=g(x)$ 的复合. 这时 $\varphi(y)$ 在 $(-1,1)$ 上可展开为幂级数 $\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty} y^m$, 而又从 $g(x)$ 的定义可知存在 $R>0$, 使得 $g(x)$ 在 $(-R,R)$ 上可展开为幂级数. 由于 $g(0)=0$, 因此 §5.5.2 的命题 5.10 中的条件全部满足, 从而所要的结论成立. □

习题 2881 的解 按照级数代入级数的计算方法有

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{1+\Big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^3}{4}+O(x^4)\Big)}\\ &= 1-\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}\Big)+\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\Big)^2-\Big(\frac{x}{2}\Big)^3+O(x^4)\\ &= 1-\frac{x}{2}+\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)x^2+\Big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\Big)x^3+O(x^4)\\ &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}+O(x^4).\quad \square\end{aligned}$$

习题 2890 应用幂级数运算, 求函数 $f(x)=\Big(\dfrac{\arcsin x}{x}\Big)^2$ 的幂级数展开式.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处用极限值 1 来定义. 从表达式可见只要求出 $g(x)=(\arcsin x)^2$ 的幂级数展开式后除以 x^2 即可.

由于 $\arcsin x$ 的幂级数的收敛半径为 1, 因此在 $x\in(-1,1)$ 时的级数为绝对收敛, 从而用级数相乘就可肯定 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可展开为幂级数. 以下是具体的计算.

然而并不必通过级数自乘来求这样的展开式. 计算 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的所有阶导数的方法可能更容易一些. (与 §5.5.2 的习题 2845 中的解法类似.)

将 $g(x)$ 对 x 求导得到 $g'(x)=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 将该式两边平方并改写为

$$(1-x^2)[g'(x)]^2=4g(x).$$

将此式再对 x 求导, 并约去 $2g'(x)$ 后得到

$$(1-x^2)g''(x)-xg'(x)=2.$$

用莱布尼茨公式求上式的 $n\ (\geqslant 1)$ 阶导数, 然后令 $x=0$ 代入, 这样就得到了 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的高阶导数的递推公式:

$$g^{(n+2)}(0)=n^2g^{(n)}(0)\ \ (n\geqslant 1).$$

于是从 $g'(0)=0$ 得到 $g^{(2n-1)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$, 又从 $g''(0)=2$ 得到 $g^{(2n)}(0)=2[(2k-2)!!]^2$. 这样就可写出 $g(x)$ 的幂级数展开式

$$(\arcsin x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(2n-2)!!]^2}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

除以 x^2 就得到

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}.$$

用收敛性判别法可知这个展开式在 $[-1,1]$ 上成立. □

习题 2891 将函数 $f(x) = \tan x$ 按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式 (异于零) 的前三项.

提示 本题用 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 和幂级数除法即可求解. 其结果与 §2.10.1 的习题 1386 相同. 在那里还给出了多种计算方法供参考. □

注 以下对函数 $f(x) = \tan x$ 的泰勒级数展开式作一些介绍. 在 §2.10.1 的习题 1382 已经见到了伯努利数的生成函数 (或称母函数)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

它在点 $x = 0$ 的幂级数展开就是定义伯努利数的展开式 (参考 [34] 的 §7.2.3):

$$f(x) = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}x^n + \cdots,$$

其中 $B_0 = 1$, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{6}$, $B_4 = -\dfrac{1}{30}, \cdots$. 当 n 为大于 1 的奇数时 $B_n = 0$. 以下记 $\overline{B}_n = (-1)^{n-1}B_{2n}$, 则它们都是正数, 其中前几个为

$$\overline{B_1} = \frac{1}{6}, \overline{B_2} = \frac{1}{30}, \overline{B_3} = \frac{1}{42}, \overline{B_4} = \frac{1}{30}, \overline{B_5} = \frac{5}{66}, \overline{B_6} = \frac{691}{2730}, \overline{B_7} = \frac{7}{6}.$$

可以证明 $\tan x$ 的泰勒级数展开式为 (参见 [34] 的例题 14.4.2):

$$\begin{aligned} \tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{B}_n(2^{2n}-1)2^{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2\,835}x^9 + O(x^{11}) \ \ (x \to 0), \end{aligned}$$

其收敛域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$[①]. □

习题 2892 将函数 $f(x) = \tanh x$ 按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式 (异于零) 的前三项.

解 本题从 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ 和幂级数除法即可解决. 下面采用另一种方法.

先导出双曲正切函数的幂级数展开与正切函数的幂级数展开之间的一个关系 (见 [5] 的第十一章). 利用 §3.1.8 中的公式 (3.9), 即 $\sinh x = \mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}x)$ 和 $\cosh x = \cos(-\mathrm{i}x) = \cos(\mathrm{i}x)$, 并假设正切函数的幂级数展开式为

---

① 为此需要知道伯努利数的渐近公式 $\overline{B}_n \sim \dfrac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$, 请参考 [34] 的例题 16.2.3 和公式 (16.13).

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1},$$

则就有

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}x)}{\cos(-\mathrm{i}x)} = \mathrm{i}\tan(-\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\mathrm{i}x)^{2n-1}$$

$$= \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{2n-1}\cdot \mathrm{i}^{2n-1}\cdot x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n x^{2n-1}.$$

于是可从习题 1386 的答案或者上一个习题 2891 的注写出本题要求的答案:

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)\ \ (x \to 0),$$

而且知道 $\tanh x$ 和 $\tan x$ 的两个幂级数展开式有相同的收敛域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. □

习题 2893 将函数 $f(x) = \cot x - \dfrac{1}{x}$ 按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数, 写出展开式 (异于零) 的前三项.

提示 在 $x = 0$ 处作连续延拓得到 $f(0) = 0$, 以下也可用幂级数除法求解. 这里只指出本题的幂级数展开式也需要伯努利数来表示 (见 [34] 的例题 14.4.2):

$$\cot x - \frac{1}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{B}_n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4\,725}x^7 + O(x^9)\ \ (x \to 0).$$ □

习题 2894 (欧拉数) 设 $\sec x$ 的展开式写为以下形式

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n},$$

求出关于系数 E_n 的递推公式.

解 将上述幂级数和 $\cos x$ 的幂级数代入 $\sec x\cos x = 1$ 中即可得到 $E_0 = 1$ 和

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k}(-1)^k E_k = E_n - \mathrm{C}_{2n}^{2}E_{n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{4}E_{n-2} + \cdots + (-1)^n E_0 = 0\ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

于是可递推得到前几个欧拉数为

$$E_1 = 1, E_2 = 5, E_3 = 61, E_4 = 1\,385, E_5 = 50\,521, \cdots.$$

且可写出正割函数的幂级数展开式为 (见 [34] 的 §7.2.3 和 §14.4.3):

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \frac{50\,521}{3\,628\,800}x^{10} + O(x^{12})\ \ (x \to 0).$$ □

习题 2895 (勒让德多项式的生成函数) 把函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + x^2}}\ \ (|x| < 1)$$

展开成幂级数.

解　利用 $m=-\frac{1}{2}$ 的二项式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的幂级数展开式 (见 §5.5.2 的表格 (5.15)), 就有

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}y^n+\cdots\quad(|y|<1),$$

然后用 $y=2tx-x^2$ 代入, 可见当 $|x|^2+2|tx|<1$ 时即可用级数代入级数的方法得到关于 x 的幂级数展开式, 其中 t 为参数.

这样就可先写出

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{1-(2tx-x^2)}}\\&=1+\frac{1}{2}(2tx-x^2)+\frac{3}{8}(2tx-x^2)^2+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2tx-x^2)^n+\cdots,\end{aligned}$$

然后收集右边的 x^n 项的系数. 这时在上式右边能够生成 x^n 的项为

$$\frac{(2n-2k)!}{2^{2(n-k)}[(n-k)!]^2}(2tx-x^2)^{n-k}\ \ (k=0,1,\cdots,m),$$

其中 m 取 $n/2$ 或 $(n-1)/2$ 中的整数. 由二项式展开可见上式中的 x^n 项的系数为

$$\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n2^{n-2k}[(n-k)!]^2}\mathrm{C}_{n-k}^k(2t)^{n-2k}=\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n(n-k)!\,k!\,(n-2k)!}t^{n-2k}\ \ (k=0,1,\cdots,m),$$

从而可得到

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n,$$

其中的通项系数 $P_n(t)$ 为如下表示的 n 次多项式:

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!\,k!\,(n-2k)!}t^{n-2k},$$

其中 m 取 $n/2$ 和 $(n-1)/2$ 中的整数.

最后我们来证明这样得到的 $P_n(t)$ 就是在 §4.2.6 的习题 2300 (又见《习题集》的 §2.5 中的习题 1227) 中已见过的勒让德多项式. 为此只要先计算

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\,t^{2n-2k}\right]=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}t^{n-2k},$$

然后再除以 $2^nn!$ 就得到上面的 $P_n(t)$. 于是就有

$$P_n(t)=\frac{1}{2^nn!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(t^2-1)^n]\ \ (n=0,1,2,\cdots),$$

因此本题的 $f(x)$ 称为勒让德多项式的生成函数 (或母函数). □

习题 2901–2905 是用逐项积分方法求函数 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的幂级数展开式.

习题 2903 将函数 $\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 展开成幂级数.

解　这就是在 §4.11 的习题 2545 中出现的正弦积分函数 $\mathrm{Si}(x)$, 它是常见的非初等函数之一 (参见该题的附图). 然而用逐项积分方法求它的幂级数展开式则毫无困难:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)},$$

且知道此展开式在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立. □

习题 2905 将函数 $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}$ 展开成幂级数 (写出四项).

解 用幂级数除法即可将被积函数展开如下:

$$\begin{aligned}\frac{t}{\ln(1+t)} &= \frac{t}{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + O(t^5)} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{t^3}{4} + O(t^4)\right)} \\ &= 1 + \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4}\right) + \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^3 + O(t^4) \\ &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} + O(t^4)\ \ (t \to 0).\end{aligned}$$

然后逐项积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24}\right)\mathrm{d}t + O(t^5) \\ &= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5)\ \ (x \to 0).\end{aligned}$$

根据命题 5.12 可以知道最后得到的幂级数展开式在 $x = 0$ 的某个邻域上成立. □

5.5.4 幂级数的若干应用 (习题 2906–2920)

这里包括以下三方面的内容: (1) 级数求和, (2) 微分方程, (3) 复数域上的幂级数. 对于其中的 (2) 和 (3) 只给出一些说明, 不再举例.

(2) 是用逐项求导方法验证给定的幂级数满足某个微分方程 (习题 2914–2915).

(3) 是将柯西–阿达马公式 (5.11) 和 (5.12) 用于复数域中的幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^2$, 其中 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots), z, a$ 均为复数, 求出其收敛半径 R 和收敛圆 $|z-a| < R$ (习题 2916–2920). 这里只指出, 若收敛半径 R 为正有限数, 则其和函数在收敛圆的边界 $|z-a| = R$ 上必定有奇点①. 知道这一点对于理解在实数域中的幂级数展开也是有帮助的. 例如看以下展开式:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

左边的函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在点 ± 1 处都有很好的性质, 为什么收敛半径却是 1? 将 x 换为复变量 z, 则就知道函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $\pm\mathrm{i}$ 处有奇点, 因此其收敛圆的半径只能等于 1.

① 公式 (5.11) 和 (5.12) 的推广, 收敛圆的概念及其特征, 包括奇点的定义等等都将在数学分析的后继课程——复变函数论——中学习, 这里就不多说了.

下面是用逐项求导和逐项求积方法求某些级数之和. 由于求级数和将在下面的 §5.7 中专门学习, 因此这里只是较为初步的训练.

习题 2906 用逐项微分法计算级数 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$ 的和.

解 通过观察, 可见逐项求导后的级数是容易求和的几何级数, 于是可求解如下.

首先确定该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$, 这就是其和函数 $S(x)$ 的定义域. 然后就可在 $(-1,1)$ 内对幂级数逐项求导得到

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}\ \ (-1<x<1).$$

又利用 $S(0)=0$, 就可通过求积得到

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\bigg|_0^x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.\quad\square$$

对幂级数的逐项求导可多次进行, 此外在逐项求导后也可能得到微分方程 (参见 §4.10). 下面就是这样的一个例子.

习题 2908 用逐项微分法计算级数 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ 的和.

解 1 首先确定级数的收敛半径为 $+\infty$, 于是其和函数 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 逐项求导得到

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

这似乎与原问题的难度相同. 然而再逐项求导一次就发现回到了原来的级数, 也就是得到了一个二阶微分方程:

$$S''(x)-S(x)=0.$$

对于尚未学过微分方程的读者, 可用凑微分法求解如下. 先将上式乘以 e^x, 则得到

$$\mathrm{e}^x[S''(x)-S(x)]=[\mathrm{e}^xS'(x)-\mathrm{e}^xS(x)]'=0,$$

因此得到 $\mathrm{e}^x[S'(x)-S(x)]=C$, 其中 C 为待定常数. 将它写为 $S'(x)-S(x)=C\mathrm{e}^{-x}$, 两边再乘以 e^{-x}, 则有

$$\mathrm{e}^{-x}[S'(x)-S(x)]=[\mathrm{e}^{-x}S(x)]'=C\mathrm{e}^{-2x}.$$

于是得到 $\mathrm{e}^{-x}S(x)=-\frac{1}{2}C\mathrm{e}^{-2x}+C_1$, 其中 C_1 是又一个待定常数.

这样就确定出和函数的形式为

$$S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

其中已将 $-\frac{1}{2}C$ 改记为 C_2. 利用 $S(0)=1$, $S'(0)=0$, 即有 $C_1+C_2=1$, $C_1-C_2=0$, 因此得到 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 于是最后的答案是

$$S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\cosh x.\quad\square$$

解 2 若回忆起 e^x 的幂级数展开式, 则在解 1 中逐项求导得到 $S'(x)$ 的级数展开后, 就可导出下面的一阶微分方程:

$$S'(x)+S(x)=\mathrm{e}^x.$$

将它乘以 e^x 就得到 $[e^x S(x)]' = e^{2x}$, 因此有

$$e^x S(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

然后两边乘以 e^{-x}, 并利用 $S(0) = 1$ 即可得到与解 1 相同的答案. □

习题 2909 用逐项微分法计算级数 $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \cdots$ 的和.

提示 将 x 乘此级数后逐项求导两次即可. □

习题 2910 用逐项微分法计算级数 $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$ 的和.

解 1 (概要) 用沃利斯公式知道和函数 $S(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$, 然后按照《习题集》原有的提示, 计算 $(1-x)S'(x)$ 的幂级数展开式, 即可得到关于 $S(x)$ 的一阶微分方程, 它不难求解. □

解 2 利用 $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ 和

$$(2n-1)!! = (-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right),$$

可见这是二项式级数 (参见表格 (5.15)), 于是有

$$S(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad (-1 \leqslant x < 1). \quad □$$

解 3 记和函数为 $S(x)$, $x \in [-1,1)$ (见解 1). 本题的困难在于如何处理系数 $a_n = (2n-1)!!/(2n)!!$. 回忆 §4.2.6 的公式 (4.9), 即可有①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

于是有

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2\theta d\theta + \cdots + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos^{2n}\theta \, d\theta + \cdots \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + x\cos^2\theta + \cdots + x^n\cos^{2n}\theta + \cdots\right) d\theta. \end{aligned}$$

这里的求和与积分交换顺序 (即逐项积分) 的合理性在于: 以 $x \in (-1,1)$ 为参数和以 θ 为变量的函数项级数

$$1 + x\cos^2\theta + \cdots + x^n\cos^{2n}\theta + \cdots$$

可以用 $1 + |x| + \cdots + |x|^n + \cdots$ 为强级数, 因此显然在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛.

以下完全是一点常规计算 (参见 §3.4.3 开始的代换介绍):

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - x\cos^2\theta} \quad (\text{分子分母同乘以 } \sec^2\theta) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan\theta)}{(1-x) + \tan^2\theta} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-x}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad x \in (-1,1). \end{aligned}$$

① 用被积函数为 $\sin^{2n}\theta$ 的公式也可以, 只是由于下面将要作代换 $t = \tan\theta$, 因此不如用 $\cos^{2n}\theta$ 为被积函数更方便一点.

最后利用阿贝尔第二定理, 由于 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 于点 $x=-1$ 处右侧连续, 因此和函数 $S(x)$ 的上述表达式在 $[-1,1)$ 上成立. □

习题 2911 用逐项积分法计算级数 $x+2x^2+3x^3+\cdots$ 的和.

提示 首先确定级数的收敛域为 $(-1,1)$, 即其和函数 $S(x)$ 的定义域. 然后将该和函数写为 $S(x)=xg(x)$, 求 $g(x)$. □

5.5.5 幂级数在近似计算中的应用 (习题 2921–2935)

用级数的部分和来计算级数和的近似值, 这里的主要困难就是余项估计问题. 这在 §5.1.7 和 §5.2.2 中都已见过. 前者是正项级数的余项估计, 后者的习题 2703(a) 和 (b) 则是变号级数的余项估计. 在它们的求解中介绍了可以使用的主要方法.

其中特别要回顾习题 2703(a), 即对于莱布尼茨型级数的余项估计. 在那里已经证明, 级数的前若干项之和与级数和之差 (即余项), 其绝对值不超过弃去的第一项的绝对值, 且具有相同的符号. 具体来说, 对于满足 $b_n\downarrow 0$ 的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, 就有 $|R_n|\leqslant b_{n+1}$, 或者更准确一点, 如《习题集》在 §5.2 的前言中所指出, 有

$$R_n=\theta_n(-1)^n b_{n+1},$$

其中 $0\leqslant\theta_n\leqslant 1$.

这样简单的余项估计为使用莱布尼茨型级数作近似计算带来很大的方便. 在本小节的许多幂级数的近似计算中都将利用这一点. 然而如 §5.2.2 所示, 在莱布尼茨型级数为条件收敛的情况下①, 部分和的收敛可能非常缓慢. 习题 2703(a) 和 (b) 就是如此. 为了误差小于 10^{-6}, 需要计算级数的前 10^6 项之和. 这在实际使用上没有价值. 在下面就会遇到这样的问题.

本小节的习题有两类, 第一类为习题 2921–2931, 其中包括数 e 和圆周率 π 的近似计算等. 从题型来看, 这些习题与 §2.10.3 中用泰勒公式作近似计算的习题 1396 等没有区别. 第二类是积分的近似计算, 其中的问题与 §4.11 相同, 只是本节所用的工具主要是幂级数.

习题 2921 利用牛顿二项式公式近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式的前三项时的误差.

解 利用 $\sqrt[3]{8}=2$, 就有

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9}&=2\Big(1+\frac{1}{8}\Big)^{\frac{1}{3}}\\&=2\Big[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot\frac{1}{8^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot\Big(-\frac{5}{3}\Big)\cdot\frac{1}{8^3}+\cdots\Big]\\&=2\Big(1+\frac{1}{3\cdot 8}-\frac{1}{3^2\cdot 8^2}+\frac{5}{3^4\cdot 8^3}-\cdots\Big).\end{aligned}$$

① 莱布尼茨型级数也可能是绝对收敛的.

由于从第二项起的二项式级数为莱布尼茨型 (参考 §5.5.1 的习题 2820), 因此误差不超过第四项的绝对值, 且与其同号, 即有

$$0 < 2R_3 < \frac{2 \cdot 5}{3^4 \cdot 8^3} \approx 0.000\,241.$$

计算前三项之和得到

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\Big[1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576}\Big] \approx 2.079\,861,$$

可见有

$$2.079\,861 < \sqrt[3]{9} < 2.080\,102,$$

因此我们取 $\sqrt[3]{9} \approx 2.080$, 其中的数字都是准确的.

用计算器可以得到 $\sqrt[3]{9} \approx 2.080\,084$, 可见上述分析是正确的. □

注 本题若用 §2.10 的泰勒公式计算, 并用拉格朗日型余项估计误差, 则可以得到相同的结果. 参见 §2.10.3 的习题 1396(a) 对 $\sqrt[3]{30}$ 的近似计算及其底注.

习题 2925 利用适当的展开式, 计算 $\tan 9°$ 精确到 10^{-3}.

解 1 9° 按弧度制为 $\pi/20$. 若利用 $\tan x$ 的幂级数展开式, 则有

$$\tan\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^3 + \frac{2}{15}\cdot\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^5 + \cdots.$$

从 §5.5.3 的习题 2891 的注知道这是正项级数, 但并不知道其各项是否单调递减[①], 因此以下将利用 §2.10 的泰勒公式 (而不是用泰勒级数) 来估计误差. 于是有

$$\tan\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^3 + R_4,$$

写出余项 R_4 的拉格朗日型形式:

$$R_4 = \frac{\tan^{(5)}(\theta x)}{5!}\cdot x^5 \cdot \Big(\frac{\pi}{20}\Big)^5,$$

其中 $0 < \theta < 1$, $x = \pi/20$.

利用 §2.10.1 的习题 1386 的解 3, 已有

$$\tan^{(5)} x = 88\sec^4 x\tan^2 x + 16\sec^6 x + 16\sec^2 x\tan^4 x,$$

由于 $\tan x$ 和 $\sec x$ 在 $[0, \pi/2)$ 上均为严格单调递增, 不妨取 $x = 30°$ 来估计上式, 即可知它不超过 22 (更为精确可估计不超过 20). 于是就有

$$0 < R_4 < \frac{22}{5!}\cdot\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^5 \approx 1.8\times 10^{-5}.$$

从而与上页底注 (的不严格方法) 相同, 即只要取两项即可. 于是计算得到

$$\tan\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^3 \approx 0.158\,372.$$

---

① 在能够严格证明正切级数的系数单调递减时, 则从第三项起的余项可估计如下:

$$R_4 \leqslant \frac{2}{15}\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^5\Big[1 + \Big(\frac{\pi}{20}\Big)^2 + \Big(\frac{\pi}{20}\Big)^4 + \cdots\Big] = \frac{2}{15}\Big(\frac{\pi}{20}\Big)^5 \cdot \frac{1}{1 - \Big(\frac{\pi}{20}\Big)^2} \approx 1.3\times 10^{-5},$$

即已远小于 10^{-3}. 因此只要求前两项之和. 然而这个解法的严格化是困难的, 虽然在习题 2891 的注给出了 $\tan x$ 的完整的幂级数展开式, 但即使用伯努利数的渐近公式也只能证明在 n 充分大时系数单调递减.

将此结果与用计算器求得的 $\tan\dfrac{\pi}{20}\approx 0.158\,384$ 作比较, 可见已相当好 (对于这个小角度只要取第一项就可以得到误差稍大于 10^{-3} 的近似值 0.157). □

解 2 利用 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, 且当 $|x|<1$ 时, 分子分母的展开式均为莱布尼茨型级数, 就可以给出本题的另一个解法.

对于分子分母上的误差影响, 可以利用

$$\left|\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}\right|=\frac{|y\Delta x-x\Delta y|}{|y(y+\Delta y)|}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{|y(y+\Delta y)|},\tag{5.19}$$

其中利用了 $|x|<1$ 和 $|y|<1$, 这对本题是成立的.

对于分子 $\sin\dfrac{\pi}{20}=\dfrac{\pi}{20}-\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^3+\cdots$, 取第一项 $\dfrac{\pi}{20}\approx 0.157\,08$, 其误差 $|\Delta x|$ 不超过第二项的绝对值 $\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^3\approx 6.46\times 10^{-4}$.

对于分母 $\cos\dfrac{\pi}{20}$, 取前两项之和 $1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^2\approx 0.987\,663$, 其误差 $|\Delta y|$ 不超过第三项的绝对值 $\dfrac{1}{24}\cdot\left(\dfrac{\pi}{24}\right)^4\approx 2.54\times 10^{-5}$. 而且知道 $\Delta y>0$. 于是可以估计有

$$0.987\,663<\cos\frac{\pi}{20}<0.987\,688.$$

利用公式 (5.19) 就知道其误差已小于 10^{-3}, 于是可计算得到

$$\tan\frac{\pi}{20}\approx\frac{\dfrac{\pi}{20}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^2}\approx 0.159\,041.\quad\square$$

习题 2930 利用等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

计算数 π, 精确到 10^{-9}.

注 1 这就是著名的梅钦公式, 它在圆周率计算的历史上起过重要作用. 由于 $\arctan x$ 的泰勒展开式在 $0<x<1$ 时为莱布尼茨型级数, 因此公式中的两项都不难控制其近似计算中的误差. 这方面可以参考在 [15] 的第二卷的 410 小节, 其中用这个公式按照误差小于 10^{-7} 的要求作了计算.

注 2 这里只对梅钦公式的推导作一点说明.

记角 $A=\arctan\dfrac{1}{5}$, 则用两次正切函数的倍角公式, 即可得到

$$\tan 4A=\frac{120}{119}.$$

这表明角 $4A$ 比 $45°$ 略微大一点. 再计算

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-4A\right)=\frac{1-\tan 4A}{1+\tan 4A}=-\frac{1}{239}$$

就可导出梅钦公式. 类似的公式, 即用两个或三个反正切项的组合计算 π 的公式有无穷多个 [4]. 其中最简单的可能就是 $\dfrac{\pi}{4}=\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}$, 但它对于圆周率的近似计算效率不高.

习题 2931 利用公式

$$\ln(n+1)=\ln n+2\Big[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\Big],$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 精确到 10^{-5}.

注 利用下列泰勒级数展开式 (参见 §5.5.4 的习题 2906)

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\Big(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\Big),$$

用 $x=\dfrac{1}{2n+1}$ 代入就得到题设的公式. 由于这是系数单调递减的正项级数, 因此误差估计不难.

以下的习题 2932–2935 都是定积分的近似计算, 但与 §4.11 中的思路不同, 这里的工具是幂级数. 它的优点之一是不必计算有关的函数值, 尽管计算量可能也不小. 当然幂级数方法并不一定比 §4.11 的各种方法或其他数值积分方法更好.

具体来说, 如前面 §5.5.3 中的习题 2901–2905 那样, 先将被积函数作幂级数展开, 然后通过逐项积分得到用于积分近似计算的幂级数. 这时的误差估计与上面的习题 2921–2931 完全相同.

在习题 2932 中有 12 个小题, 均为定积分计算, 我们只看其中一个例子.

习题 2932(h) 将被积函数展开成级数, 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$, 精确到 0.001.

解 如习题 2895 那样用 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时二项式 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的幂级数展开式并在 $[0,1]$ 上逐项积分, 就得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}&=\int_0^1\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{4n}\Big)\,\mathrm{d}x\\&=\Big(x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\Big)\Big|_0^1\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{4n+1}.\end{aligned}$$

对于最后得到的莱布尼茨型级数进行余项估计, 并利用沃利斯公式 (5.2) (见命题 5.1), 就有

$$|R_n|\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{4n+1}\sim\frac{1}{4n\sqrt{\pi n}}\ \ (n\to\infty).$$

按照精度 0.001 的要求, 用右边的渐近等式可计算得到最小的 $n=28$, 用通项的准确公式则得到 $n=27$, 差别不大①. 总之需要计算相当多的项之和才能满足要求. 这表明上述条件收敛级数的收敛速度太慢, 不能满足实际计算的需要.

至少有两个方法可以解决问题. 第一个方法就是干脆不用幂级数展开的方法来计算本题的积分. 例如, 用 §4.11 中的抛物线公式 (即辛普森公式), 只要取 $n=4$, 就可以

① 当然这些都只是保证达到精度要求而对 n 的估计. 在已知答案时, 可以发现用 $n=18$ 已经达到要求.

求出积分的近似值为 0.927 159, 而用 Mathematica 求出的是 0.927 037, 因此已经达到了要求. 若用 $n=2$, 则得到 0.931, 误差约为 4×10^{-3}.

第二个方法就是用某种加速收敛的方法. 例如, 专门用于莱布尼茨型级数的加速收敛的欧拉方法, 见 [5] 的 §24. 这里从略. □

习题 2933 求一段正弦曲线 $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 之弧长, 精确到 0.01.

注 从 §4.6 的习题 2453 可知这相当于长半轴 $a=\sqrt{2}$, 短半轴 $b=1$ 的椭圆的半周长, 因此与下一题的性质相同.

对下面两题只给出解释, 并指出还有哪些方法可用.

习题 2934 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\dfrac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 并精确到 0.01.

注 这就是要计算积分

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-0.75\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

其中 $0.75=k^2$, $k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率. 本题可以用二项式的泰勒级数展开式得到以 $\sin x$ 为变量的幂级数, 通过逐项积分得到数项级数, 然后估计误差不超过 0.01 时需要计算多少项. 然而参考 §4.11 的习题 就可以知道这里有许多其他方法可供选择. 例如利用不等式估计

$$\pi(a+b)\leqslant s\leqslant\pi\sqrt{2a^2+2b^2},$$

对本题只要计算出两边的值, 再取它们的平均值, 就得到 4.839. 将它与更准确的 $s\approx4.844\,22$ 比较, 可见已满足 0.01 的精度要求了.

5.5.6 补注 (习题 2897–2900)

在这一小节中处理本节的一些理论性较强的习题, 其中有的是新版中增加的.

在讲解具体习题之前, 作为准备工作, 先复习几个有关的概念问题.

(1) 幂级数与泰勒级数是什么关系?

若 $f(x)$ 于点 $x=a$ 处有任意阶导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

为函数 $f(x)$ 在点 a 处的泰勒级数. 显然, 泰勒级数是幂级数.

反之, 若给定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, 且在点 a 的一个邻域 $O_\delta(a)\ (\delta>0)$ 上收敛, 则在教科书中都利用幂级数的逐项求导性质证明, 其和函数 $S(x)$ 在点 $x=a$ 处的导数 $f^{(n)}(a)=a_n n!\ (n=0,1,\cdots)$. 因此收敛半径大于 0 (包括为正无穷大) 的幂级数是泰勒级数, 或者更确切地说, 是其和函数在中心处的泰勒级数.

然而在不少书刊中给出了下列结论的证明, 任何给定的幂级数, 即使只收敛于中心一个点 (即收敛半径等于 0), 也一定是某个函数的泰勒级数 (例如见 [34] 的命题 14.4.2).

于是可以在这个更广泛的意义上说, 幂级数也一定是泰勒级数, 将函数展开为幂级数即是展开为泰勒级数.

(2) 泰勒公式与泰勒级数的区别.

对照 §2.10 开始列出的泰勒公式的表格与本节的表格 (5.14) 和 (5.15), 即可看出两者的不同.

首先, 泰勒公式是一个多项式 (称为泰勒多项式) 与一个余项之和, 只有有限项; 而泰勒级数是无穷级数, 即无限项之和 (在恰好只有有限个非零系数时则为多项式).

其次, 若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处有直到 n 阶的导数, 即可写出其泰勒公式. 即使 $f(x)$ 在该点只有一阶导数, 也有无穷小增量公式:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)\ \ (x\to a).$$

而当 $f(x)$ 在区间 (a,x) (其中允许 $x<a$) 上可导时则有有限增量公式:

$$f(x)=f(a)+f'(a+\theta(x-a))(x-a).$$

它们分别是最低阶的带佩亚诺型余项和带拉格朗日型余项的泰勒公式.

然而, 要写出 $f(x)$ 在点 a 处的泰勒级数, 就必须要求 f 在该点有所有阶的导数.

再从公式有效的范围来看, 若 f 在点 a 的一个邻域 $O_\delta(a)$ 内有 n 阶导函数, 则其泰勒公式在此邻域内即成立, 即使这个邻域很大, 甚至 $\delta=+\infty$ 也可以. 然而, 即使 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处无限次可微, 也不能保证其泰勒级数有正收敛半径, 而且在有正收敛半径时, 其收敛域与 f 的定义域之间也没有普适的联系. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在点 $x=0$ 的泰勒级数的收敛域为 $(-1,1)$, 而 f 却在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处无限次可微. (在前面已经指出, 这个问题只有到复数域上研究才能清楚.)

(3) 泰勒公式与泰勒级数的联系.

若函数 f 在点 $x=a$ 无限次可微, 则如前所述就可以写出泰勒级数

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

然而它还只是一个形式记号. 仅当以下几个问题解决后才能知道这个泰勒级数有什么用处.

(a) 这个级数的收敛域 I 是什么? (若其收敛半径为 0, 则收敛域 $I=\{a\}$, 这个级数没有什么用处.) 这个问题可以用柯西–阿达马公式或其他公式来解决.

(b) 若记上述泰勒级数在收敛域上的和函数为 $S(x)$, 则一个重要的问题就是: 是否在 I 上成立 $S(x)=f(x)$? 只有在此等式成立时, 我们才能说 $f(x)$ 可展开为幂级数.

这方面的典型反例就是在 §2.5.5 的习题 1225 中的函数:

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于在 $x=0$ 处该函数存在无限阶导数, 而且全都等于 0, 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 当然存

在泰勒级数, 且具有无穷大的收敛半径. 可是其级数和 $S(x) \equiv 0$, 因此在 $x \neq 0$ 时泰勒级数的和 $S(x)$ 与 $f(x)$ 毫无关系.

如果将这个函数乘以任意常数后加到其他可以在 $x=0$ 的某个邻域内展开为幂级数的函数上去, 则就可以知道, 存在无穷多个函数, 它们与自己的泰勒级数除了在 $x=0$ 点处相等之外, 没有任何关系.

解决问题 (b) 的一个方法就是利用 §2.10 中的泰勒公式的余项 $R_n(x)$. 若 f 于点 a 无限次可微, 则对每一个 n 都成立

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

这可不是形式记号. 对任何 $x \neq a$, 若上述公式对此 x 和所有 n 有意义, 且有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

则在这样的点 x 处, 函数值 $f(x)$ 就与其泰勒级数在该点的级数和相等, 也就是说在该点 f 可展开为泰勒级数.

如前面的许多例子所示, 余项 $R_n(x)$ 的处理往往相当困难. 这里佩亚诺余项根本没用, 而要写出拉格朗日型余项 (或者其他类型的余项) 则要求出函数 f 的所有阶导函数, 这往往做不到. 因此这种“直接法”有效的范围不大, 而在大多数情况下我们都是依赖于间接法来解决函数的泰勒级数展开问题.

这里特别可以回顾 §5.5.2 的习题 2845, 即展开函数 $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$, 和 §5.5.3 的习题 2890, 即展开函数 $f(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$. 其中利用某些理论性的命题保证它们的泰勒级数展开式成立, 然后则通过高阶导数计算写出所要求的泰勒级数. 这样既避免了余项讨论, 又避免了间接法中可能的复杂计算.

最后还可以指出, 阿贝尔第二定理在解决收敛域端点处的展开问题特别方便, 其优点就是因为从级数收敛就使得展开式成立, 这对于收敛域的内点是不能成立的.

下面给出几个证明题的解答. 其中有几个给出了保证函数能够展开为泰勒级数的附加条件.

习题 2897 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2, 则级数

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n; \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (a) 取 $R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}$, 则当 $|x| < R_{\min}$ 时两个级数都收敛, 因此逐项相加或相减得到的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 也收敛. 由此即可知道它们的收敛半径 R 满足下列不等式:

$$R \geqslant R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}.$$

进一步还可以问: 上述不等式是否成立等号?

若 $R_1 \neq R_2$, 则确实如此. 用反证法. 不妨设 $0 \leqslant R_1 < R_2$, 即 $R_{\min} = R_1$, 且设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ 的收敛半径 $R > R_1$, 这时可取点 x 满足 $R_1 < |x| < \min\{R, R_2\}$, 从而使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散, 同时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ 都收敛. 然而这时从

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}[(a_n + b_n) - b_n]x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

可见左边的幂级数也收敛, 引出矛盾.

对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ 的讨论是类似的, 从略.

然而当 $R_1 = R_2$ 时, $R > R_{\min}$ 确实可能发生. 一个平凡的例子就是 $a_n + b_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 其他非平凡的例子也不难举出.

(b) 用柯西–阿达马公式, 并引用 §1.2.6 的习题 132(b), 即有

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n b_n| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} |a_n| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} |b_n|,$$

于是就知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径 R 满足不等式

$$\frac{1}{R} \leqslant \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2},$$

于是得到 $R \geqslant R_1 R_2$.

容易看到这里出现严格不等号是可能的. 例如设有 $a_{2n-1} = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $b_{2n} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则就得到 $a_n b_n = 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$. 因此无论原来的 R_1, R_2 如何, 总会得到 $R = +\infty$.

如 [35] 的附录 A 所示, 由于习题 132(b) 的上极限不等式必须在右边不是 $0 \cdot \infty$ 时才能成立, 因此还会出现更为复杂的情况. 例如设

$$a_n = \frac{C^n}{n^n}, \quad b_n = n^{np}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中取 $C > 0$, $p > 0$, 则 $R_1 = +\infty$, $R_2 = 0$. 由于 $a_n b_n = [Cn^{(p-1)}]^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 只要取适当的 C 和 p, 就可以使得收敛半径 R 取到任何非负实数和 $+\infty$. □

习题 2899.1 证明: 若 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $|n! a_n| < M$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 其中 M 为常数, 则: (1) $f(x)$ 在任一点 a 处无穷次可微; (2) 下述展开式成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

解 1 (1) 利用条件 $|a_n| < \dfrac{M}{n!}$ 和 $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{\mathrm{e}}$ (见 §1.2.7 的习题 142 或者用斯特林公式), 即可通过柯西–阿达马公式推出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = +\infty$. 由幂级数的逐项可导性质就知道 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无限次可微.

(2) 用 $x=(x-a)+a$ 代入 $f(x)$ 的幂级数展开式中就得到以 a 为中心的展开式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(x-a)+a]^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,a^{n-k}(x-a)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\mathrm{C}_n^k\,a_n\,a^{n-k}\Big)(x-a)^k.$$

根据幂级数展开就是泰勒级数展开, 证毕①. □

注 本题之 (2) 可推广到更一般的情况, 即若对某个 $R>0$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上成立, 则对每一个点 $a\in(-R,R)$, 可以证明在 $|x-a|<R-|a|$ 上成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

若 $f(x)$ 于某点的邻域中可展开为泰勒级数, 则称 $f(x)$ 于该点解析. 于是已经证明, 在展开式成立的邻域内 (无论此邻域有多大) $f(x)$ 处处解析.

解 2 对于 (2) 也可以直接证明如下.

写出 $f(x)$ 在点 a 的泰勒公式, 对其余项 $R_n(x)$ 用拉格朗日型的余项形式:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

其中 ξ 在 x 和 a 之间.

为了估计余项, 对 $f(x)$ 在点 a 的泰勒级数在 $(-R,R)$ 内逐项求导得到

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k},$$

然后可以根据条件 $|n!a_n|\leqslant M$ 估计得到关于所有非负整数 k 为一致的估计

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}\frac{M}{(n-k)!}|x|^{n-k}=M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}=M\mathrm{e}^{|x|}.$$

于是就有余项估计:

$$|R_n(x)|=\Big|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\Big|\leqslant\frac{M\,\mathrm{e}^{|a|+|x|}\cdot|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

可见对于每一个 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ (利用 §1.2.2 的习题 61). 这样就不仅证明了 $f(x)$ 在点 a 可展开为泰勒级数, 而且该级数的收敛半径也是 $+\infty$. □

习题 2899.3 (伯恩斯坦定理)② 设 $f(x)\in C^{(\infty)}[-1,1]$, 且当 $x\in[-1,1]$ 时 $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内可展开为幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

---

① 不难直接对 $f(x)$ 的幂级数展开式逐项求导而得到 $f^{(k)}(a)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}\mathrm{C}_n^k\,a_n\,a^{n-k}$, 只是这一步计算可以不必做.

② 参见美国数学月刊的第 90 卷 (1983), 130–131 页.

解 写出 $f(x)$ 的泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中的余项 $R_n(x)$ 有各种不同的形式. 在 §2.10 中已经出现佩亚诺型余项和拉格朗日型余项. 然而对本题来说, 我们还需要更为有力的积分型余项.

为此只需要注意从余项的定义就有 $R_n^{(k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots,n)$ 和 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$, 然后如下分部积分即可得到:

$$\begin{aligned}R_n(x)&=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\int_0^x R_n'(t)\,\mathrm{d}t\\&=(t-x)R_n'(t)\Big|_0^x+\int_0^x R_n''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x R_n''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^x R_n'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t=\cdots=\frac{1}{n!}\int_0^x R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

在最后的积分式中作代换 $t=ux$, 当 t 从 0 到 x 时, u 从 0 到 1, 即得积分型余项为:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n\,\mathrm{d}u.$$

由题设条件知道每一个 $f^{(n)}(x)\ (n=0,1,\cdots)$ 都是单调递增函数, 因此就有

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(u)(1-u)^n\,\mathrm{d}u=x^{n+1}R_n(1).$$

又从

$$f(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+R_n(1)$$

和所有的 $f^{(k)}(0)\geqslant 0\ (k=0,1,\cdots,n)$ 可推出 $0\leqslant R_n(1)\leqslant f(1)$.

这样最后就得到

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant x^{n+1}f(1),$$

因此在 $x\in[0,1)$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 这即表明 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上可展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. 利用幂级数收敛域的对称性, 这个展开式在 $(-1,1)$ 上成立. □

注 在积分型余项中不出现难以估计的“中值” (ξ 或 θ). 若用拉格朗日型余项, 则有 $0<\theta<1$, 使得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

然而其中的 θ 与 x 有关, 因此从以上的余项表达式难以推出 $R_n(x)\leqslant x^{n+1}R_n(1)$.

习题 2900 证明: 若: 1) $a_n\geqslant 0$, 2) 存在 $\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S$.

解 由题意可见, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 至少在区间 $(-R,R)$ 上收敛. 将级数的和函数记为 $S(x)$. 若该幂级数的收敛半径大于 R, 则 $S(x)$ 于点 $x=R$ 处连续, 不必再讨论.

若该幂级数的收敛半径恰好就是题设的 R, 且级数于点 $x = R$ 处收敛, 则从阿贝尔第二定理可知, 幂级数在 $[0, R]$ 上一致收敛, 因此 $S(x)$ 于点 R 处左连续, 即有 $S(R) = \lim\limits_{x \to R-0} S(x)$, 因此结论成立. 于是以下只要证明该幂级数在 $x = R$ 处收敛.

从系数非负的条件 (1) 可知, $S(x)$ 在区间 $[0, R)$ 上严格单调递增. 于是从条件 (2) 可知, 在区间 $[0, R)$ 上成立不等式 $S(x) \leqslant S$.

从条件 (1) 又可见对每个 $x \in [0, R)$, 部分和序列 $S_n(x)$ 关于 n 为单调递增, 因此就知道对于每个非负整数 n 和每个 $x \in [0, R)$ 成立不等式

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \leqslant S(x) \leqslant S.$$

在上述不等式中令 $x \to R - 0$, 就得到

$$S_n(R) = a_0 + a_1 R + \cdots + a_n R^n \leqslant S.$$

然后利用部分和数列 $S_n(R)$ 关于 n 单调递增, 就可知级数于点 $x = R$ 处收敛. □

注 这里涉及与阿贝尔第二定理的结论有关的反问题, 即当和函数 $S(x)$ 于点 R 处有左侧极限时, 幂级数于点 $x = R$ 处是否一定收敛?

由本题可见, 当幂级数的所有系数非负时, 上述反问题的答案是肯定的.

然而在没有附加条件时, 上述反问题的答案可以是否定的. 例如下列最常见的几何级数就是如此. 一方面在 $(-1, 1)$ 上有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

同时还有 $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$, 然而上述级数在 $x = 1$ 处发散①.

对于上述问题已经得到许多结果, 统称为陶伯定理, 其中较简单的一个见 [34] 的命题 14.3.4.

① 有趣的是, 如果考虑发散级数在某些特定意义下的和, 例如 Cesàro 和, 则上述级数在 $x = 1$ 处的和确实为 $\dfrac{1}{2}$. 关于这方面的内容可以参考 [34] 的 §13.5.2 的第二组参考题 18–22, §14.5.2 的第二组参考题 10, 和 §15.2.3 的 Fourier 级数的 Cesàro 和. 在本书的 §5.11.2 的习题 3134 即是发散级数的 Ceaàro 求和的一个重要应用.

§5.6 傅里叶级数 (习题 2936–2985)

内容简介 本节的习题主要是将周期函数展开为傅里叶级数的计算题, 此外还有关于傅里叶系数方面的一些理论题.

在 [15] 的第三卷中的最后两章都是贡献给傅里叶级数的 (即老版中译本的三卷三分册). 一个较为简短的介绍则可见 [34] 的第十五章.

在自然界中有许多呈现周期性的现象. 周期函数就是描述周期现象的数学概念, 而傅里叶级数则是研究周期函数的最基本工具. 其基本思想就是将周期函数分解为有限个或无限多个正弦函数和余弦函数之和. 以周期 2π 的情况为例, 这就是要将周期为 2π 的函数分解为下列三角级数之和①:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

仿照在一些应用领域 (例如声学、光学和电学等) 中的习惯, 可将 $n=1$ 的 $a_1\cos x+b_1\sin x$ 称为一次谐波 (它可以写为 $A\cos(t+\varphi)$), 将 $n=2$ 的 $a_2\cos 2x+b_2\sin 2x$ 称为二次谐波等等. 在电学中又常将第一项 $\dfrac{a_0}{2}$ 称为直流项.

这样的分解是否可能? 如果可能, 其中的系数 a_n $(n\geqslant 0)$ 和 b_n $(n\geqslant 1)$ 如何计算? 这就是傅里叶级数理论中的基本问题.

在做习题之前先复习几个基本概念. 为简明起见, 以下经常以周期 2π 的傅里叶级数为主, 然而其中的内容对于一般的周期为 $2l$ $(l>0)$ 的傅里叶级数也成立.

傅里叶级数是在 §5.5 的幂级数之后的另一类重要的函数项级数, 它有许多与幂级数不同的独特性质. 从本质上看, 这来自于三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\} \tag{5.20}$$

的正交性. 这里的正交是指该系中任何两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ (或其他长度为 2π 的任意区间) 上的积分等于 0:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n-m)x+\sin(n+m)x]\,\mathrm{d}x=0;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x+\sin(n+m)x]\,\mathrm{d}x=\pi\delta_{nm};$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\sin(n+m)x]\,\mathrm{d}x=\pi\delta_{nm},$$

其中用了克罗内克符号 $\delta_{nm}=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$

在傅里叶级数理论中还常用一个专用记号 $\sim$. 按照定义: 在公式

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{5.21}$$

① 按照习惯将其中的常数项写为 $\dfrac{a_0}{2}$, 这使得公式 (5.22) 对 a_n $(n=0,1,\cdots)$ 具有统一的形式.

中, 它只告诉我们右边是左边的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 即 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是按照欧拉–傅里叶公式

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 0), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 1) \end{aligned} \tag{5.22}$$

计算得到的两个数列. 至于右边的级数的收敛域是什么, 以及在收敛的点处其级数和是否等于 f 在该点的值 (即函数 f 在该点是否可展开成傅里叶级数), 都需要另行研究.

如教科书所示, 公式 (5.22) 的数学推导建立在两个"如果"的基础之上: (1) 如果已成立下列等式①

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

(2) 如果右边的级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛 (也就是在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛). 这时其和函数 $f(x)$ 处处连续, 且可以在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分, 而且在乘以 $\cos ix$ 或 $\sin ix$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 之后也同样可以逐项积分②. 这样的计算就提供了欧拉–傅里叶系数的公式 (5.22).

傅里叶级数的定义为: 系数由欧拉–傅里叶公式 (5.22) 表示的三角级数称为 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并记为 (5.21). 这里已经抛开了上述两个"如果".

然而, 回顾以上推导, 则实际上已经证明了下列结论:

命题 5.13 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

必定是其和函数的傅里叶级数③.

容易看出, 由于三角级数的每一项都是周期 2π 的周期函数, 因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛等价于在任何一个长度 2π 的区间上一致收敛. 又从函数项级数的理论可知, 如果三角级数的和函数有不连续点, 则就不可能满足上述一致收敛的条件.

5.6.1 傅里叶级数的计算 (习题 2936–2974)

习题 2936 将函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解 1 为便于积分, 可先将 $\sin^4 x$ 展开为倍角函数的代数和 (例如见 §3.4.1 的习题 1991 的解 2):

---

① 这里隐含 $f(x)$ 是周期 2π 的周期函数.

② 只要用柯西一致收敛准则就可证明, 若将在集合 X 上一致收敛的级数的每一项乘以在 X 上的某个有界函数, 则所得到的级数仍然在 X 上一致收敛.

③ 这里提请初学者注意, 与幂级数和泰勒级数的等同关系 (见 §5.5.6 之 (1)) 不同, 存在不是傅里叶级数的三角级数. 参见 [34] 的 §15.2.6 中的例题 15.2.4 后的讨论以及命题 15.2.11.

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

然后用欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算 $f(x)$ 的傅里叶系数. 利用正交关系就有

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$
$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2},$$
$$a_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$$

而所有其他的傅里叶系数都等于 0. 于是即得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为:

$$f(x) = \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x. \quad \square$$

解 2 (概要) 如命题 5.13 所示, 在将 $f(x) = \sin^4 x$ 展开为倍角函数的代数和后, 由于它只有有限项, 因此作为级数必定一致收敛, 从而就可以肯定它就是 $f(x) = \sin^4 x$ 的傅里叶级数. □

习题 2937 三角多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的傅里叶级数是怎样的?

解 1 (直接计算) 这就是用欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算 $P_n(x)$ 的傅里叶系数. 然而我们不要将它看成为一个纯粹的计算问题. 注意到 $P_n(x)$ 就是正交系 (5.20) 中的前 $(2n+1)$ 个元的线性组合, 因此可以从正交关系来理解下面的计算.

首先计算傅里叶系数 a_0 如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)\Big] = 2\alpha_0.$$

这个结果当然可以逐项积分得到, 但我们可以将它解释成为在正交系 (5.20) 中的第一个元 (即恒等于 1 的常值函数) 与所有其他元的正交性所致.

类似地可计算其他傅里叶系数 a_k, b_k $(k \geqslant 1)$ 如下:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\alpha_k, & k \leqslant n,\\ 0, & k > n;\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\beta_k, & k \leqslant n,\\ 0, & k > n,\end{cases}$$

其中当 $k > n$ 时 $a_k = b_k = 0$ 就来自于 $\cos kx$ 和 $\sin kx$ 与 $P_n(x)$ 中的每项都正交所致.

从以上计算可见 $P_n(x)$ 的傅里叶级数就是它自身:

$$P_n(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = P_n(x). \quad \square$$

解 2 作为命题 5.13 这个一般性定理的特殊情况, 由于本题的三角多项式 $P_n(x)$ 只有有限项, 因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一致收敛条件成立, 从而 $P_n(x)$ 就是自身的傅里叶级数. 详细一点来说, $P_n(x)$ 中的常数项 α_0 就是傅里叶级数的常数项 $\frac{a_0}{2}$, 而 α_i 和 β_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 就是傅里叶系数 a_i 和 b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 同时所有下标大于 n 的傅里叶系数都是 0. 因此 $P_n(x)$ 就是自身的傅里叶系数. □

习题 2938 将函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $(-\pi < x < \pi)$ 展开成傅里叶级数. 绘出函数的图像及其傅里叶级数之若干部分和的图像.

利用展开式求莱布尼茨级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

解 由于在区间 $(-\pi, \pi)$ 上 $\operatorname{sgn} x$ 是奇函数, 因此所有的 $a_n = 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$. 然后对 $n = 1, 2, \cdots$ 可计算得到

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}\cos nx\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在不连续点 $x = 0$ 处满足

$$f(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2},$$

且在连续点处为局部常值, 因此 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上处处可展开为其傅里叶级数:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \ \ (-\pi < x < \pi). \tag{5.23}$$

在下面的附图 1 中作出了前四个部分和函数 $S_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ 的图像, 从第二个分图开始, 用两条虚线曲线表示上次的部分和函数与新增加的级数项的图像.

在附图 2 中, 用虚线作出了 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $(-\pi < x < \pi)$, 又用虚线曲线作出了前五个部分和函数 $S_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots, 5)$ 的图像, 用粗黑曲线作出了 $S_6(x)$.

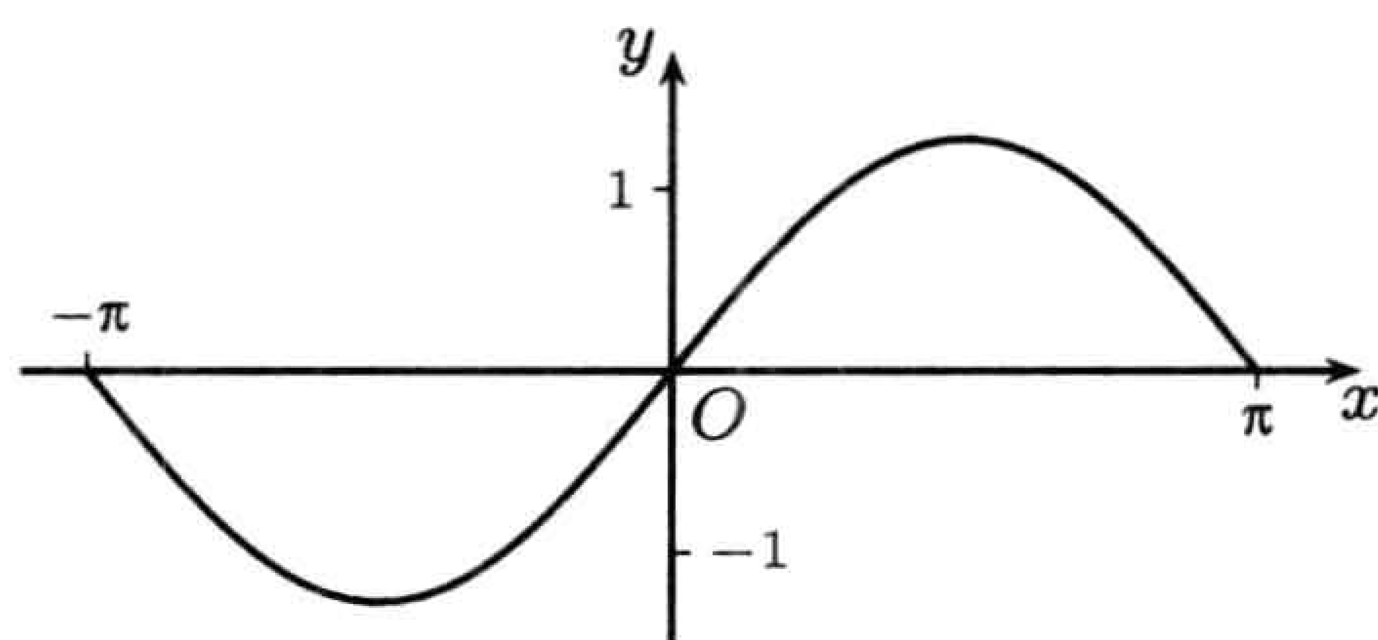
用 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入展开式 (5.23), 由于

$$\sin\Big[(2n-1)\frac{\pi}{2}\Big] = \sin\Big(n\pi - \frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^{n-1},$$

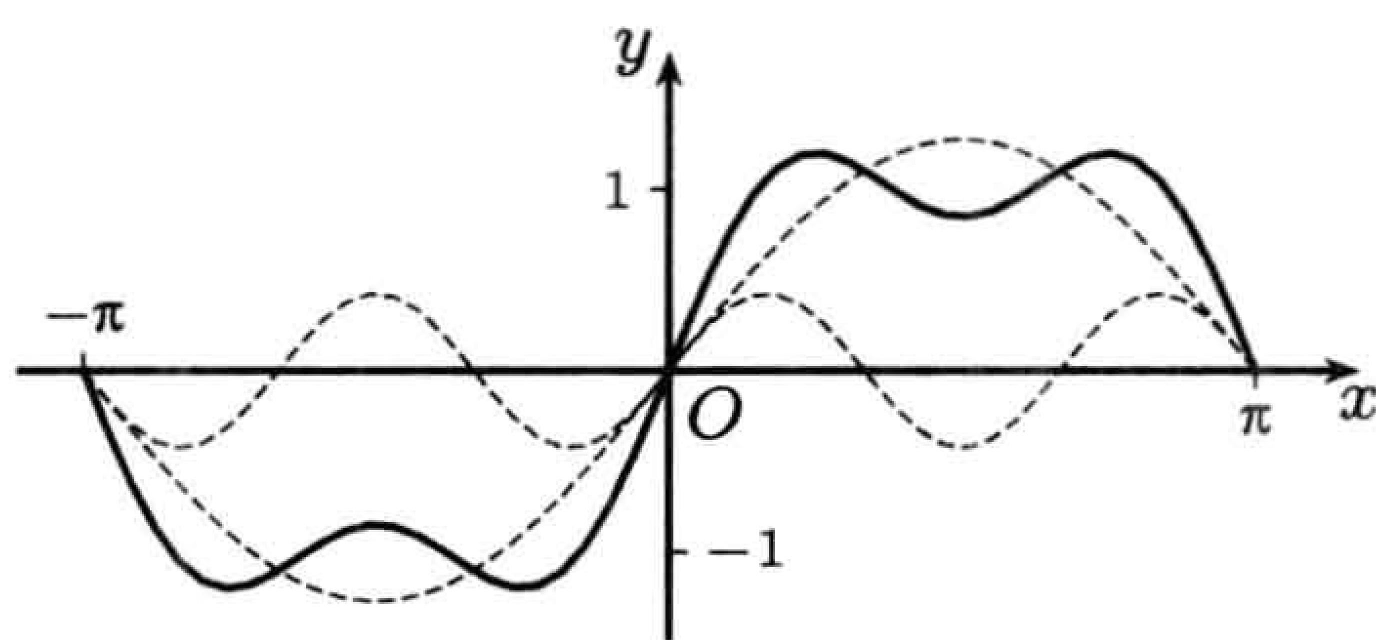
于是就求出了莱布尼茨级数之和 (已见于 §4.2.6 的习题 2283 和 §5.5.3 的习题 2869):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

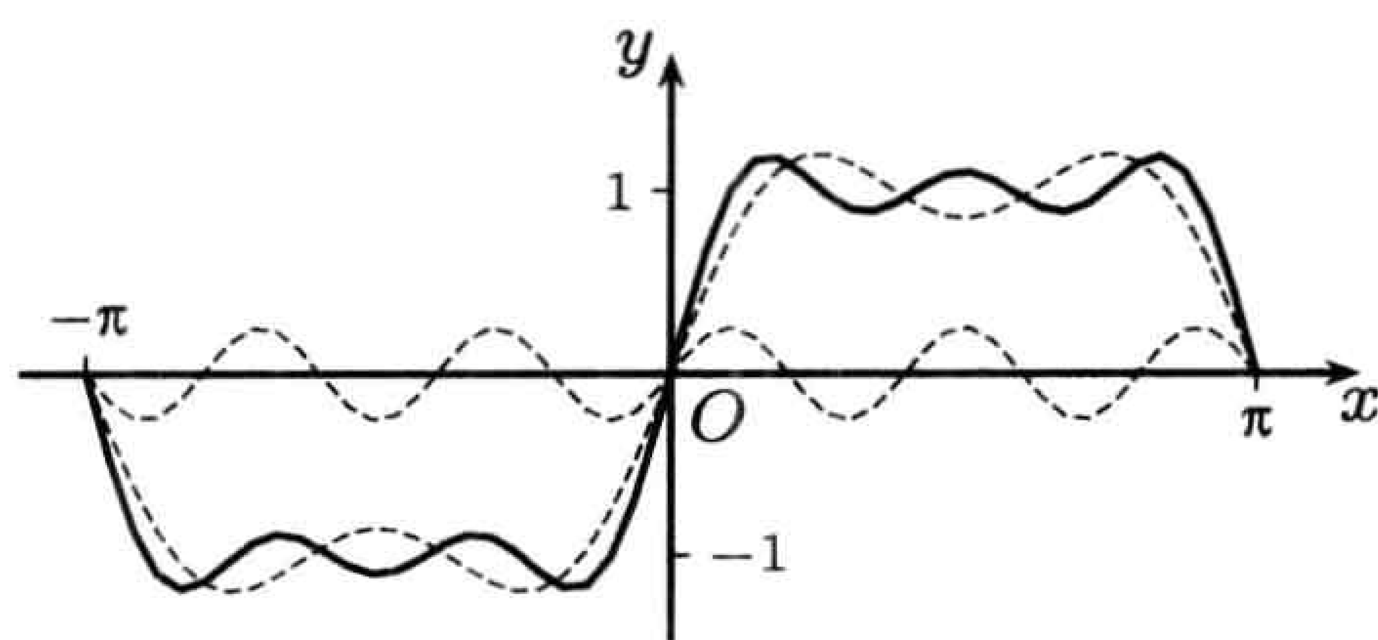
注 由于函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及其周期延拓有不连续点, 因此尽管 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 上处处收敛, 然而一定不一致收敛. 不仅如此, 从附图 2 中还可以初



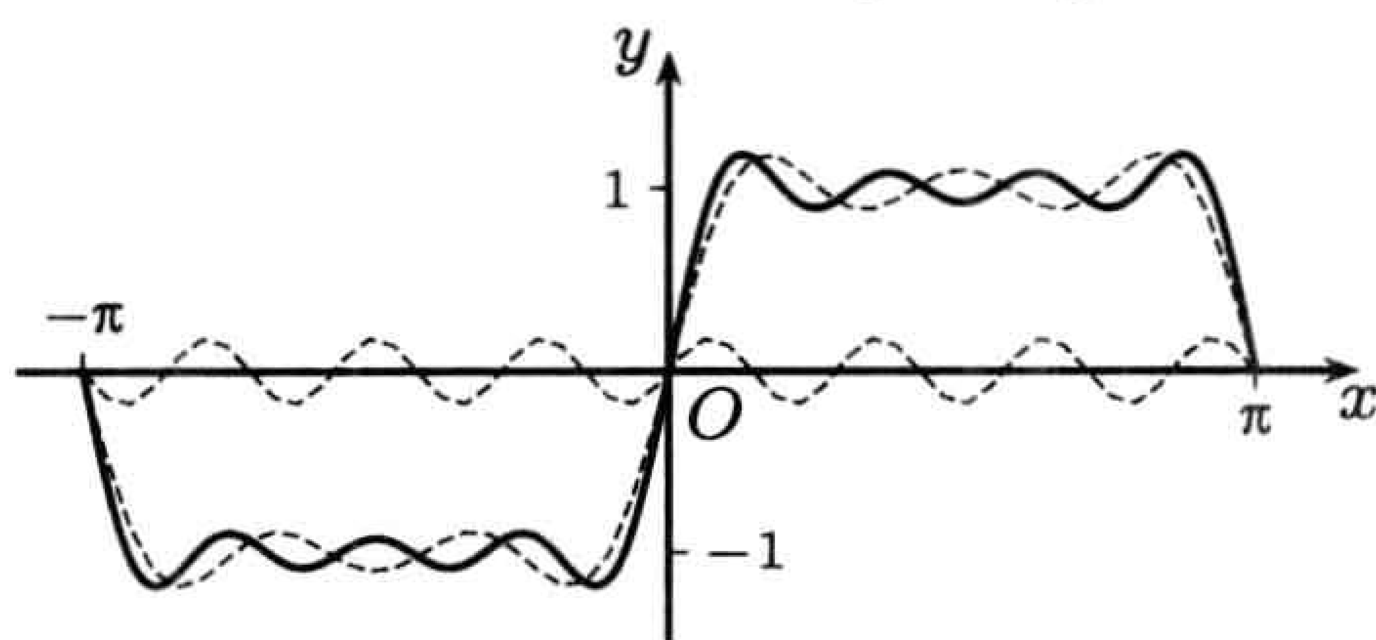
(a) $S_1(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin x$



(b) $S_2(x) = S_1(x) + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3}$

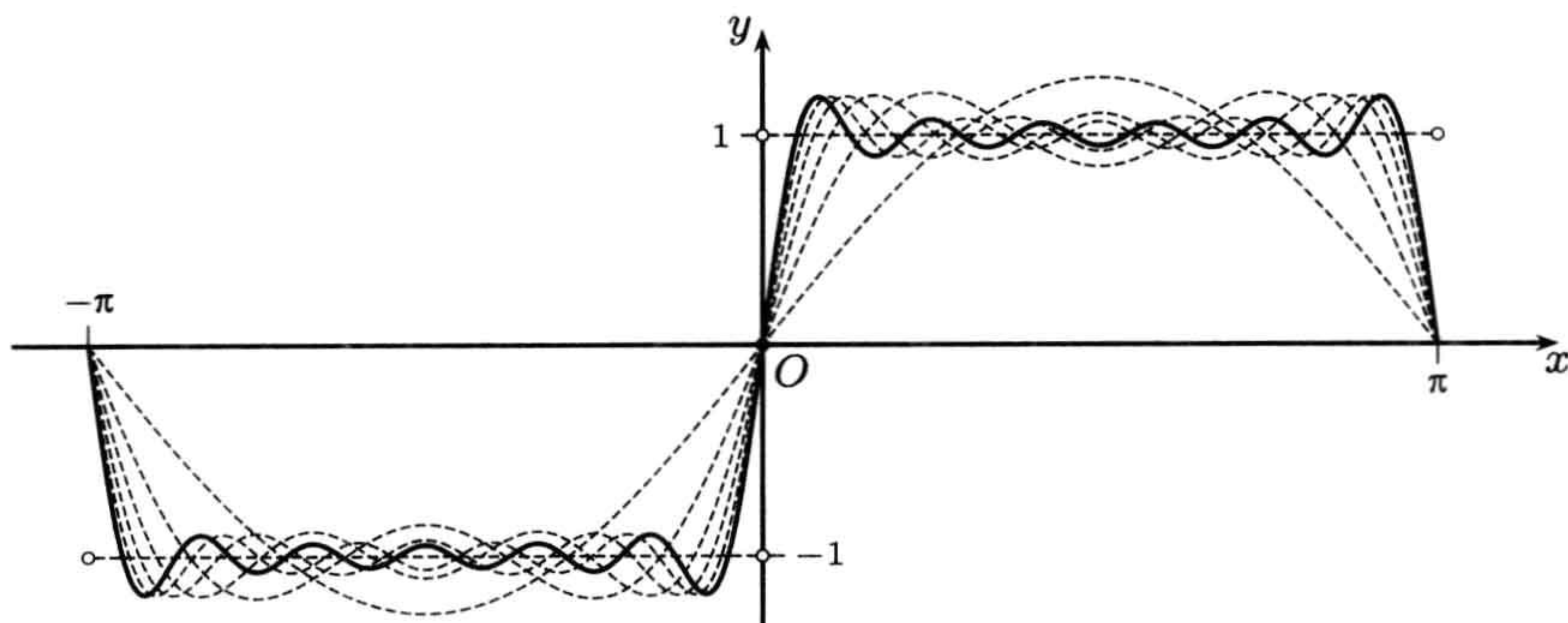


(c) $S_3(x) = S_2(x) + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5}$



(d) $S_4(x) = S_3(x) + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin 7x}{7}$

习题 2938 的附图 1



习题 2938 的附图 2

步看出傅里叶级数在和函数不连续点附近的吉布斯现象. 对于本题来说, 即不仅有 (回顾 §5.4.2 的习题 2741)

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{-\pi<x<\pi} |f(x) - S_n(x)| \right\} \neq 0,$$

而且有

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{-\pi<x<\pi} |f(x) - S_n(x)| \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x - 1 \approx 0.178,$$

其中的极限值是吉布斯现象中的普适常数. 关于吉布斯现象的简要介绍见 [34] 的例题 15.2.1, 更详细的分析见 [15] 的第三卷的 700–701 小节.

习题 2939 在区间 $(0, 2l)$ 内将函数 $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < 2l \end{cases}$ 展开成傅里叶级数, 其中 A 为常数.

解 (间接法) 代替直接用欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算系数, 可以用间接法计算, 即利用习题 2938 的已知展开式来得到本题要计算的结果.

由于所求的傅里叶级数有周期 $2l$, 因此若将 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 上定义为 $f(x)\equiv 0$, 而在 $(-l,l)$ 上将其展开, 则所得的傅里叶级数相同.

联系这样的 $f(x)$ 与 $\operatorname{sgn} x$ 的图像, 就可以发现本题的函数与 $\operatorname{sgn} x$ 的关系为

$$f(x)=\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{sgn}\frac{\pi x}{l}\right)\ (-l<x<l, x\neq 0),$$

从而得到所要的傅里叶级数展开式:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{A}{2}\left(1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{2n-1}\right)\\ &=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l}}{2n-1}\ (0<x<2l).\quad\square\end{aligned}$$

注 在本节的习题中主要是计算傅里叶级数. 然而这并非只是用欧拉–傅里叶公式作积分计算. 正如泰勒级数展开式中的间接法那样, 也可以用间接法求傅里叶级数. 这在 [36] 的 §18.2 的练习题 1 中就可以看到. 当然为此需要知道几个最为基本的傅里叶展开式, 例如除了 习题 2938 外, 下面的习题 2940–2941 的展开式也是基本的. 此外还可以使用逐项积分等方法. 这就是本题介绍间接法的目的.

习题 2940 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内将函数 $f(x)=x$ 展开成傅里叶级数.

解 由于在区间 $(-\pi,\pi)$ 上 x 是奇函数, 因此所有的 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$. 然后对 $n=1,2,\cdots$ 可用分部积分法计算得到

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$

于是得到在 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\ (-\pi<x<\pi).\quad\square \tag{5.24}$$

习题 2941 在区间 $(0,2\pi)$ 内将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 展开成傅里叶级数.

解 1 (直接法) 若按照欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算傅里叶系数, 则只要将该公式中的积分区间改为 $[0,2\pi]$ 即可.

然而利用下列考虑可减少一半计算量 (也可用 §4.2.5 的对称性得到相同的结果).

由于实际上的对象是周期 2π 的周期函数, 因此对于 $(0,2\pi)$ 上给定的函数 $f(x)$, 可将它作周期 2π 的周期延拓, 不妨仍记为 $f(x)$, 然后取其在 $(-\pi,\pi)$ 上的部分来计算其傅里叶系数. 就本题的 $f(x)$ 而言, 在周期 2π 的周期延拓之后成为奇函数, 因此所有的 $a_n=0\ (n=0,1,\cdots)$. 余下的只是要计算正弦项前的系数:

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{n\pi}\cdot x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\cdot(-1)^n=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

于是就得到所要求的傅里叶级数展开式:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \ \ (0 < x < 2\pi). \quad \square \tag{5.25}$$

注 右边的级数在前面已多次见过, 特别是在 §5.4.5 的例题 1 中, 利用黎曼引理 (命题 5.9) 求出了它的和, 并利用这个和 (也就是 (5.25)) 求出了巴塞尔问题的解.

解 2 (间接法) 若利用习题 2940 的结果 (5.24), 则就不必重新计算本题的傅里叶系数. 比较两题的函数就可见本题的 $f(x)$ 与那里的 x $(-\pi < x < \pi)$ 有如下关系:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - \pi) \ \ (0 < x < 2\pi),$$

因此就可以从 (5.24) 得到

$$\frac{\pi - x}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \ \ (0 < x < 2\pi). \quad \square$$

习题 2942 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内将函数 $f(x) = |x|$ 展开成傅里叶级数.

解 (间接法) 利用 $(|x|)' = \operatorname{sgn} x \ (x \neq 0)$, 本题的展开式可从 (5.23) 的傅里叶级数展开式逐项积分得到. 这时先有

$$\begin{aligned} |x| &= \int_0^x \operatorname{sgn} t \, \mathrm{d}t = \int_0^x \left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\int_0^x \sin(2n-1)t \, \mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t\Big|_{t=0}^{t=x} \\ &= -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \ \ (-\pi < x < \pi). \end{aligned}$$

上式右边第二项是一个常数, 因此可以从傅里叶系数 a_0 的计算得到, 即有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

于是就得到所要的傅里叶级数展开式:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \ \ (-\pi < x < \pi).$$

而且同时还求出了

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square \tag{5.26}$$

注 本题用直接法也是容易的. 此外, 利用 (5.26) 就有

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

从而给出了巴塞尔问题的另一个解法 (参见 §5.1.7 的习题 2655(a)).

习题 2953 将 $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 展开成傅里叶级数.

提示 注意这个 $f(x)$ 是周期 2π 的周期函数, 且为分段线性函数 (锯齿波), 其图像见第一册附录一的习题 318. 只有当 $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时才有 $\arcsin(\sin x) = x$. □

习题 2955 将 $f(x) = x - [x]$ 展开成傅里叶级数.

提示 注意这个 $f(x)$ 是周期函数, 建议先作出其图像, 确定周期后再做计算. 可以参考 §1.7.2 的习题 685 (取最大整数函数 $[x]$) 的附图. □

习题 2956 将 $f(x) = (x)$ 展开成傅里叶级数, 其中 (x) 是 x 到与它最接近的整数的距离.

提示 建议作出图像并确定周期后再计算. 可参考第一册附录一的习题 362(e). □

习题 2959 将周期函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ ($|\alpha| < 1$) 展开成傅里叶级数.

解 1 (分析法) 先观察用函数项级数定义的函数 $f(x)$ 的收敛域和一致收敛域.

由于在 $\sin x$ 的零点 $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处, $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ 存在极限, 即可连续延拓, 因此该级数的通项定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

问题的关键是处理因子 $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$. 利用 §4.2.6 的习题 2291 的解 3, 则对 $n = 1, 2, \cdots$ 有下列恒等式:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} &= 1 + 2[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos(2n-2)x], \\ \frac{\sin(2n)x}{\sin x} &= 2[\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

由此可见成立不等式

$$\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant n.$$

于是可以用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|\alpha|^n$ 为强级数, 知道题设中定义 $f(x)$ 的函数项级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛和一致收敛 (参见 §5.4.3).

以下用 (5.27) 代入级数通项作直接计算. 为简明起见, 只写出前面的若干项即可看出其一般规律如下:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha + \alpha^2 \cdot (2\cos x) + \alpha^3 \cdot (1 + 2\cos 2x) \\ &\qquad + \alpha^4 \cdot (2\cos x + 2\cos 3x) + \alpha^5 \cdot (1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) + \cdots \\ &= (\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots) + 2\cos x(\alpha^2 + \alpha^4 + \cdots) + 2\cos 2x(\alpha^3 + \alpha^5 + \cdots) + \cdots \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + 2\cos x \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + 2\cos 2x \frac{\alpha^3}{1-\alpha^2} + \cdots \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos nx\Big). \end{aligned}$$

由 $|\alpha| < 1$ 可见最后得到的三角级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因此从命题 5.13 可知它就是 $f(x)$ 的傅里叶级数.

然而上述计算在严格性上存在不足, 即需要对无限多项求和, 而其中的每一项又是一个无穷级数①.

但是 $f(x)$ 的上述等式是容易直接得到的. 先将 $(1-\alpha^2)$ 乘以 $f(x)$ 得到

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+2} \frac{\sin nx}{\sin x} \\ &= \alpha + \alpha^2 \cdot 2\cos x + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha^n \cdot \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x} \\ &= \alpha + \alpha^2 \cdot 2\cos x + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha^n \cdot 2\cos(n-1)x = \alpha + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos nx,\end{aligned}$$

然后两边除以 $(1-\alpha^2)$ 即可. 由此可见以上的结论成立, 即在题中用无穷级数定义的函数 $f(x)$ 还有另一个表达式, 而后者就是它的傅里叶级数展开式. □

解 2 (概要) 如解 1 开始所述, 用于定义 $f(x)$ 的无穷级数关于 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 为偶函数, 且在乘以 $\cos ix$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 后仍然在该区间上一致收敛, 这样就可以通过逐项积分方法用欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算其傅里叶系数 a_n $(n = 0, 1, \cdots)$. 这里可以参考 §4.2.6 的习题 2291 的计算结果. □

习题 2961 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成傅里叶级数: (a) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内按余弦展开; (b) 在区间 $(0, \pi)$ 按正弦展开; (c) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开. 绘出函数的图像及情形 (a), (b), (c) 的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式, 求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (只对 (a) 给出详细解答)

(a) 由于 x^2 为偶函数, 因此只要在 $(-\pi, \pi)$ 上计算 $f(x) = x^2$ 的傅里叶系数 a_n $(n = 0, 1, \cdots)$ 即可.

计算

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

(这里可以利用 §3.5.1 的习题 2067 提供的公式). 于是得到

① 这里的严格化是可以做到的. 问题是有两个下标的数列 $a_{mn} = c_{mn}\alpha^n \cos mx$ 的求和问题, 其中系数 $c_{0n} = 1$ $(n \geqslant 1)$, $c_{mn} = 2$ $(m \geqslant 1, n \geqslant 1)$. 若按照 α^n 收集同类项时, 只有有限多项 (但项数无上界), 就得到函数 $f(x)$ 的原有的无穷级数表达式. 若按照 $\cos mx$ 收集同类项, 则每次都有无穷多项, 但只需要用几何级数求和公式, 这样就得到 $f(x)$ 的另一种表达式, 即其傅里叶级数展开式. 利用二重级数的换序求和定理, 并利用 $|\alpha| < 1$ 就可以使得上述解法严格化. 这里的理论基础见 [15] 第二卷的 §11.5.

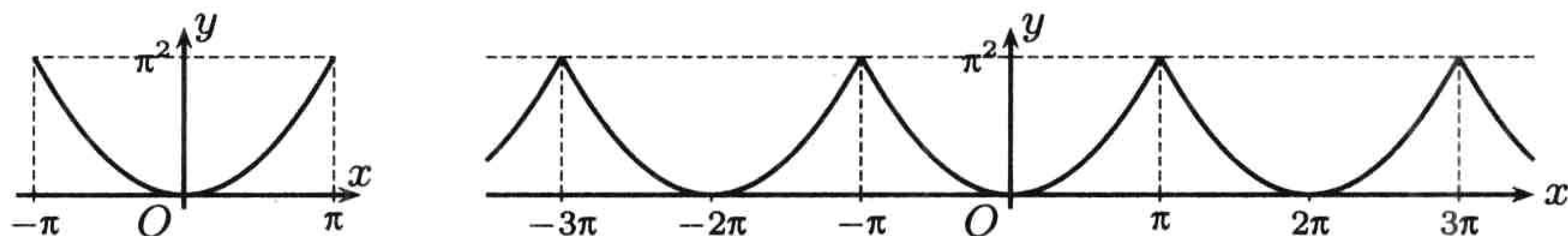
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \ \ (-\pi < x < \pi).$$

由于上述展开式在 $x = \pi$ 时仍然成立, 用 $x = \pi$ 代入, 就有

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

于是即可得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 即巴塞尔问题的解 (见 §5.4.5 的例题 2).

在附图中作出了 $f(x)$ 的图像以及其傅里叶级数和的图像, 后者是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期 2π 的周期连续函数. □

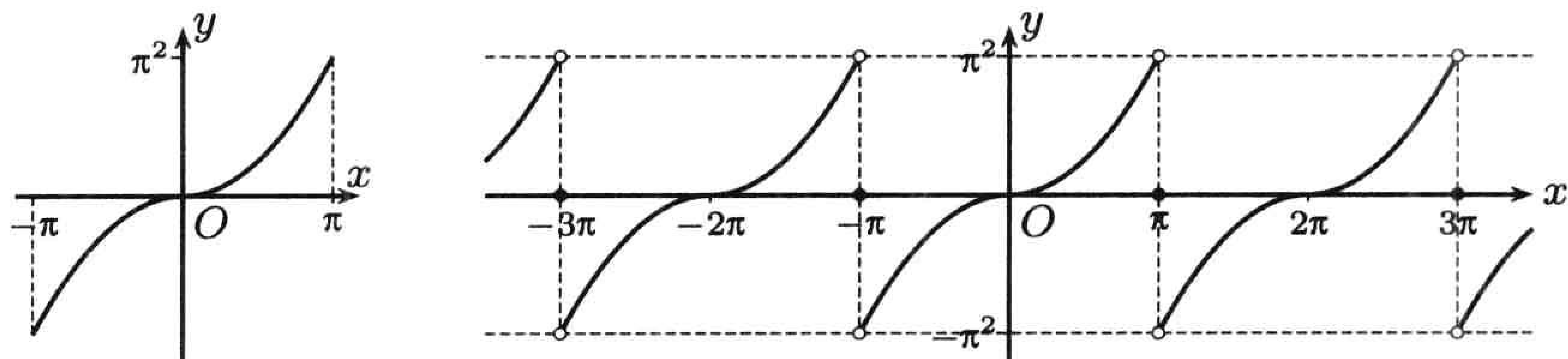


习题 2961(a) 的附图

注 本题也可以利用 $f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶展开式 (见 (5.24)), 然后仿照习题 2942 用逐项积分方法求解.

(b) (提示) 既然在 $(0, \pi)$ 上的 x^2 要展开成为正弦级数, 则这个级数的和函数必定是奇函数. 因此应当将 $(0, \pi)$ 上的 x^2 按照奇函数延拓到 $(-\pi, 0)$ 上后进行计算.

在附图的左分图中作出了在 $(0, \pi)$ 上的 $f(x) = x^2$ 经过奇延拓后的函数图像, 而右分图则是其傅里叶级数和的图像, 后者是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期 2π 的周期函数. 这里要注意, 在点 $(2k-1)\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 上的级数和等于 0. □

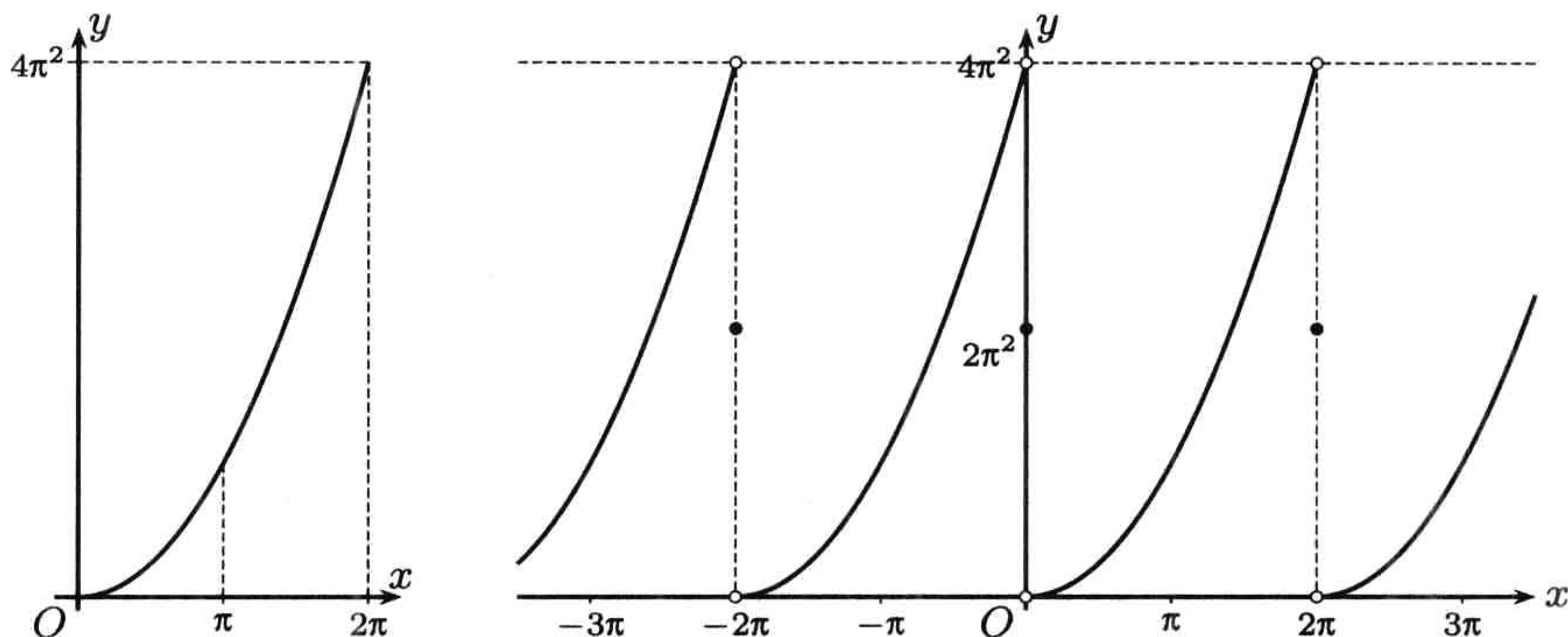


习题 2961(b) 的附图

(c) (提示) 这时的和函数是 $(0, 2\pi)$ 上的 x^2 按照周期 2π 延拓得到的周期函数. 因此本题的答案与 (a) 和 (b) 都不同.

在附图的左分图中作出了在 $(0, 2\pi)$ 上的 $f(x) = x^2$ 的图像, 而右分图则是其傅里叶级数和的图像, 后者是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期 2π 的周期函数. 这里要注意, 在点 $2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 上的级数和等于 $2\pi^2$. □

注 由此可见, 在 $(0, \pi)$ 上的函数 $y = x^2$ 同时有多个级数展开式. 反之, 用傅里叶级数还可以将多个不同的函数用同一个级数表出, 只不过在不同的区间上表示不同的函数. 这就表明, 在函数概念中的最基本的要素并不是它的表达式.



习题 2961(c) 的附图

习题 2963 写出函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$ 的李雅普诺夫等式①. 利用李雅普诺夫等式, 求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 因此只要按照欧拉–傅里叶公式 (5.22) 计算 a_n $(n=0,1,\cdots)$:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi},$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\right)^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

这样就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{1}{2}\alpha(\pi-\alpha),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\pi\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2.\quad\square$$

欧拉公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),\quad \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

在展开傅里叶级数的计算中也经常有用. 下一题即是这方面的例子.

---

① 李雅普诺夫等式 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 在英美等国的数学文献中一般称为帕塞瓦尔等式 (参见 [34] §15.2.4).

习题 2966 求 $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$ 的傅里叶级数展开式.

解 用欧拉公式代入即有 (参考 §5.5.2 的习题 2863 的解):

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{1-q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+q^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}q}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}q}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}q)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}q)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx.$$

这里的条件 $|q|<1$ 保证了上述计算的合理性, 同时又保证最后的三角级数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 因此即为其和函数的傅里叶级数. □

注 本题的结果已见于 §5.5.2 的习题 2864, 只是在那里是幂级数展开式, 而在这里是傅里叶级数展开式. 这与前面的习题 2959 类似.

习题 2969 求 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$ 的傅里叶级数展开式.

解 1 用欧拉公式即有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=\ln(1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})+\ln(1-q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}q^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}q^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx.$$

这里的条件 $|q|<1$ 保证了上述计算的合理性, 同时又保证了最后的三角级数于 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 因此是其和函数的傅里叶级数. □

解 2 (概要) 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(1-2q\cos x+q^2)]=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2},$$

因此可以对习题 2966 的展开式用逐项积分法得到所要的结果. □

习题 2970 求无界周期函数 $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ 的傅里叶级数展开式.

解 1 $f(x)$ 在点 0 处局部无界, 常负, 是周期 2π 的偶函数. 用 §4.4.1 的习题 2353(a) 的欧拉积分, 即可求出傅里叶系数 a_0 如下:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\ln 2=-2\ln 2.$$

然后再计算其余的系数如下:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\sin nx\cdot\ln\sin\frac{x}{2}\right)\Big|_{+0}^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{n}.$$

这里最后一步利用了 §4.2.6 的习题 2291 的 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\pi$, 又由于该积分的被积函数在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为偶函数, 因此得到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$.

于是就得到所要的展开式:

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi,x\neq 0).\quad\square$$

解 2 用欧拉公式就有

$$\begin{aligned}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|&=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x}{2}}}{2\mathrm{i}}\right|=-\ln 2+\ln|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|\\&=-\ln 2+\mathrm{Re}[\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})]=-\ln 2+\mathrm{Re}\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}\Big)\\&=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.\quad\square\end{aligned}$$

注 这里用到复变量 z 的复对数函数, 它是多值函数, 在 $\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ 中取其主枝, 这方面的定义可参考 [7] 的 §1.3.

5.6.2 傅里叶系数的一些性质 (习题 2975–2985)

用欧拉–傅里叶公式 (5.22) 定义的傅里叶系数具有许多独特的性质. 本小节的习题只涉及与对称性等有关的一些基本性质, 有关渐近性态等性质可参考 [34] 的 §15.1.2 和 §15.1.3.

习题 2975 应当如何把给定在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内, 使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

解 既然在傅里叶级数中不出现正弦项, 因此延拓后的函数必为偶函数, 这决定了从 $(0,\pi)$ 到 $(-\pi,0)$ 为偶延拓. 余下的问题是如何从 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 延拓到 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 才能使得下列积分为 0:

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x=0.$$

如 §4.2.5 的命题 4.8 所示, 这只要使被积函数 $f(x)\cos(2nx)$ 关于点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为奇即可.

由于

$$\cos(2n(\pi-x))=\cos(2nx),$$

因此只需要使得延拓后的 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上满足 $f(\pi-x)=-f(x)$, 这就决定了从 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 的延拓方法为定义

$$f(x)=-f(\pi-x)\quad\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right),$$

然后再用 $f(x)=f(-x)$ $(-\pi<x<0)$ 作偶延拓即可. $\square$

习题 2984 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$, 试计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

的傅里叶系数 A_n, B_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

解 1 利用逐项积分方法, 从

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

即可得到

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

于是就有

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2nh}[\sin n(x+h) - \sin n(x-h)] \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2nh}[\cos n(x-h) - \cos n(x+h)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nh}{nh}\cos nx + \frac{b_n \sin nh}{nh}\sin nx\right), \end{aligned}$$

最后得到

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh}, \quad B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1,2,\cdots). \quad \square$$

解 2 可以从斯捷克洛夫函数的定义出发直接用欧拉–傅里叶公式计算该函数的傅里叶系数, 只是这时需要利用多元积分学中的二次积分的顺序交换定理.

写出计算 A_0 的公式:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

然后在内层积分中作变量代换 $\xi - x = t$, 得到

$$A_0 = \frac{1}{2h\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-h}^{h} f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

交换积分顺序, 并利用周期函数在长度为一个周期的区间上的积分不变性 (见 §4.2.5 的习题 2265), 就可得到

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} a_0\,\mathrm{d}t = a_0. \end{aligned}$$

类似地可以计算得到

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{2h\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2h\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{-h}^{h}f(x+t)\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)\,\mathrm{d}u\\&= \frac{1}{2h\pi}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\\&= \frac{a_n}{2h}\int_{-h}^{h}\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{a_n\sin nh}{hn}\ \ (n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

和

$$B_n = \frac{b_n\sin nh}{nh}\ \ (n=1,2,\cdots).\quad\square$$

习题 2985 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 A_n, B_n $(n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果, 推出李雅普诺夫等式.

解 1 用欧拉–傅里叶公式直接计算傅里叶系数. 利用变量代换和周期函数在周期长度的区间上的积分不变性, 就有

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(-x+t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)f(u)\,\mathrm{d}u=F(x),$$

可见 $F(x)$ 为偶函数. 因此只要计算 A_n $(n=0,1,\cdots)$.

从下面的计算可见, 这里也需要利用二次积分的顺序交换定理.

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\mathrm{d}x=a_0^2,\\A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t\\&= a_n^2+b_n^2\ \ (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是就得到

$$F(x)\sim\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

利用 (一般教科书中均有的) 贝塞尔不等式就知道上述傅里叶级数一致收敛, 从而由命题 5.13 就知道成立傅里叶级数的展开式

$$F(x)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

最后只要用 $x=0$ 代入就得到所要的李雅普诺夫等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \quad \square$$

解 2 直接计算 $F(x)$. 在

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

中将 x 改为 t, 乘以 $f(x+t)$. 由于 f 为周期 2π 的连续函数, 因此所得的级数仍可逐项积分, 这样就得到

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)f(x+t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

作变量代换 $x+t=u$, 并利用周期函数在长度为一个周期的区间上的积分不变性, 就有

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2}\cdot a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n \cos n(u-x) + b_n \sin n(u-x)]f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + b_n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)] \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 为连续周期函数, 因此从贝塞尔不等式知道上述三角级数一致收敛, 从而由命题 5.13 知道这就是 $F(x)$ 的傅里叶级数. 于是得到

$$A_0 = a_0^2, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2, \quad B_n = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

又在 $F(x)$ 的展开式中令 $x=0$ 代入, 就得到所要证明的李雅普诺夫等式. $\square$

注 本题只是在 $f(x)$ 为连续函数的条件下给出了这个等式的证明. 实际上只要 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和平方可积 (这里的可积允许为广义可积), 李雅普诺夫等式就成立. 这时的证明可以参考 [34] 中对命题 15.2.5 的说明.

§5.7 级数求和法 (习题 2986–3033)

内容简介　本节的习题按照所用的主要方法分为三部分. 在第一小节中的级数求和一般可以通过裂项消去法和代数运算得到, 第二小节中的级数求和则主要依赖于逐项微分和逐项积分等分析方法. 三角级数求和有其自身的特点, 列为第三小节.

从本章开始, §5.1 的习题 2546–2552 就有级数求和的内容. 在 §5.1.1 中对习题 2548 和 2552 举出的各种解法大致上也就是本节要使用的主要方法.

两种最为基本的求和法为: (1) 裂项消去法 (也称为连锁消去法), 见 §1.2.1 的习题 56 及其注 (即求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$); (2) 几何级数求和公式及其变型, 见 §1.2.1 的习题 55 (即求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$). 实际上在 §5.1.7 的级数余项估计中所用的也就是这两种方法.

接下来应当提到的是, 从 §1.2.3 的数 e 的级数展开式 (见习题 72) 起, 包括 §1.5.7 之 4 的习题 611(b) 提供的 e^x 的级数展开式, 直到在本章前面的幂级数 (即泰勒级数) 和傅里叶级数的两节中所提供的许多现成的级数展开式, 它们也都是本节习题中可以使用的工具. 例如巴塞尔问题, 即求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和, 在前面已多次解出.

除此之外, 就是利用函数项级数的逐项微分和逐项积分的方法. 由于这两种运算对于幂级数特别方便, 因此有时对于数项级数可以引入变量, 使它成为幂级数后求和. 这就是级数求和法中的阿贝尔方法. 它在 §5.1.1 的习题 2548 的解 3 中已经出现. 在本节的第二小节中将有这方面的更多习题.

5.7.1　级数求和法 I (习题 2986–3005, 3030–3033)

习题 2986–2994 中多数为高阶等差数列的倒数级数 (参见 [19] 的第十三节), 在求和时裂项消去法经常有效.

习题 2987 求级数 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$ 的和.

解 1　利用

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\ (n=1,2,\cdots),$$

就可以求得该级数部分和的封闭形式, 然后取极限即可. 将级数和记为 S, 其部分和数列记为 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$, 就有

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 (概要) 如果利用有理函数的部分分式分解 (见 §3.2), 则就有固定的分解方法可用. 对本题就可得到

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)},$$

只是以下的计算未必比解 1 更简单. □

解 3 用阿贝尔方法, 引入幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)},$$

并记其和为 $S(x)$, 则在 $(-1,1)$ 内可逐项求导三次得到

$$S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

然后可通过三次求积得到 $S(x)$ $(-1<x<1)$. 利用原级数收敛, 因此其和即是 $S=\lim\limits_{x\to 1-0}S(x)=S(1)$. 当然这个方法对本题来说有杀鸡用牛刀之嫌, 计算量也比以上两个解法大. 从略. □

习题 2996 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和.

解 记级数和为 S, 利用函数 e^x 的泰勒级数展开式 (见 §5.5.2 的表格 (5.14)), 就有

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=3\mathrm{e}^2.\quad \square$$

习题 2998 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$ 的和.

解 计算函数 $\dfrac{1}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}$ 的部分分式分解. 这时有待定式:

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}.$$

利用 §3.2.1 的习题 1874 的解 3 中的方法, 两边乘以 x^2 后得到

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}=A+ax+x^2\Big(\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}\Big).$$

在上式中令 $x\to 0$ 得到 $A=1/4$. 又将该式两边求导后再令 $x\to 0$, 得到 $a=-3/4$.

用同样的方法得到 $B=1$, $b=0$, $C=1/4$, $c=3/4$.

于是就得到级数通项的下列分解:

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{4(n+2)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n(n+2)}.$$

然后对前三项的求和利用巴塞尔问题的答案, 对第四项的求和用裂项消去法, 就得到

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}+\Big(\frac{\pi^2}{6}-1\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\Big)-\frac{3}{4}\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\\&=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.\quad \square\end{aligned}$$

习题 3001 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{P(n)}{n!}x^n$ 的和.

解 $P(n)$ 是 n 的 m 次多项式. 本题的要点是将它转换为阶乘多项式. 利用《习题集》的习题 5 (其解见 §1.1.6) 中的记号 (在其中取 $h=1$), 记

$$x^{[n]}=x(x-1)\cdots(x-n+1),$$

则可用数学归纳法证明 $P(n)$ 可分解如下:

$$P(n)=b_0+b_1n^{[1]}+b_2n^{[2]}+\cdots+b_mn^{[m]}.$$

记级数的和为 $S(x)$, 然后就有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n-a_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_0+b_1n^{[1]}+b_2n^{[2]}+\cdots+b_mn^{[m]}}{n!}x^n-a_0\\&=b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+b_1x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\cdots+b_mx^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-a_0\\&=(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\mathrm{e}^x-a_0.\quad\square\end{aligned}$$

注 这里简要地提一下斯特林数. 在 $P(n)=n^m$ 为单项式的情况, 将分解式

$$x^m=\left\{{m\atop m}\right\}x^{[m]}+\left\{{m\atop m-1}\right\}x^{[m-1]}+\cdots+\left\{{m\atop 1}\right\}x^{[1]}+\left\{{m\atop 0}\right\}x^{[0]}$$

中的系数 $\left\{{m\atop k}\right\}$ $(k=0,1,\cdots,m)$ 称为第二类斯特林数. 在 [21] 的 66–69 页有斯特林数的表格和介绍, 此外还可参考 [28] 的第 1 篇 §4.3 中有关斯特林数的习题.

习题 3030 求级数 $\dfrac{1!}{x+1}+\dfrac{2!}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$ 的和.

解 1 级数在 x 为负整数时无定义. 当 $x=1$ 时通项为 $\dfrac{1}{n+1}$, 级数发散. 当 $x\neq1$ 时级数通项 $u_n(x)$ 的前后项之间有关系式

$$u_n(x)(x+n)=nu_{n-1}(x)\ \ (\text{令 } u_0=1),$$

因此可以得到

$$u_n(x)=\frac{1}{x-1}[nu_{n-1}(x)-(n+1)u_n(x)],$$

这样就可以裂项消去得到部分和的封闭形式:

$$S_n(x)=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right).$$

引用 §5.1.4 的命题 5.3 的 (5.4), 就知道上式括号内的第二项有下列渐近性质:

$$\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=O^*\left(\frac{1}{n^{x-1}}\right)\ \ (n\to\infty),$$

因此当 $x>1$ 时本题的级数收敛, 级数和为 $1/(x-1)$, 而当 $x\leqslant1$ 时级数发散. $\square$

解 2 不用命题 5.3 也可解决. 利用 $x=1$ 时的级数发散, 用比较判别法即可知当 $x<1$ (包括 $x<0$ 但不是负整数时) 时级数发散.

对于 $x>1$, 在得到部分和的封闭形式后, 可以从 §1.1.1 的习题 6 的伯努利不等式得到

$$\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x-1}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{x-1}{n+1}\right)}$$
$$\leqslant\frac{1}{(x-1)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\right)},$$

可见上式当 $n\to\infty$ 时的极限为 0, 因此得到 $S_n(x)\to\dfrac{1}{x-1}$ $(n\to\infty)$. □

习题 3031 在 $x>0$, $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散的条件下, 求级数 $\dfrac{a_1}{a_2+x}+\dfrac{a_1}{a_2+x}\cdot\dfrac{a_2}{a_3+x}+\cdots$ 的和.

解 1 通项 $u_n(x)$ 可裂项如下:

$$u_n(x)=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\frac{a_1\cdots a_n(a_{n+1}+x-a_{n+1})}{x(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$$
$$=\frac{a_1\cdots a_n}{x(a_2+x)\cdots(a_n+x)}-\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{x(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)},$$

因此级数的部分和在裂项消去后成为

$$S_n(x)=\frac{a_1}{x}\left(1-\frac{a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right).$$

将括号内的第二项写为乘积形式:

$$P_n=\prod_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{a_k+x},$$

则从 $x>0$ 和 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 知道每一个因子均小于 1. 以下需要考虑两种情况.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 为正无穷大量 (例如 $a_n=n$), 则在取对数后有

$$\ln\left(\frac{a_k}{a_k+x}\right)=\ln\left(1-\frac{x}{a_k+x}\right)\sim-\frac{x}{a_k}\ \ (k\to\infty),$$

因此从条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}=+\infty$ 可见有 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln P_n=-\infty$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=0$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 至少有一个子列 $\{a_{p_n}\}$ 有界. 设 $M>0$ 使得对每个 n 有 $a_{p_n}<M$, 则就有

$$\frac{a_{p_n}}{a_{p_n}+x}<\frac{M}{M+x}<1.$$

于是在 $n\to\infty$ 时在乘积 P_n 中就有无穷多个小于 $\dfrac{M}{M+x}$ 的因子, 而其他因子至少小于 1, 因此也有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=0$.

这样就证明了本题的级数和是 $\dfrac{a_1}{x}$. □

解 2 [6] 证明解 1 中的 $P_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 有一个好方法, 即是利用 §1.1.1 的习题 6 的伯努利不等式.

由于条件 $x>0$, $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$, 因此有

$$P_n=\left(\frac{1}{1+\dfrac{x}{a_2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1+\dfrac{x}{a_{n+1}}}\right)\leqslant\frac{1}{1+x\left(\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)},$$

从而由条件 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$ 就可推出 $P_n \to 0\ (n\to\infty)$. □

本小节的最后两个习题 3032–3033 用裂项消去法较容易解决, 从略.

5.7.2 级数求和法 II (习题 3006–3017, 3028–3029)

习题 3006 利用逐项微分法求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和.

解 先确定该幂级数的收敛半径 $R=1$, 收敛域为 $[-1,1)$. 记其和函数为 $S(x)$, 则按照幂级数的性质, 在区间 $(-1,1)$ 内可逐项求导得到

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\ \ (-1<x<1).$$

于是在 $x\in(-1,1)$ 时可利用 $S(0)=0$ 而积分得到

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)\ \ (-1<x<1).$$

利用阿贝尔第二定理和 $\ln(1-x)$ 在点 $x=-1$ 处右侧连续, 因此有 $S(-1)=-\ln 2$, 于是和函数 $S(x)=-\ln(1-x)$ 在其定义域上均成立. □

习题 3009 用逐项微分法求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdot\cdots\cdot nd}x^n\ (d>0)$ 的和.

提示: 用 $1-x$ 去乘级数的导数.

解 (概要) 注意这个级数是 §5.5.1 的习题 2820 (二项式级数) 的特例. 实际上只要在该级数中取 $m=-a/d$, 又将 x 换为 $-x$, 就可以得到本题的级数. 以下按提示即可得到 $S'(x)$ 满足的简单的微分方程. 从它不难求出 $S(x)$ (这里可以参考 §4.10 中的习题的解法). 利用习题 2820 中确定的收敛域就可以得到最后答案. □

习题 3011 利用逐项积分法求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和.

解 先确定级数的收敛半径 $R=1$, 收敛域为 $(-1,1)$. 记级数和为 $S(x)$, 则可以在 $(-1,1)$ 上对该幂级数逐项积分得到

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

由于在 $(-1,1)$ 内有

$$\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'=\frac{1}{(1-x)^2}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

因此就有

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

最后两边求导就得到

$$\begin{aligned}S(x) &= \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1). \quad \square\end{aligned}$$

习题 3014 利用阿贝尔方法求级数 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$ 的和.

解 阿贝尔方法在本质上是一种嵌入法. 为了求题中的一个数项级数之和, 我们转向求更一般的幂级数

$$x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

之和. 由于该幂级数的收敛半径 $R = 1$, 其和函数 $S(x)$ 在区间 $(-1, 1]$ 上有定义. 因此 $S(1)$ 就是本题要求的级数和.

不难看到, 由于将一个特殊问题嵌入到幂级数求和问题之中, 就可以使用与幂级数的性质有关的许多分析工具. 对本题来说, 在 $(-1, 1)$ 内对上述幂级数逐项求导得到

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}.$$

利用阿贝尔第二定理, 又因为积分关于变动积分限的连续性, 因此最后就将本题的数项级数求和问题归结为一个定积分计算 (其中的计算过程参见 §3.2.1 的习题 1881):

$$\begin{aligned}S(1) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square\end{aligned}$$

习题 3017 利用阿贝尔方法求级数 $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots$ 的和.

解 考虑幂级数

$$x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

利用 §5.5.1 的习题 2814 中的类似方法, 即可求得该幂级数的收敛半径 $R = 1$, 收敛域为 $[-1, 1]$. 记和函数为 $S(x)$, 则要求 $S(1)$.

对上述幂级数在 $(-1, 1)$ 内逐项求导得到

$$S'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots.$$

利用 $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ 和

$$(2n-1)!! = (-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right),$$

可见这是二项式级数 (参见表格 (5.15)), 于是有

$$S'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

由于 $S(0) = 0$, 于是就得到所求的级数和为

$$S(1)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.\quad\square$$

注　如果看出上述解法一开始写出的幂级数就是 $\arcsin x$ 的泰勒级数展开式, 则用 $x=1$ 代入即可.

习题 3028 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和.

解 1　记通项为 $u_n(x)$, 则可求出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2nx)^2}{(2n+1)(2n+2)}=x^2,$$

因此从达朗贝尔判别法知道当 $|x|<1$ 时级数收敛, 而当 $|x|>1$ 时级数发散. 对于 $x=\pm1$ 则可以用沃利斯公式得到

$$\begin{aligned}u_n(\pm1)&=\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2^{2n}=\frac{4[(2n-2)!!]^2}{(2n)!!(2n-1)!!}\\&=\frac{(2n)!!}{n^2(2n-1)!!}=O^*\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

从而知道级数在 $x=\pm1$ 处均收敛.

将和函数记为 $S(x)$ $(x\in[-1,1])$, 在 $(-1,1)$ 内逐项求导两次, 得到

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1},\quad S''(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2},$$

于是可计算得到

$$\begin{aligned}(1-x^2)S''(x)-xS'(x)&=4+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[n!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n}\\&\qquad-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n}\\&=4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}\cdot[4n^2-2n(2n-1)-2n]=4.\end{aligned}$$

这表明和函数 $S(x)$ $(|x|<1)$ 满足微分方程

$$(1-x^2)S''(x)-xS'(x)=4.$$

两边除以 $\sqrt{1-x^2}$ 后即可凑微分为

$$[\sqrt{1-x^2}S'(x)]'=4(\arcsin x)',$$

利用 $S'(0)=0$, 积分得到

$$S'(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x.$$

再利用 $S(0)=0$, 即可积分得到 $S(x)=2(\arcsin x)^2$ $(-1<x<1)$. 利用原级数于 $x=\pm1$ 处收敛, 即可知上述表达式在 $[-1,1]$ 上成立. $\square$

解 2　令 $y=2x$, 可证明 $|y|<2$ 时级数收敛. 记级数和为 $f(y)$, 则在 $(-2,2)$ 内逐项求导得到

$$f'(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}y^{2n-1}.$$

然后利用 (见 §4.2.6 的习题 2299)

$$\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t,$$

就可以实施以下的逐项积分:

$$f'(y)=\sum_{n=1}^{\infty}y^{2n-1}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t=y\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}t^n(1-t)^n y^{2n}\,\mathrm{d}t,$$

其中的变量为 $t\in[0,1]$, $y\in(-2,2)$ 为参数. 由于在 $t\in[0,1]$ 上 $0\leqslant t(1-t)y^2<1$, 因此上述逐项积分是合理的. 于是就可以继续计算得到

$$f'(y)=y\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)y^2}=\frac{1}{y}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\arctan\frac{y(2t-1)}{\sqrt{4-y^2}}\Big|_{t=0}^{t=1}=\frac{4}{\sqrt{4-y^2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-y^2}}\arcsin\frac{y}{2}.$$

利用 $f(0)=0$ 就可积分得到 $f(y)=2[\arcsin(y/2)]^2$. 用 $y=2x$ 代入, 并利用本题的级数在 $x=\pm1$ 时收敛, 因此级数和为 $2(\arcsin x)^2, x\in[-1,1]$. □

注 解 2 的思路来自于对欧拉积分的了解. 习题 2299 的答案为: $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, 它就是联系两类欧拉积分的公式 (见《习题集》的 §7.4)

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

在 x,y 为正整数 m,n 时的特例.

习题 3029 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的和.

解 1 本题的级数已见于 §5.5.1 的习题 2814, 其收敛域为 $(-4,4)$.

对于 $0\leqslant x<4$, 作代换 $x=4t^2$, 并记级数和为 $F(t)$ ($|t|<1$), 则有

$$F(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!}t^{2n}.$$

这时可计算得到

$$(1-t^2)F(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!}t^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2\cdot 2^{2n-2}}{[2(n-1)]!}t^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2\cdot 2^{2n-2}}{[2(n-1)]!}\cdot\Big(\frac{4n^2}{(2n-1)(2n)}-1\Big)t^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2\cdot 2^{2n-2}}{(2n-1)!}t^{2n}=1+\frac{t}{4}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2t)^{2n}\Big]'.$$

利用习题 3028 的答案, 就有

$$F(t) = \frac{1}{1-t^2}\left(1 + \frac{t}{4}\cdot[2(\arcsin t)^2]'\right)$$
$$= \frac{1}{1-t^2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right).$$

于是当 $0 \leqslant x < 4$ 时级数和为

$$S(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}, \quad x \in [0,4).$$

对于 $-4 < x < 0$ 可用类似的方法求解. 但这里我们介绍一种复方法, 它可以从 $0 \leqslant x < 4$ 的上述结果直接导出 $-4 < x < 0$ 时的答案.

这就是将前面的运算以及习题 3028 中的运算都看成为关于复变量的运算. 然后如 §4.8 的习题 2490 的注所说, 有

$$-\mathrm{i}\arcsin(\mathrm{i}x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

于是就有在 $-4 < x < 0$ 时的级数和为①

$$S(x) = \frac{4}{4-x} + \frac{4\mathrm{i}\sqrt{-x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\mathrm{i}\sqrt{-x}}{2}$$
$$= \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{-x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{\sqrt{-x}}{2} + \frac{\sqrt{4-x}}{2}\right), \quad x \in (-4,0). \quad \square$$

解 2 由习题 3028 的答案 (或 §5.5.3 的习题 2890) 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2} = (\arcsin x)^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

然后在 $(-1,1)$ 内逐项求导两次, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}{(2n)!}x^{2n} = \left(\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在等式两边约去因子 2, 并令 $4x^2 = t$, 又将 t 重记为 x, 就得到解 1 中 $0 \leqslant x < 4$ 的答案. 对于 $-4 < x < 0$ 可与解 1 同样求解. $\square$

解 3 (概要) 这个方法的优点是不需要利用习题 3028 的答案, 但计算相当复杂.

对于 $x \geqslant 0$, 令 $x = 4t^2$, 记和函数为 $F(t)$. 然后将它逐项求导两次, 可得到 $F(t)$ 所满足的二阶微分方程为

$$(1-t^2)F''(t) - 5tF'(t) - 4F(t) = 0.$$

然后求其满足初始条件 $F(0) = 1, F'(0) = 0$ 的解. 对于 $x < 0$ 也可用类似的方法求解 (此解法见 [6]). $\square$

---

① 幂级数的和函数在 $x \geqslant 0$ 和 $x < 0$ 时有表面上完全不同的表达式的情况是常见的. 一个较为平凡的例子是幂级数 $x + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^n}{2n-1} + \cdots$, 其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x \in [0,1), \\ -\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}, & x \in [-1,0). \end{cases}$$

5.7.3 三角级数求和法 (习题 3018–3027)

这里的习题除了用前两个小节的方法之外, 还有两个方法可以考虑: (1) §5.6 的傅里叶级数理论与方法, (2) 用欧拉公式进入复数域中去计算.

第一个习题 3018 中的级数在前面已多次见到 (例如 §5.2.1 的习题 2696(a) 和 §5.4.3 的习题 2775). 在 §5.4.5 的例题 1 中为了讨论其和函数的可微性已经求出了它的和函数, 其中的主要工具是黎曼引理 (即该小节的命题 5.9). 在 §5.6.1 的习题 2941 中则证明了该级数是其和函数的傅里叶级数.

习题 3018 求三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 的和.

解 1 用阿贝尔方法, 考虑关于自变量 α 的幂级数

$$S(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\cdot\alpha^n,$$

其中 x 为参数, 由于级数关于 x 为周期 2π 的奇函数, 因此限制在 $0<x<\pi$ 上即可.

已知 $\alpha=1$ 时级数收敛, 因此只要在 $-1<\alpha<1$ 上求出 $S(\alpha)$ 后再取其极限 $S(1-0)$ 即可得到所要的级数和 $S(1)$.

将上式对 $\alpha\in(-1,1)$ 求导得到

$$\begin{aligned}S'(\alpha)&=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\sin nx=\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\\&=\mathrm{Im}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\frac{\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}.\end{aligned}$$

在 §5.5.2 的习题 2864 和 §5.6.1 的习题§ 2966 已经见到过这个结果.

再利用 $S(0)=0$, 于是有

$$\begin{aligned}S(1)&=\sin x\int_0^1\frac{\mathrm{d}\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sin x\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\alpha-\cos x)}{(\alpha-\cos x)^2+\sin^2 x}\\&=\arctan\left(\frac{\alpha-\cos x}{\sin x}\right)\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1}=\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\\&=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi-x}{2},\end{aligned}$$

这在 $0<x<\pi$ 时成立. 利用级数的每一项 $\dfrac{\sin nx}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上关于其中点 π 均为奇函数, 可知上述和函数的表达式 $\dfrac{\pi-x}{2}$ 在 $0<x<2\pi$ 上成立. □

解 2 若利用复变量 z 的复对数函数 (见 §5.6.1 的习题 2970 的解 2), 则就有 (参见 §5.7.2 的习题 3006 及其注)

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\quad(|z|\leqslant 1,z\neq 1).$$

于是可如下求解 (其中 $0<x<2\pi$):

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} &= \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n} = \operatorname{Im}\{-\ln(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\}\\
&= \operatorname{Im}\{-\ln[(1-\cos x)-\mathrm{i}\sin x]\} = \operatorname{Im}\Big\{-\ln\Big[\sqrt{2-2\cos x}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{-\sin x}{1-\cos x}}\Big]\Big\}\\
&= \arctan\frac{\sin x}{1-\cos x} = \arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right)\\
&= \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}. \quad \Box
\end{aligned}
$$

习题 3022 求三角级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 的和.

解 除了用习题 3018 的类似解法之外, 也可以用该习题的结果来求本题的级数和. 由于级数的和函数是周期 2π 的奇函数, 因此以下只考虑 $0<x<\pi$. 利用

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}\\
&= \frac{\pi-x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi-2x}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

可见在 $(-\pi,\pi)$ 上本题的级数和为 $\dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sgn}x$. $\Box$

习题 3026 求三角级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ 的和.

解 这里利用复自变量的函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 的展开式是方便的. 于是就有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!} &= \operatorname{Re}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n!}\Big)\\
&= \operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\big) = \operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x}\big) = \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x). \quad \Box
\end{aligned}
$$

习题 3027 画出曲线 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0.$

解 (提示) 求出级数和后就不难作图. 用三角函数的积化和差公式有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)-\cos n(x+y)}{n^2},
$$

于是问题归结为求下列级数的和:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}.
$$

这可以利用傅里叶级数的逐项积分方法从习题 3018 的级数展开式得到. $\Box$

§5.8 利用级数求定积分 (习题 3034–3050)

内容简介 除了应用函数项级数的逐项积分定理之外, 对于广义积分的级数计算方法需要讨论其合理性. 在第一小节中处理积分区间有界的习题, 在第二小节中则介绍两个工具, 它们可以统一处理积分区间有界和无界的习题. 最后一个小节则结合习题 3050 介绍渐近级数的基本概念.

5.8.1 利用级数求定积分 I (习题 3034–3038, 3041–3044, 3046–3049)

习题 3034 利用被积函数的级数展开式计算 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

解 这是一个广义积分, $x=1$ 为奇点. 由于 $\ln x$ 的原函数可求出 (见 §3.1.6 的习题 1791), 因此可按照广义积分定义证明该积分收敛.

利用对数函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式就可将被积函数展开如下:

$$\ln\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

且可知该幂级数在 $[0,1)$ 上收敛, 因此在该区间内的闭区间上一致收敛, 但由于在 $x=1$ 处发散, 因此在 $[0,1)$ 上不一致收敛. 于是不能直接用逐项积分法计算本题的积分.

将积分变量改记为 t, 对于 $x\in(0,1)$, 在区间 $[0,x]$ 上可以逐项积分得到

$$\int_0^x \ln\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

令 $x\to 1-0$, 在左边就按照广义积分的定义得到 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$, 而在右边则从该幂级数于 $x=1$ 时收敛, 可从阿贝尔第二定理知道极限 $x\to 1-0$ 可以与级数求和的运算交换顺序 (或者用 §5.5.3 的命题 5.11 之 (1)), 从而得到早在 §1.2.1 的习题 56 已见过的级数, 于是就有

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1. \quad \Box$$

习题 3035–3036 是常义积分的级数计算, 用幂级数的逐项求积即可解决. 从略.

习题 3037 利用被积函数的级数展开式计算 $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,\mathrm{d}x\ (p>0, q>0)$.

解 这是可能有两个奇点 $x=0$ 和 $x=1$ 的广义积分.

先用代换 $x^q=t$ 以简化问题. 这样就有 $x=t^{\frac{1}{q}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}\,\mathrm{d}t$, 于是得到积分

$$\frac{1}{q}\int_0^1 t^{p'-1}\ln(1-t)\,\mathrm{d}t,$$

其中的参数 $p'=\frac{p}{q}>0$.

由 $\ln(1-t)\sim -t\ (t\to +0)$ 可见 $t=0$ 不是奇点, 于是只有 $t=1$ 是奇点.

用习题 3034 的解中的类似方法, 取 $0<t<1$, 将被积函数的第二个因子 $\ln(1-t)$ 展开, 并在 $[0,x]$ $(0<x<1)$ 上作逐项积分计算得到

$$\frac{1}{q}\int_0^x t^{p'-1}\ln(1-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{q}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+p'-1}}{n}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n+p'-1}}{n}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+p'}}{n(n+p')},$$

其中逐项积分的合理性可利用幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n}$ 在区间 $[0,x]$ $(0<x<1)$ 上一致收敛, 因此每一项乘以在 $[0,1]$ 上的有界函数 $t^{p'}$ 后仍然在 $[0,x]$ 上一致收敛.

由于在 $0<x<1$ 时最后一式的级数有强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 因此该级数在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛. 于是 $x\to1-0$ 可与级数求和交换顺序, 而在左边就得到所求的积分. 于是最后的答案为

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(qn+p)}.\quad\square$$

习题 3038 利用被积函数的级数展开式计算 $\displaystyle\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

解 由于 $\ln(1-x)\sim -x$ $(x\to0)$ 和 $x\ln x\to0$ $(x\to+0)$, $x=0$ 不是奇点. 同样可知 $x=1$ 也不是奇点. 于是本题的积分为常义积分.

将第二个因子 $\ln(1-x)$ 展开为幂级数, 这样就得到

$$\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln x}{n}\,\mathrm{d}x.$$

将函数 $x^n\ln x$ 在 $x=0$ 处按照连续延拓取值 0, 然后在 $[0,1]$ 上求其取绝对值后的最大值. 从 $(x^n\ln x)'=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=0$ 可求出其最小值点为 $x_0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$, 最小值为 $-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$. 于是上述积分号下的函数项级数就以 $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2}$ 为强级数, 从而保证了可以逐项积分计算如下 (其中利用了 §4.2.6 的习题 2286 的答案):

$$\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^n\ln x}{n}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=2-\frac{\pi^2}{6}.\quad\square$$

习题 3044 证明 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

解 (概要) 由于 $\lim\limits_{x\to+0}x^x=1$ (见 §2.9.2 的习题 1342), 左边的积分为常义积分.
将被积函数写为 $x^{-x}=\mathrm{e}^{-x\ln x}$, 然后展开, 这样就得到

$$\frac{1}{x^x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n.$$

以下的做法与习题 3038 几乎完全相同, 这里只写出最后的计算过程:

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1(x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.\quad\square$$

习题 3046 证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n!}\ (n=0,1,2,\cdots)$.

解 用欧拉公式有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x}=\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x),$$

因此就有

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

右边积分的被积函数可展开如下:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\cos nx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}\cos nx=\sum_{k=0}^{\infty}\cos nx\cdot\frac{\cos kx+\mathrm{i}\sin kx}{k!}.$$

于是可见右边级数的每一项取实部和虚部之后所得到的两个级数在 $[0,2\pi]$ 上都是一致收敛的. 这样就可如下逐项积分, 其中还利用了在 $[0,2\pi]$ 上的三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 的正交性:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\cos nx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx+\mathrm{i}\sin kx}{k!}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{n!}\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{n!}.\quad\square$$

习题 3049 (泊松积分) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$.

解 对于 $|\alpha|<1$ 的情况, 在 §5.6.1 的习题 2969 已经求出了被积函数的傅里叶级数展开式:

$$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\cos nx,$$

利用傅里叶级数的逐项积分方法, 它不要求级数在积分区间上的一致收敛性, 由于对每个 n 有 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0$, 从而就得到

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x=0.$$

对于 $|\alpha|=1$, 这时的积分为广义积分. 从习题 2970 (以及习题 2971) 可知道在 $|\alpha|=1$ 时上述级数仍然是傅里叶级数, 因此同样可逐项积分得到积分为 0 的结果①.

① $|\alpha|=1$ 时的积分可用 §4.4.1 的习题 2353(a) 的欧拉积分得到.

对于 $|\alpha|>1$, 可从 $|\alpha|<1$ 的上述结果推出得到

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\left[2\ln|\alpha|+\ln\left(1-\frac{2\cos x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\ln|\alpha|.\quad\square$$

注　泊松积分有多种计算方法. §4.1.1 的习题 2192 给出用黎曼积分和计算泊松积分的法. 在 [15] 的第二卷中给出了泊松积分的 4 种计算方法, 分别见其 307 小节的 4), 314 小节的 14), 440 小节的 11), 511 小节的 7). 又见 数学译林 第 22 卷 (2003) 第 3 期, 278–281 页.

5.8.2　利用级数求定积分 II (习题 3039–3040, 3045)

在上一小节中用级数求积分的习题都属于积分区间为有界的情况. 对于积分区间无界的情况, 即使函数项级数在该区间上一致收敛, 一般来说也不能逐项积分. 因此我们将先介绍在这方面的两个一般性工具, 然后处理本小节标题中列出的几个习题.

还可以指出, 上一小节中涉及有界区间上的广义积分的习题也可以用这两个工具统一解决.

为简明起见, 只讨论在积分区间 $[a,b]$ 上仅有一个奇点 b 的情况, 其中 b 可以为有限数, 也可以是 $+\infty$.

命题 5.14 设非负项的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项在 $[a,b)$ 上可积, 级数的和函数为 $S(x)$ $(a\leqslant x<b)$, 且对每个 $c\in(a,b)$, $S(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上常义可积, 则以下逐项积分运算

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.28}$$

在左边或右边为有限数时成立.

证　分两点来证.

(1) 设 (5.28) 的左边为有限数, 即和函数 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积.

这时的 (5.28) 即是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

其中余项 $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此问题归结为对级数余项的积分估计.

对于 $c\in(a,b)$, 利用级数项的非负性, 有

$$0\leqslant\int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c R_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b R_n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^c R_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积, 对于给定的任意 $\varepsilon>0$, 存在 $c\in(a,b)$, 使得上式右边的第二项小于 $\varepsilon/2$.

取定这个 c, 从 $0 \leqslant R_n(x) \leqslant S(x)$ 和 $S(x)$ 于 $[a,c]$ 上常义可积, 可知在 $[a,c]$ 上 $R_n(x)$ 对于所有的 n 一致有界, 从而可以用阿尔泽拉定理 (见 §5.4.5 的命题 5.8) 推出有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c R_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

因此对同一个 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立 $0 \leqslant \int_a^c R_n(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是就成立 $0 \leqslant \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. 这样就证明了 (5.28) 成立.

(2) 设 (5.28) 的右边为有限数, 即右边的级数收敛. 记其和为 U, 则从 (1) 可知, 只需要证明 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积就保证等式成立.

任取 $c \in (a,b)$, 则有

$$\int_a^c \sum_{k=1}^n u_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_a^c u_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U.$$

因 $S(x)$ 于 $[a,c]$ 上有界, 因此可再用阿尔泽拉定理, 令 $n\to\infty$, 就得到

$$0 \leqslant \int_a^c S(x)\,\mathrm{d}x \leqslant U.$$

由于这个不等式对每一个 $c \in (a,b)$ 成立, 而被积函数$S(x)$ 非负, 因此即可推出 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积. 于是从 (1) 即知 (5.28) 成立. □

注 若假设 $u_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 和 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续, 则即可推出级数在 $[a,c] \subset [a,b)$ 上一致收敛 (在多数教科书中称为狄尼定理), 这时可不必用阿尔泽拉定理.

利用级数与其部分和数列的关系, 就可以从命题 5.14 得到关于函数序列的下列结论. 证明从略.

推论 设关于 n 为单调的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a,b)$ 上可积, 其极限函数为 $F(x)$ $(a \leqslant x < b)$, 且对每个 $c \in (a,b)$, $F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上常义可积, 则以下关于 $n\to\infty$ 取极限和积分运算的顺序交换

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

在左边或右边为有限数时成立.

若 (5.28) 有一边不是有限数, 则就得到 $+\infty = +\infty$. 因此我们可以说, 对同号级数 (或单调函数序列) 来说, 逐项积分的等式 (5.28) (或极限与积分交换顺序) 无条件成立.

然而对于一般的函数项级数, 为了保证 (5.28) 成立则需要另加条件. 下面是经常有用的一个工具. 其中的 $F(x)$ 称为控制函数.

命题 5.15 (控制收敛定理) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在 $[a,b)$ 上可积, 级数的和函数为 $S(x)$ $(a \leqslant x < b)$, 且对每个 $c \in (a,b)$, $S(x)$ 在区间 $[a,c] \subset [a,b)$ 上常义可积, 又若存在于区间 $[a,b)$ 上的可积函数 $F(x)$, 使得在区间 $[a,b)$ 上的部分和函数序列 $S_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 成立不等式 $|S_n(x)| \leqslant F(x)$, 则成立以下逐项积分等式:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.29}$$

证 从条件可知在 $[a,b)$ 上成立 $|S(x)| \leqslant F(x)$, 因此 $S(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积. 于是有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b [S_n(x)-S(x)]\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^c [S_n(x)-S(x)]\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_c^b [S_n(x)-S(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^c [S_n(x)-S(x)]\,\mathrm{d}x\right| + 2\int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从 $F(x)$ 于 $[a,b)$ 上可积, 对给定的任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in (a,b)$, 使得上式第二项小于 $\varepsilon/2$. 然后固定这个 c, 对上式的第一项用阿尔泽拉定理即可. 以下从略. □

注 若函数项级数的绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 $[a,b)$ 上收敛, 且其和函数在 $[a,b)$ 上可积, 则就可以将它用作为控制函数, 从而 (5.29) 成立.

与命题 5.14 一样可以得到命题 5.15 在函数序列上的推论, 从略.

习题 3039 利用被积函数的级数展开式计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}$.

解 被积函数展开得到

$$\begin{aligned}\frac{x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} &= \frac{x\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} \\ &= x\mathrm{e}^{-2\pi x}(1+\mathrm{e}^{-2\pi x}+\cdots+\mathrm{e}^{-2n\pi x}+\cdots),\end{aligned}$$

其中每项大于 0. 又可用 §4.4 的判别法知道题设的广义积分收敛, 因此用命题 5.14 即可作逐项积分计算. 这样就有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2n\pi x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x\mathrm{e}^{-2\pi n x}}{2\pi n}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2\pi n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi n x}\,\mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}. \quad \square\end{aligned}$$

下面两题的被积函数的级数展开式不是同号级数, 这时需要用命题 5.15, 其中的控制函数可以参考该命题的注.

习题 3040 利用被积函数的级数展开式计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

习题 3045 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}$.

5.8.3 补注 (习题 3050)

下面先给出习题 3050 的解答, 然后说明为什么要专门为此题设立这个小节.

习题 3050 证明公式:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+(-1)^n\frac{\theta_n n!}{a^{n+1}},$$

其中 $a>0$ 且 $0<\theta_n<1$. 若于该公式中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{100+x}\,\mathrm{d}x,$$

其精确程度如何?

解 对广义积分作分部积分就有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\,\mathrm{d}x&=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^2}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^3}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明对每个 n 成立以下公式:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

由于上式的最后一个积分满足不等式

$$0<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(a+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a^{n+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^{n+1}},$$

因此存在 $0<\theta_n<1$, 使得公式的最后一项可表示成为 $(-1)^n\dfrac{\theta_n n!}{a^{n+1}}$.

对于 $a=100$, 取公式右边的前两项作为积分的近似值, 则有

$$0<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{100+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^4}+\frac{2\theta_2}{10^6},$$

因此误差不超过 2×10^{-6}. □

注 用 Mathematica 软件可计算出 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{100+x}\,\mathrm{d}x\approx0.009\,901\,942$, 而取两项得到的近似值为 0.009 9, 可见误差约为 1.9×10^{-6}, 确实符合上述估计.

现在回顾习题 3050 的上述解法, 同时与本节的其他所有习题作比较, 可以看出有明显的不同.

首先, 习题 3050 不像是用级数来计算积分, 而只是给出了近似计算; 其次, 展开式右边像是 §2.9 那样的带拉格朗日型余项的泰勒公式, 而不是无穷级数; 再次, 如果将右边改写为无穷级数, 则会得到什么? 它是否是积分的一个无穷级数展开式?

从上述的最后一个问题开始. 如果将习题中的公式右边的最后一项去掉, 而改写为一个无穷级数, 则就得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+\cdots,$$

其中 $a>0$. 实际上只要将被积函数的因子 $\dfrac{1}{a+x}$ 展开为幂级数, 乘以 e^{-x} 再逐项积分就可以得到上式右边的级数. 容易看出, 无论 $a>0$ 取什么值, 级数的通项当 $n\to\infty$ 时

不是无穷小量, 因此这个级数必定发散. 于是可见上述逐项积分运算是没有根据的, 最后得到的等式也是错误的, 从而上式右边的级数只是一个形式记号.

于是我们看到, 在习题 3050 的后半题中, 我们实际上是用一个发散级数的前两项来对于左边的积分作近似计算, 而且效果似乎还不错. 这超出了本章关于无穷级数理论的范围. 它有什么根据?

这里可以与《习题集》的 2003 年版的序言相联系. 这个序言是卓里奇专门为这个新版本而写的, 其中有一处提到了分析中的渐近方法, 并希望在数学分析的习题集中有所反映. 习题 3050 虽然并非是为新版而增加的, 但它恰巧就是渐近方法的一个例子.

下面只给出用于刻画 $x \to +\infty$ 时的函数 $f(x)$ 的渐近性态的渐近幂级数的定义.

考虑下列级数

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots,$$

其中允许当 x 固定时该级数发散.

如果固定 n 时成立下列等式:

$$f(x) - \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \ (x \to +\infty),$$

则将这个渐近关系式记为

$$f(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} \ (x \to +\infty).$$

定义 如果对每一个正整数 n 成立上述渐近关系式, 则记为

$$f(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \cdots \ (x \to +\infty),$$

称右边的级数为函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的渐近幂级数, 并称上述关系式为 $f(x)$ 的渐近幂级数展开式.

注 不难用泰勒级数理论证明, 如果上述形式的级数当 x 充分大时确实收敛于某个函数 $f(x)$, 则这个级数一定就是其和函数 $f(x)$ 的渐近幂级数展开式. 然而定义中并不要求该幂级数收敛. 因此渐近幂级数展开式是幂级数展开式的一种推广.

现在回顾习题 3050, 就可以看出, 将参数 a 作为自变量, 则等式右边改换为无穷级数之后就是左边积分 (以 a 为参变量) 的渐近级数展开式. 这时的等号按照上述定义应当改为 $\sim$[①]. 习题 3050 表明, 发散的渐近级数仍然可能用于近似计算.

在 §5.10.2 之 2 将在讨论阶乘的斯特林公式时, 再次使用渐近级数的概念.

关于渐近方法的材料很多, 这里只举出以下两种教科书. 一个简明的介绍是 [15] 的 1954 年版的中译本的第二卷的 502–503 两个小节, 其中的第一个例子就是习题 3050 中的渐近级数展开. 在该书的新版中将这两个小节扩充为 §12.6. 在卓里奇的数学分析教材 [36] 的第二卷中, 整个第十九章 (该书的最后一章) 就是用于介绍渐近展开, 其中还包含了在这方面最为基本的拉普拉斯方法. 著名数学家柯尔莫哥洛夫和阿诺尔德对该教材有很高的评价, 渐近方法无疑是该书的特色之一.

① 这里的记号 $\sim$ 与 §1.6 (但从 §1.5.4 起已广泛使用) 中的用法一致. 实际上我们在前面已多次使用“渐近性态”和“渐近等式”等说法.

§5.9 无穷乘积 (习题 3051–3110)

内容简介 本节分为以下几个部分: 第一小节是一些较为简单的无穷乘积的直接计算, 第二小节主要讨论无穷乘积的敛散性判定, 其中包括绝对收敛和条件收敛, 第三小节则包含了无穷乘积的一些理论方面的应用问题, 最后一个小节对伽马函数的无穷乘积定义与积分定义的等价性作补充.

由于不是每一本教科书都有无穷乘积的介绍, 这里对于无穷乘积的基本概念作一些说明. 需要进一步材料的可看 [5, 15, 20] 中的有关部分.

如同无穷级数是有限项相加求和的推广, 无穷乘积是有限项相乘求积的推广. 最平凡的例子就是 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, 即每一项等于同一个数 a 的无穷乘积.

实际上, 早在《习题集》§1.2 的数列的习题中, 就同时出现了无穷级数与无穷乘积的例子. 具体来说, 在 §1.2 中的习题 57, 78–80 (其中习题 80 见 §1.2.4)①, 在 §1.5 中的习题 629–630 (见下面的习题 3058, 3056) 等都是无穷乘积的例子.

在学习无穷级数时我们知道, 每个数列的极限问题都可转换为无穷级数求和. 与此相似, 数列的极限也可转换为无穷乘积的求积问题. 只是这里要求数列中不含有 0.

具体来说, 设数列 $\{x_n\}$ 的每一项不等于 0, 将通项写为乘积形式:

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

然后记 $p_1 = x_1$, $p_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ $(n = 2, 3, \cdots)$, 则就有 $x_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$. 与求和的简缩记号 $\sum$ 类似, 在高等数学中经常将上述乘积记为 $\prod\limits_{k=1}^{n} p_k$.

从本节的 §5.9.4 中的无穷乘积的多个应用实例可见, 上述转换, 即将数列极限转换为无穷乘积, 即是无穷乘积应用中的基本方法.

现在引入无穷乘积的一般记号.

数列 $\{p_n\}$ 的无穷乘积记为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. 将该数列的前 n 项的乘积 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 称为该无穷乘积的部分乘积 (数列). 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, 则就定义无穷乘积的意义为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n = P,$$

并称该无穷乘积的积为 P. 反之, 在部分乘积数列 $\{P_n\}$ 发散时, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 只是一个形式记号.

由此可见, 无穷乘积的定义与无穷级数的定义几乎完全平行.

① 习题 57 是求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$, 习题 78 是求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \cdots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$, 习题 79 是求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$, 习题 80 是求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$.

下面是两者之间的两点差别, 其中的第 (2) 点是对无穷乘积敛散性的补充定义.

(1) 在构成无穷乘积的数列 $\{p_n\}$ 中只要出现一个 0, 则按照上述定义就会导致无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 0$, 这与无穷级数的任何一个个别项都不可能影响级数的敛散性不同.

于是在今后, 当研究 $\{p_n\}$ 的无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 时, 一般总假定每一个 p_n 都不等于 0.

(2) 在无穷乘积的收敛和发散的定义中也有与无穷级数不同之处, 即只有当部分乘积的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n \neq 0$ 时, 我们才称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 否则就称该无穷乘积发散.

于是在发散的无穷乘积中包含了 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的一种特殊情况, 并将这样的无穷乘积称为“发散于 0”.

初学者可能觉得这样的收敛和发散的定义不太合理. 事实上将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 从收敛中区分出来并将它归入发散当然是人为的. 只是以后可以看到, 这样的定义会在很多方面带来方便, 从而就逐渐会习惯于这样的定义.

注意: 由于上述收敛与发散的定义, 在发散的无穷乘积中我们往往要关心它是否发散于 0, 因为这是有意义的. 另一方面, 收敛的无穷乘积的积必定是不等于 0 的一个数, 这在许多应用中也是重要的.

《习题集》于本节的习题之前举出了两个重要的无穷乘积, 这就是正弦函数和余弦函数的下列无穷乘积展开式:

$$\begin{aligned} &(1)\ \sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ (-\infty < x < +\infty), \\ &(2)\ \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]\ (-\infty < x < +\infty). \end{aligned} \tag{5.30}$$

在展开式 (1) 中用 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 代入就得到沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

如 §5.1.3 的命题 5.1 的注所示, 这种形式与那里的 (5.2) 等价.

在 (5.30) 中的这两个公式很有用, 可是它们的证明不容易, 其中 (1) 的证明见 [34] 的例题 13.4.3, 更详细的叙述见 [15] 的第二卷的 408 小节. 导出公式 (2) 的方法之一是利用 $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ 从公式 (1) 得到, 其中还要用沃利斯公式. (建议读者将它作为练习题来做.)

5.9.1 一些简单的无穷乘积计算 (习题 3051–3064)

这些比较简单的习题的要点是有可能求出部分乘积的封闭形式, 然后取极限. 所用的技巧之一类似于无穷级数计算中的裂项消去法 (即连锁消去法), 即将通项 p_n 作适当的因式分解, 使得在部分乘积中可以对消掉大量的中间因式, 从而得到简单的封闭形式. 这里当然可能用到许多代数技巧和三角恒等式.

习题 3051 证明 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

解 计算部分乘积

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2\cdot n},$$

可见有 $P_n\to\frac{1}{2}$. □

习题 3052 证明 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$.

解 计算部分乘积 $(n\geqslant 2)$

$$\begin{aligned}P_n&=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right]\\&=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\cdot\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right),\end{aligned}$$

在其中利用 $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$ 即可连锁相消得到

$$P_n=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}\to\frac{2}{3}.\quad\square$$

习题 3055 证明 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

提示 本题为下一个习题 3056 的特例. □

习题 3056 证明 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

提示 对部分乘积 P_n 乘以 $2^n\sin\frac{x}{2^n}$ 将其简化整理后取极限即可. 本题已见于《习题集》的 §1.5 的习题 630, 所用的三角恒等式又见于 §2.1.4 的习题 1026. □

习题 3058 证明 $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1)$.

提示 对部分乘积 P_n 乘以 $1-x$ 将其简化, 然后取极限即可. 本题已出现在《习题集》的 §1.5 的习题 629 中. □

习题 3059 (韦达公式) 证明 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\cdots$.

提示 乘积各项的分母在 §1.2.4 的习题 81 等处出现过. 利用该题解 4 中的方法, 从 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 开始, 即可看出问题已转化为习题 3055, 它又是习题 3056 的特例. □

注 本题的公式是由韦达于 1593 年发现的, 它是数学史上出现的第一个无穷乘积. 与此类似的还有前面已多次用到的沃利斯公式 (5.2), 它是微积分的先驱之一的沃利斯于 1655 年发现的. 它们恰巧都是圆周率的无穷乘积展开式. 这两个公式的发现代表着人类文化中对数 π 的认识的新阶段的开始. 对此有兴趣的读者可以参考科普读物 [4].

习题 3060 证明 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

解 与前面从 (5.30) 推出沃利斯公式类似, 利用其中正弦函数的无穷乘积展开式 (1), 令 $x=\frac{\pi}{3}$ 代入, 就得到本题的无穷乘积为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{x}{\sin x}\bigg|_{x=\pi/3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\quad\square$$

习题 3064 证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ $(a>0)$ 的收敛性并求出其值.

解 写出其部分乘积

$$P_n=a^{-1+\frac{1}{2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}},$$

然后利用 §5.2.1 的习题 2661, 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=a^{-\ln 2}$. $\square$

5.9.2 无穷乘积的敛散性判别 (习题 3065–3099)

与无穷级数类似, 存在大量难以直接计算的无穷乘积. 因此一般来说判定无穷乘积的敛散性是第一个重要问题. 在收敛时, 即使求不出它的积, 也至少可以作近似计算.

由于无穷级数方面已经有充分发展的敛散性判别法, 因此在绝大多数情况, 我们总是通过对无穷乘积取对数而将它转换为无穷级数来处理. 当然这只有当无穷乘积的通项大于 0 才有可能取其对数. 我们即将看到, 这个合理的要求是可能满足的.

设 $\{P_n\}$ 是无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的部分乘积数列, 则在该无穷乘积收敛时, 按照定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P\neq 0$. 于是就可以推出

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}}=1.$$

这样就已证明, 收敛的无穷乘积的通项 p_n 必定收敛于 1[①]. (初学者可以将此与收敛的无穷级数的通项必定收敛于 0 作对比.)

由此可见, 对于收敛的无穷乘积来说, 当 n 充分大时, 其通项必定大于 0. 反之, 不满足这个要求的无穷乘积必定发散, 从而已不必再考虑.

---

① 这里已经可以看到, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=0$ 的情况排除在收敛概念之外的合理性. 实际上, 对于这类发散于 0 的无穷乘积来说, 其通项显然不一定会趋于 1. 例如, 由 $p_n\equiv\frac{1}{2}$ 组成的无穷乘积就是如此.

为方便起见，在今后若无其他说明时，经常将通项写为 $p_n = 1 + \alpha_n\ (n = 1, 2, \cdots)$，其中总假设条件 $\alpha_n \neq -1\ (n = 1, 2, \cdots)$ 成立. 由以上论证可知，对收敛的无穷乘积来说，必有 $\alpha_n \to 0$，从而当 n 充分大时，也必有 $|\alpha_n| < 1$.

于是就得到联系无穷乘积的敛散性与无穷级数的敛散性的一般性等价关系:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)\ \text{收敛},$$

其中对右边假设条件 $1 + \alpha_n > 0$ 对每个 n 满足，否则可以假设此条件对大于等于某个 n_0 的 n 满足，而将右边的求和改为从 $n = n_0$ 开始，这时上述等价关系仍然成立.

按照 §5.1 和 §5.2 的思路，我们先考虑 $\{\alpha_n\}$ 为同号的情况. 这时上式右边的无穷级数是同号级数，或至少当 n 充分大时同号，因此可以用等价量判别法. 从 $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$ 即有 $\ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n\ (n \to \infty)$，因此就得到下面的第一个判别法，它在原则上解决了 $\{\alpha_n\}$ 同号的情况.

无穷乘积收敛性判别法 I 设数列 $\alpha_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 当 n 充分大时同号，则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ \text{收敛},$$

特别当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = -\infty$ 时，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 发散于 0.

对于数列 $\alpha_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 非同号的情况，我们只给出常用的一个充分性判别法.

无穷乘积收敛性判别法 II 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\ \text{收敛},$$

且当后者发散时，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 发散于 0.

证 利用 $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$ 和泰勒公式 $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\ (x \to 0)$，因此就有

$$\ln(1+\alpha_n) - \alpha_n \sim -\frac{\alpha_n^2}{2}\ (n \to \infty).$$

这表明以上式左边为通项的无穷级数为同号级数，且其收敛性与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 相同. 最后再利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 已经收敛的条件，即可推出所要的结论①. □

---

① 《习题集》后面的习题 3098 和 3099 与上述判别法 II 直接有关，这里只说明它们的意义，具体的计算从略. 习题 3098 举例说明，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 可能发散. 因此判别法 II 只能是充分性判别法. 同样，习题 3099 举例说明，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 同时发散也是可能的. 因此后者不可能单独用于判定无穷乘积发散.

回忆在 §5.2 的一般项级数的收敛性判别法, 其中绝对收敛级数必定收敛的定理是很有用的基本定理. 对于无穷乘积也有类似的概念和定理.

由于收敛无穷乘积的通项 p_n 当 n 充分大时必定大于 0, 因此绝对收敛的无穷乘积不是通过对 p_n 取绝对值来定义的, 而是采取如下定义.

定义 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$ 收敛, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 为绝对收敛. 若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛但非绝对收敛, 则称为条件收敛.

与条件收敛的无穷级数类似, 可以对于条件收敛的无穷乘积建立类似于黎曼定理 (见 §5.2.2 的命题 5.5) 的结论. 反之, 绝对收敛的无穷乘积则可以任意交换相乘各项的顺序而保持其积不变.

由定义可见, 绝对收敛的无穷乘积必定收敛. 又由 $\ln(1+\alpha_n)\to 0$ 可推出 $\alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$ 和 $\ln(1+\alpha_n)\sim\alpha_n\ (n\to\infty)$, 从而可推出下列判别法:

无穷乘积收敛性判别法 III

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{绝对收敛} &\iff \prod_{n=1}^{\infty}(1+|\alpha_n|)\ \text{收敛}\\ &\iff \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\ \text{收敛}\\ &\Longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{收敛}.\end{aligned}$$

证 不引入绝对收敛概念也可以直接证明上式最后一个蕴含关系.

实际上, 若绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 则即可推知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 收敛[①], 因此用前述的无穷乘积收敛性判别法 II 即可. □

在判定具体的无穷乘积敛散之前, 先看一道理论性习题.

习题 3065 (a) 可否由无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的收敛性得出无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 的收敛性?

解 这里不是“可否”的问题, 答案恰恰是: 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 必定发散.

实际上, 从条件可知 $p_n\to 1\ (n\to\infty)$ 和 $q_n\to 1\ (n\to\infty)$ 成立, 因此就推出

$$\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=2,$$

从而无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 发散. □

---

① 前者是级数中的基本定理, 后者则可参见 §5.1.1 的习题 2568.

习题 3066 研究无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 从部分乘积 $P_n \leqslant p_n = \frac{1}{n}$ 即可知此无穷乘积发散于 0. □

习题 3067 研究无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 的收敛性.

解 1 本题可直接求出部分乘积的封闭形式, 即有

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\Big)\cdot\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k+2}\Big)$$
$$= (n+1)\cdot\frac{2}{n+2} \to 2\ (n\to\infty),$$

可见收敛 (本题中的无穷乘积与《习题集》前面的习题 3062 相同). □

解 2 用收敛性判别法, 从通项 p_n 写出

$$\alpha_n = p_n - 1 = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1 = \frac{1}{n(n+2)},$$

可见从正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 收敛知道本题的无穷乘积收敛. □

习题 3070 研究无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n^2-1}{n^2+1}\Big)^p$ 的收敛性.

解 $p=0$ 时 $p_n\equiv 1$, 当然收敛. 否则有

$$\alpha_n = p_n - 1 = \Big(1-\frac{2}{n^2+1}\Big)^p - 1 \sim -\frac{2p}{n^2+1}\ \ (n\to\infty),$$

可见对任何 p, $\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ 总是同号的收敛级数, 因此本题的无穷乘积收敛. □

习题 3073 研究无穷乘积 $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ 的收敛性.

解 1 从部分乘积 $P_n = \prod_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{k+1}{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \to 0\ (n\to\infty)$, 可见本题的无穷乘积发散于 0. □

解 2 分析 $\alpha_n = p_n - 1$ 的渐近性态, 得到

$$\alpha_n = -\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = -\frac{1}{\sqrt{n+2}\,(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\,)} \sim -\frac{1}{2n}\ \ (n\to\infty),$$

于是从 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = -\infty$ 知道本题的无穷乘积发散于 0. □

习题 3076 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$ 的收敛性.

解 由于乘积的每一项大于 0, 因此该无穷乘积收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ 收敛. 利用柯西积分判别法, 从下列广义积分计算

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\cdot \ln x\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1,$$

可见本题的无穷乘积收敛. □

注 也可以利用 $\ln x = o(x^{\varepsilon})\ (x \to +\infty)$ 对任何 $\varepsilon > 0$ 成立 (见 §1.6 的习题 651(e)) 而推出上述广义积分收敛.

习题 3081 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \dfrac{(1+1/n)^{n^2}}{x^n}\right]$ 的收敛性.

解 由于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}\ (n \to \infty)$, 因此当 $|x| < \mathrm{e}$ 时, 无穷乘积收敛的必要条件 $p_n \to 1\ (n \to \infty)$ 不能成立, 从而发散.

对于 $|x| = \mathrm{e}$, 可以计算 $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|$ 如下:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| &= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left[-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

可见这时的无穷乘积也发散.

对于 $|x| > \mathrm{e}$ 用柯西根值判别法, 有

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \frac{1}{|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{|x|}\ (<1)\ \ (n \to \infty),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 从而由判别法 III 知道无穷乘积收敛. □

习题 3083 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x^n}{n^p}\right)\cos\dfrac{x^n}{n^q}$ 的收敛性.

解 若 $|x| < 1$, 则通项的两个因子当 $n \to \infty$ 时的极限都是 1. 这时可分别考虑两个无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x^n}{n^p}\right)$ 和 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{x^n}{n^q}$. 前者利用级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^p}$$

收敛就可从判别法 III 推知收敛, 而后者可利用

$$\ln\cos\frac{x^n}{n^q} \sim -\frac{x^{2n}}{2n^{2q}}\ \ (n \to \infty),$$

从而可用判别法 I 推知也收敛. 合并两者, 即可推出本题的无穷乘积收敛.

若 $x=-1$, 则在无穷乘积中的第一项 $p_1=0$, 因此其积为 0[①].

若 $x=1$, 则可证明为了通项 p_n 当 $n\to\infty$ 时收敛于 1, 必须 $p>0$ 和 $q>0$ 同时成立. (由于这个证明比较复杂, 我们将它写为补注小节中的命题 5.17.) 这时有

$$\begin{aligned}\ln p_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)+\ln\cos\frac{1}{n^q}\\ &= \frac{1}{n^p}+O\Big(\frac{1}{n^{2p}}\Big)-\frac{1}{2n^{2q}}+O\Big(\frac{1}{n^{4q}}\Big)\\ &= O^*\Big(\frac{1}{n^{\min\{p,2q\}}}\Big)\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

因此当 $\min\{p,2q\}>1$ 时无穷乘积收敛, 否则发散.

若 $|x|>1$, 则通项 p_n 的第一个因子为无穷大量. 若能够证明第二个因子不是无穷小量, 则 $p_n\to 1$ 不可能成立, 因此级数发散. 然而目前还未能找到上述论断的证明, 只能将它作为一个未解决问题提出以待来者 (见本书的使用说明). □

对于《习题集》以下的习题 3088–3097, 若其中的无穷乘积收敛, 则还要要求判定它是绝对收敛还是条件收敛.

习题 3090 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 由于 $p_n\to 1\ (n\to\infty)$ 是无穷乘积收敛的必要条件, 因此必须有 $p>0$.

由判别法 III 可知当 $p>1$ 时无穷乘积绝对收敛, 而当 $0<p\leqslant 1$ 时不绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 收敛, 因此从判别法 II 可知, 这时的无穷乘积收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 因此当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时无穷乘积发散于 0, 而当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时的无穷乘积为条件收敛. □

习题 3092 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 1 这时有

$$\alpha_n=p_n-1=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

于是从 §5.2.1 的习题 2670 知道 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ 发散. 由于 $\alpha_n\ (n=2,3,\cdots)$ 不同号, 因此还不能立即作出结论.

这里可以模仿习题 2670 的解 2, 即将 $n=2k$ 和 $n=2k+1\ (k=1,2,\cdots)$ 两项的相乘加括号, 这样就得到一个新的无穷乘积

① 在 [6] 中对于 $x=-1$ 的情况还讨论了将习题中的无穷乘积修改为从 $n=2$ 开始后是否收敛的问题, 方法与 $x=1$ 类似, 可供参考.

$$\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k}+1}\cdot\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+1}-1}\Big).$$

记其通项为 p'_k, $\alpha'_k=p'_k-1\ (k=1,2,\cdots)$, 则有

$$\begin{aligned}\alpha'_k=p'_k-1&=\frac{1+\sqrt{2k}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k}+1)\cdot(\sqrt{2k+1}-1)}\\&=\frac{1+o(1)}{(\sqrt{2k}+1)\cdot(\sqrt{2k+1}-1)}\sim\frac{1}{2k}\ \ (k\to\infty),\end{aligned}$$

因此上述新的无穷乘积发散. 由于它的部分乘积数列是原来的无穷乘积的部分乘积数列的子列, 因此从一个子列发散就可推出原来的无穷乘积发散. □

解 2 取通项 p_n 的倒数

$$q_n=\frac{1}{p_n}=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ \ (n=2,3,\cdots),$$

作出一个新的无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}q_n$.

这时的 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(q_n-1)$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(q_n-1)^2$ 发散, 因此从判别法 II 知道上述新的无穷乘积发散. 由于它的部分乘积就是原无穷乘积的部分乘积的倒数, 因此即可推出原无穷乘积发散. □

习题 3094 研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 按照下标 n 的奇偶性, 则有

$$p_{2k-1}=(2k-1)^{-\frac{1}{2k-1}},\quad p_{2k}=(2k)^{\frac{1}{2k}},$$

于是有

$$\begin{aligned}\alpha_{2k-1}=p_{2k-1}-1&=\exp[-\frac{1}{2k-1}\ln(2k-1)]-1\\&\sim-\frac{1}{2k-1}\ln(2k-1),\\\alpha_{2k}=p_{2k}-1&=\exp[\frac{1}{2k}\ln(2k)]-1\\&\sim\frac{1}{2k}\ln(2k).\end{aligned}$$

由此已经可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散, 因此本题的无穷乘积不可能绝对收敛.

又可看出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 收敛, 因此按照判别法 II, 只要级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 即可推出无穷乘积收敛 (且为条件收敛).

从 $\alpha_{2k-1}<0$ 和 $\alpha_{2k}>0$, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为交错级数. 然而它不并是莱布尼茨型级

数①. 现在考虑从第二项起对相邻两项加括号的如下级数:

$$\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1})+\cdots.$$

其中第一项 $\alpha_1=0$, 而利用

$$\begin{aligned}\alpha_{2k}+\alpha_{2k+1}&=\left[\frac{1}{2k}\ln(2k)-\frac{1}{2k+1}\ln(2k+1)\right](1+o(1))\\&\sim\frac{(2k+1)\ln(2k)-2k\ln(2k+1)}{2k(2k+1)}\\&=\frac{\ln(2k)}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2k+1}[\ln(2k+1)-\ln(2k)]\\&=\frac{\ln(2k)}{2k(2k+1)}-\frac{1}{2k+1}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\\&=O^*\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)\ (k\to\infty),\end{aligned}$$

可见上述加括号后的级数收敛 (实际上还可以证明它从第二项起均大于 0). 然后再利用 $\alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$, 即可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛, 因此本题的无穷乘积为条件收敛. □

5.9.3 无穷乘积的一些应用 (习题 3100–3110)

本小节利用无穷乘积求某些数列的极限, 其中包含了几个重要的理论结果. 实际上, 类似的问题在前面已多次出现, 例如 §5.1.4 的命题 5.3、习题 2606 和 §5.7.1 的习题 3031 的解 1 等都是如此, 只是当时没有用无穷乘积的概念和定理.

习题 3100 (黎曼 ζ 函数的无穷乘积形式) 设 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, 而 $p_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是素数数列. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

解 最早研究函数 $\zeta(x)$ 的是欧拉. 与黎曼不同, 欧拉是在自变量 x 为实数范围内研究这个函数, 本题即是他的发现 [10].

按照级数收敛性判别法, 函数 $\zeta(x)$ 在 $x>1$ 时有定义. 以下均设 $x>1$.

当 p 为素数时, 有级数展开式

$$\left(1-\frac{1}{p^x}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p^x}+\cdots+\frac{1}{p^{nx}}+\cdots.$$

对正整数 $N>1$, 取所有不超过 N 的素数, 记为 $p_1=2,\ p_2=3,\cdots,p_k\leqslant N$, 并将它们分别代入上述展开式, 然后将所得的 k 个级数相乘. 于是在所得到的级数中就包含了所有下列形式的项:

$$\frac{1}{2^{n_1x}}\cdot\frac{1}{3^{n_2x}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p_k^{n_kx}},$$

① 用 Mathematica 在大范围内作数学实验, 可以猜测成立不等式 $(x+1)^{\frac{1}{x+1}}+x^{-\frac{1}{x}}>2$, 它相当于 n 为奇数时成立 $|\alpha_{n+1}|>|\alpha_n|$.

其中 $n_1,\cdots,n_k$ 为非负整数, 而且对于指定的 $n_1,\cdots,n_k$ 来说, 上述形式的项只出现一次. 利用算术基本定理①, 不超过 N 的每一个正整数 n 都可以唯一方式分解为

$$n=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{n_k},$$

从而就得到

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i^x}\right)^{-1}<\sum_{n>N}\frac{1}{n^x}.$$

最后令 $N\to\infty$, 则同时就有 $k\to\infty$, 因此就得到所求的结论. □

习题 3101 (欧拉) 设 p_n $(n=1,2,\cdots)$ 是素数数列, 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

均发散.

解 虽然不能直接引用上题的结果, 但可以用其中的方法. 取正整数 $N>1$, 又取所有不超过 N 的素数 $p_1=2,p_2=3,\cdots,p_k\leqslant N$, 则与上题一样, 可以得到

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

然后令 $N\to\infty$, 利用调和级数发散, 就得到本题所要的第一个结论, 即

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}=+\infty.$$

对前式取对数后令 $N\to\infty$ 则可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=-\infty.$$

对于上述负项级数用 $\ln(1-x)\sim -x$ $(x\to 0)$, 就得到所要的第二个结论:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=+\infty.\quad\square$$

注 最后的等式提供了素数有无限多个的一个分析证明②. 此外, 与巴塞尔级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 比较, 可见在所有正整数中, 素数并非是非常稀少的, 至少比平方数要"多得多".

---

① 即每一个正整数均以唯一的方式分解为素数因子的乘积. 算术基本定理是古希腊数学家发现的, 见 [11] 第七卷的命题 23–32 和第九卷的命题 14.

② 关于素数有无限多个的第一个证明是古希腊数学家得到的, 见 [11] 的第九卷的命题 20. 读者还可以在近年来的畅销书 [1] 的第一章中找到素数有无限多个的六个证明, 其中包含了已提到的两个证明. 该书 (第四版) 介绍了 40 个著名数学问题的极富创造性和独具匠心的证明, 其中与本书到此的内容有关的还有: 第八章中给出了巴塞尔问题的三个证明, 第十八章中给出了平均值不等式的证明.

习题 3102 (§5.1 的高斯判别法的证明) 设 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big)\ (n \to \infty),$$

其中 $\varepsilon > 0$, 证明:

$$a_n = O^*\Big(\frac{1}{n^p}\Big)\ (n \to \infty).$$

提示: 研究

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p.$$

解 对每个正整数 n 有

$$\begin{aligned} a_n n^p &= \Big[a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}\Big] \cdot \Big[\Big(\frac{2}{1}\Big)^p \cdot \Big(\frac{3}{2}\Big)^p \cdot \cdots \cdot \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^p\Big] \\ &= a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^p, \end{aligned}$$

因此就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p.$$

余下的问题就是证明上式右边的无穷乘积收敛. 由题设条件可知, 当 $n \to \infty$ 时上述无穷乘积的通项 $p_n \to 1$. 于是该无穷乘积收敛等价于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛 (条件 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ 保证了 $p_n > 0$ 从 $n = 1$ 起就成立).

计算 $\ln p_n$ 如下:

$$\begin{aligned} \ln p_n &= -\ln\Big(1 + \frac{p}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big)\Big) + p\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \\ &= O\Big(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ (n \to \infty). \end{aligned}$$

于是不论 $\varepsilon > 0$ 如何, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 总是绝对收敛的. 这就证明了上述无穷乘积收敛, 也就是存在非零极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = A \neq 0. \quad \square$$

注 §5.1.4 的习题 2606 与本题类似, 也可以用这里的无穷乘积方法求解.

习题 3104 (斯特林公式的证明) 证明: 表达式 $a_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 当 $n \to \infty$ 时有异于零的极限 A. 由此推出斯特林公式

$$n! = An^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}(1 + \varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $A = \sqrt{2\pi}$.

提示: 把所求极限表示为无穷乘积的形式:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

为确定常数 A 可利用沃利斯公式.

解 将问题转化为无穷乘积:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

然后对通项作分析如下:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\mathrm{e}\sqrt{n}n^n}{\sqrt{n+1}(n+1)^n} = \mathrm{e}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n-\frac{1}{2}} \\
&= \exp\Big[1 + \Big(-n-\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big] \\
&= \exp\Big[1 + \Big(-n-\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big)\Big] \\
&= \exp\Big[-\frac{1}{12n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big] \\
&= 1 - \frac{1}{12n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\ (n\to\infty),
\end{aligned}$$

可见上述无穷乘积绝对收敛, 因此存在非零极限 A.

为确定 A, 只需要在沃利斯公式 (5.2) (见 §5.1.3 的命题 5.1) 中用 $n! = a_n\cdot\dfrac{n^n\cdot\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$ 代入, 于是就得到

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{A^2}{A\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

于是得到 $A=\sqrt{2\pi}$. □

注 同样从本题的数列 $\{a_n\}$ 出发但无需无穷乘积知识的证明见 [34] 的命题 11.4.2, 其中还分析了这个数列的由来.

习题 3105 ($\Gamma(x)$ 的无穷乘积定义) 根据欧拉的定义, 伽马函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发: (a) 把函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形式; (b) 证明: $\Gamma(x)$ 对于不为负整数和 0 的一切实数 x 皆有意义; (c) 推出下面这个性质: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; (d) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (a) 为此只要如下改写即可:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{\Big(1+\dfrac{x}{1}\Big)\cdot\cdots\cdot\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)} \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(1+\dfrac{1}{1}\Big)^x\cdot\Big(1+\dfrac{1}{2}\Big)^x\cdot\cdots\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^x}{\Big(1+\dfrac{x}{1}\Big)\cdot\Big(1+\dfrac{x}{2}\Big)\cdot\cdots\cdot\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)}\cdot\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^x \\
&= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^x}{1+\dfrac{x}{n}}.
\end{aligned}$$

(b) 这就是要证明对于所有不为负整数和 0 的 x, 上述无穷乘积收敛. 为此只要观察其通项

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= 1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\ (n\to\infty),$$

可见上述无穷乘积绝对收敛, 而且还证明了 $\Gamma(x)$ 有定义时一定不等于 0.

(c) 从欧拉定义出发, 并利用 (b) 中最后所说, 即定义中的极限不等于 0, 就可以用极限运算的除法规则得到

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n)(x+1+n)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+1+n} = x.$$

(d) 从欧拉定义即有 $\Gamma(1)=1$, 然后从 (c) 有递推公式 $\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$, 于是得到

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=(n-1)!. \quad \square$$

注 1 由 (d) 可见, $\Gamma(x)$ 是阶乘 $n!$ 的连续化. 实际上, $\Gamma(x)$ 是最常用的非初等函数之一, 在很多数学分析教科书中都有专门的章节进行介绍, 《习题集》后面也为此设立 §7.4. 在一般的数学分析教科书中, 对于 $x>0$, 函数 $\Gamma(x)$ 用广义积分定义如下:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

关于这两个定义在 $x>0$ 的等价性将在补注小节中作出证明.

注 2 利用伽马函数的无穷乘积定义, 我们可以将 §5.1.4 的命题 5.3 的公式 (5.4) 以及二项式系数 C_n^m 的渐近式改进如下:

(1) 当 $p\neq 0$ 不是负整数时有

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\sim\frac{1}{\Gamma(p)}\cdot\frac{1}{n^{1-p}}\ (n\to\infty),$$

(2) 当 $m\neq 0$ 不是正整数时有

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\sim\frac{(-1)^n}{\Gamma(-m)}\cdot\frac{1}{n^{m+1}}\ (n\to\infty).$$

习题 3107 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{2}{\mathrm{e}},$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$.

解 分子分母同除以 n, 然后分别求分子分母的极限. 对于分母, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)=\lim_{n\to\infty}\frac{na+b\sum\limits_{i=0}^{n-1}i}{n^2}=\frac{b}{2}.$$

对于分子, 则可用 §1.2.7 的习题 141, 于是就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+nb)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{b}{\mathrm{e}}.$$

两者相除即得所求. 本题的意义在于, 给定长度为 n 的等差数列, 其几何平均值与算术平均值之比, 当 $n\to\infty$ 时的极限为 $2/\mathrm{e}$. □

注 上述解法与本节的无穷乘积没有紧密的联系, 当然还可以考虑其他解法, 例如将乘积 $\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)$ 与习题 3105 中的伽马函数的乘积形式相联系等等, 从略.

习题 3109 求函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

的导数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

提示 显然只有当题设的无穷乘积在某个区间上收敛时问题才有意义. (若在某个区间上发散于 0 则 $F'(x)$ 恒等于 0.)

若将无穷乘积改为其部分乘积, 则就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\prod_{k=1}^{n}[1+f_n(x)]=\prod_{k=1}^{n}[1+f_n(x)]\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)},$$

由此即可猜出题设的 $F(x)$ 的导数表达式应当为

$$F'(x)=F(x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

然后可以用对数求导法, 研究在什么条件下能够实现如下的逐项求导运算:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+f_n(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

以下就是要提出保证题设的无穷乘积收敛以及上述逐项求导运算成立的充分条件. □

习题 3110 证明: 若 $0<x<y$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0.$$

解 1 这就是要证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x+n}{y+n}$ 发散于 0. 对通项 p_n 分析如下:

$$p_n=\frac{x+n}{y+n}=1-\frac{y-x}{y+n},$$

从 $0<x<y$ 可见 $\alpha_n=p_n-1$ 当 n 充分大时同号. 由于

$$\alpha_n=-\frac{y-x}{y+n}\sim\frac{x-y}{n}\ \ (n\to\infty),$$

于是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=-\infty$, 因此 (参见前面的判别法 I) 无穷乘积发散于 0. □

解 2 利用公式 (5.4) (见 §5.1.4 的命题 5.3), 就有

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!}=O^*\Big(\frac{1}{n^{1-x}}\Big) \text{ 和 } \frac{y(y+1)\cdots(y+n)}{(n+1)!}=O^*\Big(\frac{1}{n^{1-y}}\Big)\ \ (n\to\infty),$$

于是就有

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=O^*\Big(\frac{1}{n^{y-x}}\Big)\to 0\ \ (n\to\infty).\quad \square$$

解 3 利用习题 3105 的注 2 之 (1), 则有更准确的

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}\sim\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{n^{y-x}}\to 0\ \ (n\to\infty).\quad \square$$

解 4 利用不等式 $1+t<\mathrm{e}^t$ $(t\neq 0)$ (见 §1.2.9 之 2 的习题 75(b), 或者 §2.7.2 的习题 1289(a)), 于是对 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$\frac{x+k}{y+k}=1+\frac{x-y}{y+k}<\mathrm{e}^{\frac{x-y}{y+k}},$$

然后将它们相乘, 这样就得到

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}<\exp\Big[(x-y)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{y+k}\Big],$$

于是当 $n\to\infty$ 时右边的极限为 0. □

5.9.4 补注

本小节有两个内容: (1) 对习题 3105 作补充, (2) 对习题 3083 的 $x=1$ 作补充.

1. 当 $x>0$ 时, 伽马函数的无穷乘积定义与积分定义等价

命题 5.16 当 $x>0$ 时成立

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证 (左边的广义积分的收敛性见 §4.4.2 的习题 2361.) 在积分中作变量代换 $s=\mathrm{e}^{-t}$, 则当 t 从 0 到 $+\infty$ 时, s 从 1 到 0. 由 $t=\ln\frac{1}{s}$, $\mathrm{d}s=-\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 得到

$$\int_0^{+\infty}t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\Big(\ln\frac{1}{s}\Big)^{x-1}\mathrm{d}s.$$

这是以 $s=0$ 为奇点的广义积分. 利用 (见 §1.2.9 之 2 的习题 76)

$$\ln\frac{1}{s}=\lim_{n\to\infty}n(1-s^{\frac{1}{n}}),$$

则如 §5.8.2 的命题 5.14 的推论所示, 若能够证明右边的函数序列关于 n 为单调, 则就可以将 $n\to\infty$ 的极限与积分交换顺序得到

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{x-1} \mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 [n(1-s^{\frac{1}{n}})]^{x-1}\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} n^{x-1}\int_0^1 [(1-s^{\frac{1}{n}})]^{x-1}\,\mathrm{d}s.$$

问题就归结为计算右边的积分.

对该积分作变量代换 $s^{\frac{1}{n}} = y$, 则当 s 从 0 到 1 时, y 也从 0 到 1. 由 $s = y^n$, $\mathrm{d}s = ny^{n-1}\,\mathrm{d}y$, 就得到

$$\int_0^1 [(1-s^{\frac{1}{n}})]^{x-1}\,\mathrm{d}s = n\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^{n-1}\,\mathrm{d}y.$$

现在来计算右边的积分.

若 x 为正整数 m, 则在 §4.2.6 的习题 2299 中已经指出可以用分部积分法计算. 对于 $x>0$ 的一般情况, 也可以用分部积分法计算如下:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^{n-1}\,\mathrm{d}y &= -\frac{1}{x}(1-y)^x y^{n-1}\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{n-1}{x}\int_0^1 (1-y)^x y^{n-2}\,\mathrm{d}y \\ &= \cdots = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)}\int_0^1 (1-y)^{x+n-2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)(x+n-1)}.\end{aligned}$$

综合以上就得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} n^x\cdot\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)(x+n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\end{aligned}$$

最后只需要补充证明, 在区间 $0<s\leqslant 1$ 上的函数序列 $n(1-s^{\frac{1}{n}})$ $(n=1,2,\cdots)$ 关于 n 为单调. 将 $1/n$ 换为连续变量 $x\in(0,1]$, 则只需要证明在此区间上的函数

$$f(x) = \frac{1-s^x}{x}$$

为单调函数, 其中 $s\in(0,1]$ 为参数. 为此只要证明其导函数保号.

将 $f(x)$ 对 x 求导, 就有

$$\left(\frac{1-s^x}{x}\right)_x' = \frac{-s^x\ln s}{x} + \frac{s^x-1}{x^2}.$$

然后对右边第二项的分子, 在区间 $[0,x]$ $(x<1)$ 上对函数 s^x 用拉格朗日微分中值定理, 知道存在 $0<\theta<1$, 使得 $s^x - 1 = xs^{\theta x}\ln s$.

于是就有

$$\left(\frac{1-s^x}{x}\right)_x' = \frac{\ln s}{x}(s^{\theta x}-s^x) < 0. \quad \square$$

2. 对习题 3083 的 $x=1$ 情况的补充

这时的无穷乘积为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{1}{n^q}.$$

若 $p<0$, 则 $1+\frac{1}{n^p}\to+\infty$. 这时若 $q\geqslant 0$, 则通项不趋于 1, 若 $q<0$, 则在下面的命题 5.17 中将证明 $\cos\frac{1}{n^q}\nrightarrow 0\ (n\to\infty)$, 因此通项也不可能趋于 1, 无穷乘积发散.

若 $p=0$, 则只有当 $\cos\frac{1}{n^q}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$ 时无穷乘积才可能收敛. 对于 $q\geqslant 0$ 这是不可能的. 对于 $q<0$, 其不可能性也可从命题 5.17 推出 (见其推论).

若 $p>0$, 则 $1+\frac{1}{n^p}\to 1$. 这时若 $q=0$, 则通项不趋于 1, 若 $q<0$, 则从命题 5.17 有 $\sin\frac{1}{n^q}\nrightarrow 0\ (n\to\infty)$, 因此 $\cos\frac{1}{n^q}\nrightarrow 1\ (n\to\infty)$, 通项也不可能趋于 1, 无穷乘积发散. 于是只有 $q>0$ 需要讨论.

为方便起见, 下列命题中的指数 q 相当于习题 3083 中的 $-q$.

命题 5.17 若 $q>0$, 则有

$$\cos n^q\nrightarrow 0\ \ (n\to\infty),\quad \sin n^q\nrightarrow 0\ \ (n\to\infty).$$

证 分两种情况讨论.

一. q 为正整数 仿照 §5.2.1 的习题 2691 (其中证明 $\sin n^2\nrightarrow 0\ (n\to\infty)$).

记 $f(x)=x^q$, 又引入差分记号 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$.

用反证法. 若有 $\cos f(n)\to 0\ (n\to\infty)$ 或者 $\sin f(n)\to 0\ (n\to\infty)$, 则即可推出

$$\begin{aligned}\sin(\Delta f)(n)&=\sin[f(n+1)-f(n)]\\&=\sin(f(n+1))\cos f(n)-\cos(f(n+1))\sin f(n)\to 0\ \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

同样可推出 $\sin(\Delta^2 f)(n)\to 0\ (n\to\infty)$ 等等.

由于 q 为正整数时, 对于 $f(x)=x^q$, 可用数学归纳法证明有 $(\Delta^q f)(n)=q!$, 因此若有 $\cos n^q\to 0\ (n\to\infty)$ 或者 $\sin n^q\to 0\ (n\to\infty)$, 则就引出以下矛盾:

$$\sin q!=\sin[(\Delta^q f)(n)]\to 0\ \ (n\to\infty).$$

二. $q>0$ 为非正整数 这时的证明思想与上面类似, 分为两部分, 即先证明 $0<q<1$ 时命题成立, 然后通过差分将 $q>1$ 归结为前者. 为清楚起见, 将其中的 $0<q<1$ 的部分和第二部分的主要计算另列为两个引理, 放在命题之后.

若 $0<q<1$, 则因 $f(x)=x^q$ 满足引理 1 的条件, 因此命题的结论已成立. 现在考虑 $q>1$ 但 q 不是正整数的情况. 于是有 $q=[q]+(q)$, 其中 $[q]\geqslant 1,\ 0<(q)<1$.

用反证法. 若 $\sin f(n)\to 0\ (n\to\infty)$ 或者 $\cos f(n)\to 0\ (n\to\infty)$, 则可如前得到

$$\sin[(\Delta^{[q]}f)(n)]\to 0\ \ (n\to\infty).$$

定义函数

$$F(x)=(\Delta^{[q]}f)(x),$$

则可以证明 F 满足引理 1 中的三个条件, 从而 $\sin F(n)\to 0\ (n\to\infty)$ 是不可能的.

为此对 $f(x)=x^q$ 用引理 2, 取 $n=[q]$, 则就得到

$$(\Delta^{[q]}f)(x)\sim q(q-1)\cdots((q)+1)x^{(q)}\ \ (x\to+\infty),$$

因此 $F(+\infty)=+\infty$.

利用差分算子的线性性质, 同样可用引理 2 得出

$$F'(x) = (\Delta^{[q]} f')(x) \sim q(q-1)\cdots((q))x^{(q)-1} \ (x \to +\infty),$$

因此就保证了当 x 充分大时有 $F'(x) > 0$, 且 $F'(+\infty) = 0$.

于是根据引理 1 可得到 $\sin F(n) \nrightarrow 0 \ (n \to \infty)$, 引出矛盾. □

现在介绍引理 1. 它的起点是一个简单的几何事实: 在映射 $y = \sqrt{x}$ 下, 长度固定的区间的逆像也是区间, 且其长度可随着 x 的递增而无限增加①. 这个事实可以推广于 $0 < q < 1$ 的 x^q. 它解决了命题 5.17 中 $0 < q < 1$ 的部分. 更进一步的推广就是引理 1.

引理 1 若可微函数 $f(x)$ 满足条件: (1) $f(+\infty) = +\infty$, (2) $f'(x) > 0$ 于 x 充分大时成立, (3) $f'(+\infty) = 0$, 则有

$$\sin f(n) \nrightarrow 0 \ (n \to \infty), \quad \cos f(n) \nrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

证 不妨设 $f(x)$ 于 $x \geqslant 0$ 时就满足条件 (2), 于是 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有严格单调递增的反函数 $x = \varphi(y)$, 满足 $\varphi(+\infty) = +\infty$. 又从

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x(y))},$$

可见有 $\varphi'(+\infty) = +\infty$.

用反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin f(n) = 0$, 则有 N, 当 $n > N$ 时 $|\sin f(n)| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 于是对每个 $n > N$, 存在正整数 k_n, 使得

$$k_n\pi - \frac{\pi}{4} < f(n) < k_n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是有

$$\varphi(k_n\pi - \frac{\pi}{4}) < n < \varphi(k_n\pi + \frac{\pi}{4}).$$

考虑以正整数 k 为下标的开区间:

$$U_k = (\varphi(k\pi - \frac{\pi}{4}), \varphi(k\pi + \frac{\pi}{4})),$$

则当 k 充分大时 U_k 有定义, 且相互之间不交.

由前知 U_{k_n} $(n > N)$ 覆盖了所有 $n > N$ 的正整数. 因此只要取 k_n $(n = N+1, \cdots)$ 中的最小数为 K, 就知道 U_k $(k \geqslant K)$ 也覆盖了所有 $n > N$ 的正整数.

考虑 U_k 的右端点和 U_{k+1} 的左端点之间的距离, 就有

$$\varphi((k+1)\pi - \frac{\pi}{4}) - \varphi(k\pi + \frac{\pi}{4}) = \varphi'(k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta\pi}{2}) \cdot \frac{\pi}{2},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 于是从 $\varphi'(+\infty) = +\infty$ 可见, 上式当 k 充分大时必定大于 1, 从而在开区间 U_k 和 U_{k+1} 之间有正整数.

这样就证明了有无限多个正整数不能为 U_k $(k \geqslant K)$ 所覆盖, 引出矛盾. 这就证明了 $\sin f(n) \nrightarrow 0 \ (n \to \infty)$.

又因 $\cos f(n) = -\sin(f(n) - \dfrac{\pi}{2})$, 而 $g(x) = f(x) - \dfrac{\pi}{2}$ 也满足引理 1 的条件, 因此得到 $\cos f(n) \nrightarrow 0 \ (n \to \infty)$. □

---

① 这等价于长度固定的区间在映射 $y = x^2$ 下的映像是长度随着 $|x|$ 递增而无限增加的区间.

第二个引理是 q 为非正整数时的差分计算.

引理 2 设 q 不是正整数, $f(x)=x^q$, n 为正整数, 则

$$(\Delta^n f)(x)\sim q(q-1)\cdots(q-n+1)x^{q-n}\ \ (x\to+\infty).$$

证 从 $\Delta f(x)=(x+1)^q-x^q$ 开始, 对 n 用数学归纳法可得到

$$(\Delta^n f)(x)=(x+n)^q-\mathrm{C}_n^1(x+n-1)^q+\mathrm{C}_n^2(x+n-2)^q-\cdots\\+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}(x+1)^q+(-1)^n x^q.$$

然后就有

$$(\Delta^n f)(x)=x^q\Big[\Big(1+\frac{n}{x}\Big)^q-\mathrm{C}_n^1\Big(1+\frac{n-1}{x}\Big)^q+\mathrm{C}_n^2\Big(1+\frac{n-2}{x}\Big)^q-\cdots\\+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^q+(-1)^n\Big].$$

将上式右边方括号内的各项用二项式展开, 写出到 x^{-n} 为止, 则可见常数项之代数和为 0, 于是得到

$$(\Delta^n f)(x)=x^q\Big[\sum_{r=1}^{n}\frac{q(q-1)\cdots(q-r+1)}{x^r\cdot r!}\Big(n^r-\mathrm{C}_n^1(n-1)^r+\mathrm{C}_n^2(n-2)^r-\cdots\\+(-1)^n\mathrm{C}_n^{n-1}\Big)+O\Big(\frac{1}{x^{n+1}}\Big)\Big]\ \ (x\to+\infty).$$

利用关于二项式系数的一个恒等式 (见 [14] 的 §2.12 的 (12.17) 或 [21] 的 §1.2.6 的 (34)):

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^r=\begin{cases}0, & r<n,\\ n!, & r=n,\end{cases}$$

就得到

$$(\Delta^n f)(x)=q(q-1)\cdots(q-n+1)x^{q-n}+O(x^{q-n-1})\\\sim q(q-1)\cdots(q-n+1)x^{q-n}\ \ (x\to+\infty).\quad\square$$

注 用引理 1 中的方法可以证明当 $0<q<1$ 时, 数列 $\{\cos n^q\}$ 和 $\{\sin n^q\}$ 必定发散. 此外, 从其证明可见, 命题 5.17 还可稍作推广, 即对于任意常数 $C\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 和 $q>0$, 也成立

$$\cos Cn^q\nrightarrow 0\ \ (n\to\infty),\quad \sin Cn^q\nrightarrow 0\ \ (n\to\infty).$$

推论 若 $q>0$, 则 $\cos n^q\nrightarrow\frac{1}{2}$ $(n\to\infty)$.

证 用反证法. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n^q=\frac{1}{2}$, 则利用公式 $2\cos 2x\cos x=\cos x+\cos 3x$ 导出的恒等式

$$\cos x(2\cos 2x-1)=\cos 3x,$$

就可有

$$\cos\frac{3}{2}n^q=\cos\frac{1}{2}n^q(2\cos n^q-1).$$

因此就推出

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{3}{2}n^q=0.$$

这与命题 5.17 的推广相矛盾 (见其注). $\square$

§5.10 斯特林公式 (习题 3111–3120)

内容简介 本节的习题是斯特林公式在计算上的应用. 在补注小节中对此公式在理论上作补充.

5.10.1 斯特林公式的应用 (习题 3111–3120)

如《习题集》中于本节所说, 用斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1) \tag{5.31}$$

可计算 n 甚大时的 $n!$. 公式 (5.31) 比 §5.9.3 的习题 3104 提供的斯特林公式更精细.

特别可以指出, 公式 (5.31) 给出了用 $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ 作为 $n!$ 的近似值时的相对误差估计:

$$0 < \frac{n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{n!} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\theta_n}{12n}} \approx \frac{\theta_n}{12n} < \frac{1}{12n}.$$

我们将在补注小节中给出 (5.31) 的证明, 并从渐近级数的角度介绍更一般的斯特林公式和斯特林级数.

习题 3111–3117 是数值计算题.

习题 3111 利用斯特林公式, 近似地计算 $\lg 100!$.

解 对斯特林公式 (5.31) 取常用对数, 并将 θ_n 简记为 θ, 则对 $n = 100$ 有

$$\begin{aligned}\lg 100! &= \frac{1}{2}(\lg 2 + \lg \pi + 2) + 100(2 - \lg \mathrm{e}) + \frac{\theta}{1\,200}\cdot \lg \mathrm{e}\\ &= 201 + \frac{1}{2}(\lg 2 + \lg \pi) - 100\cdot \lg \mathrm{e} + \frac{\theta}{1\,200}\cdot \lg \mathrm{e}\\ &\approx 201 + 0.5(0.301\,03 + 0.497\,15) - 100 \times 0.434\,294\,5 + \frac{0.434\,29}{1\,200}\theta\\ &= 157.969\,64 + 0.000\,36\theta \ \ (0 < \theta < 1). \quad \square\end{aligned}$$

注 用 Mathematica 计算得到的结果为

$$\lg 100! \approx 157.970\,003,$$

可知习题中的计算是比较准确的. 有关斯特林公式的误差估计将在补注小节中讨论.

习题 3112 利用斯特林公式, 近似地计算 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1999$.

解 用斯特林公式有

$$
\begin{aligned}
(2n-1)!! &= \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}\\
&= \sqrt{4\pi n}\Big(\frac{2n}{\mathrm{e}}\Big)^{2n}\cdot\frac{1}{2^n\sqrt{2\pi n}}\Big(\frac{\mathrm{e}}{n}\Big)^n\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_{2n}}{24n}-\frac{\theta_n}{12n}}\\
&= \sqrt{2}\Big(\frac{2n}{\mathrm{e}}\Big)^n\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}},
\end{aligned}
$$

其中 $\theta_{2n}\in(0,1)$, $\theta_n\in(0,1)$, $\theta=\dfrac{\theta_{2n}}{2}-\theta_n$, 因此可取 $|\theta|<1$.

用 $n=1\,000$ 代入, 并用 $\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\,000}}\approx 1+\dfrac{\theta}{12\,000}$, 就得到

$$
\begin{aligned}
(1\,999)!! &= \sqrt{2}\Big(\frac{2\,000}{\mathrm{e}}\Big)^{1\,000}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\,000}}\\
&\approx A\cdot 10^{3\,000}\cdot\Big(1+\frac{\theta}{12\,000}\Big),
\end{aligned}
$$

其中对 $A=\sqrt{2}\Big(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\Big)^{1\,000}$ 用常用对数计算得到

$$
\begin{aligned}
\lg A &= \frac{1}{2}\lg 2+1\,000(\lg 2-\lg\mathrm{e})\\
&\approx 0.150\,51-133.264\,49=-133.113\,971\\
&= -134+0.886\,028\,77,
\end{aligned}
$$

于是就得到 $A\approx 10^{0.886}\times 10^{-134}\approx 7.691\,84\times 10^{-134}$. 最后有

$$
\begin{aligned}
(1\,999)!! &\approx 7.691\,814\times 10^{2866}\times\Big(1+\frac{\theta}{12\,000}\Big)\\
&\approx 7.691\,814\times(1+0.000\,083\theta)\times 10^{2866}\quad(|\theta|<1).\quad\square
\end{aligned}
$$

注 用 Mathematica 求出 $(1\,999)!!\approx 7.691\,493\times 10^{2866}$, 它确实落在上述答案所示的范围之内.

习题 3120 利用斯特林公式求下列极限:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

提示 斯特林公式 (以及沃利斯公式) 给出了处理阶乘的有效方法, 然而本题的每一题也都有不用斯特林公式的解法: 题 (a) 可以利用 $1\leqslant\sqrt[n^2]{n!}\leqslant\sqrt[n^2]{n^n}=\sqrt[n]{n}$; 题 (b) 已见于 §1.2.7 的习题 142; 题 (c) 可用沃利斯公式归结于题 (b); 题 (d) 可用施托尔茨定理 (见 §1.2.7 的习题 143). $\square$

5.10.2 补注

在这一小节将先给出公式 (5.31) 的证明, 然后给出更为一般的斯特林级数, 并讨论应用时的误差估计.

1. 斯特林公式 (5.31) 的证明

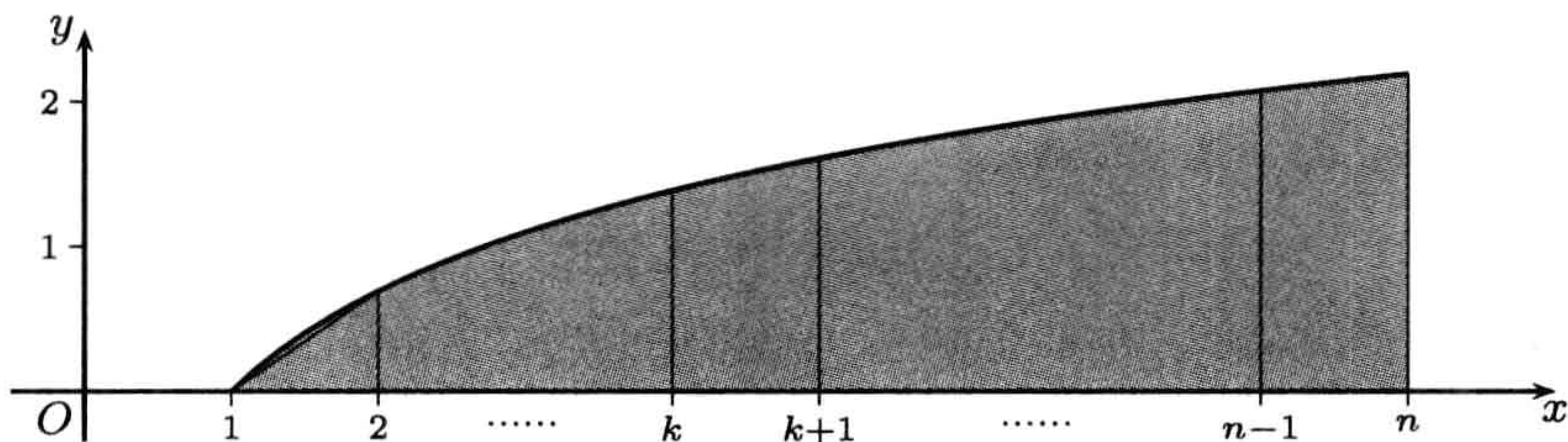
有很多方法可以得到这个公式. 下面将它写成一个命题, 并给出几个证明.

命题 5.18 对于阶乘有 $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$ $(0 < \theta_n < 1)$.

证 1 这个方法有明显的几何意义. 考虑

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n.$$

如附图所示, 用灰色的阴影区表示由曲线 $y = \ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant n)$ 与 $x = n$, $y = 0$ 所形成的曲边梯形面积. 若对于 $k = 1, 2, \cdots, n-1$, 在 $[k, k+1]$ 上用梯形公式及其余项估计 (见 §4.11 的表格 (4.21)), 则可以得到与公式 (5.31) 非常接近但还不完全相同的公式 (见 [25] 的定理 9.12). 为此需要改进估计如下.



证明斯特林公式 (5.31) 的附图

对于 $k = 1, 2, \cdots, n-1$, 取 k 与 $k+1$ 的中点, 记为 $m_k = \dfrac{k + (k+1)}{2} = k + \dfrac{1}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \ln x \,\mathrm{d}x &= \int_k^{k+1} \ln x \,\mathrm{d}(x - m_k) \\
&= \left[(x - m_k)\ln x\right]\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \frac{x - m_k}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}[\ln k + \ln(k+1)] - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t + m_k}.
\end{aligned}$$

这里已经出现了我们所关心的 $\ln k + \ln(k+1)$.

记上式的最后一项 (连同其前的负号) 为 I_k $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 则有估计

$$\begin{aligned}
0 < I_k &= -\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} + \int_0^{\frac{1}{2}}\right)\frac{t\,\mathrm{d}t}{t + m_k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{m_k - t} - \frac{1}{m_k + t}\right) t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{m_k^2 - t^2} < \frac{2}{k^2 + k}\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{k^2 + k} \cdot \frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12k(k+1)},
\end{aligned}$$

其中利用了在 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时有

$$m_k^2 - t^2 = k^2 + k + \left(\frac{1}{4} - t^2\right) \geqslant k^2 + k.$$

现在即可对 $\ln n!$ 作出如下估计:

$$\begin{aligned}\ln n! &= \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[\ln k + \ln(k+1)] \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n-1} I_k \\ &= \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} I_k.\end{aligned}$$

由于已知 $0 < I_k < \dfrac{1}{12k(k+1)}$, 因此无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ 收敛. 记该级数之和为 C, 则其余项有估计

$$0 < R_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} I_k < \frac{1}{12n},$$

从而知道存在 $0 < \theta_n < 1$, 使得成立

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 - C + \frac{\theta_n}{12n}.$$

这样就得到

$$n! = A\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

其中的常数 $A = \mathrm{e}^{1-C} > 0$, 即已经吸收了常数 1 和无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ 的和在内①. 以下可用沃利斯公式确定出 $A = \sqrt{2\pi}$, 从略 (见 §5.9.3 的习题 3104). □

证 2 有很多证明方法与证 1 类似, 它们的差别在于对于 I_k 的估计方法上.

直接求积即可对正整数 k 写出

$$I_k = \int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}[\ln k + \ln(k+1)] = \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1,$$

于是只要证明不等式

$$(0 <)\left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 < \frac{1}{12k(k+1)}. \tag{5.32}$$

建立不等式 (5.32) 的方法很多, 这里列举两种.

(1) 如 [34] 第十一章的第二组参考题 15 所示, 可以先用微分学方法 (见 §2.7.2) 对 $0 < x < 1$ 建立不等式

$$0 < \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x < \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

然后用 $x = 1/(2n+1)$ 代入即可得所要的不等式.

(2) 利用幂级数展开式 (即 §5.5.4 的习题 2906 的答案)

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

---

① 利用 $C < \dfrac{1}{12}$, 可见有 $A > \mathrm{e}^{\frac{11}{12}} \approx 2.501$, 这已接近于 $A = \sqrt{2\pi} \approx 2.507$.

就可以得到不等式

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} < x+\frac{1}{3}(x^3+x^5+\cdots) = x+\frac{x^3}{3(1-x^2)}. \quad \square$$

证 3 沿用习题 3104 中提示的方法, 即考虑数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ $(n = 1,2,\cdots)$, 则就可利用不等式 (5.32) 得到

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}},$$

这表明数列 $a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是严格单调递增的, 而且与严格单调递减数列 a_n $(n = 1,2,\cdots)$ 有相同极限, 记为 $A > 0$. 以下只要用沃利斯公式即可确定 $A = \sqrt{2\pi}$.

由于同时有

$$\sqrt{2\pi} < a_n \text{ 和 } a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < \sqrt{2\pi},$$

即可知道存在 $0 < \theta_n < 1$, 使得

$$a_n = \sqrt{2\pi}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

这就是所要求证的斯特林公式 (5.31). $\square$

2. 斯特林公式与斯特林级数

如本节开始所说, 在对于阶乘 $n!$ 用斯特林公式 (5.31), 即

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

作近似计算时, 其相对误差限约为 $\dfrac{1}{12n}$. 在此意义上, n 越大, 则所得的结果越好. 这些特点, 即考虑相对误差 (而不是绝对误差), 又主要关心当变量充分大 (或充分小) 时的近似计算, 即是渐近方法所共有的特征.

其实这些特点与极限理论中的等价概念及记号 $\sim$ 是一致的. 回顾 §1.5.7 之 1, $u \sim v$ 就是用

$$\lim\frac{u-v}{v} = 0 \text{ 或者 } u = v(1+o(1)) = v+o(v)$$

来定义的, 而这里就是在 lim 所表示的极限过程中的相对误差趋于 0.

类似的情况还出现在 §2.10 的泰勒公式的余项中. 由于本书到此为止在近似计算方面主要关心的是绝对误差, 因此强调只有拉格朗日型余项才能用于误差估计. 如果考虑相对误差, 则 §2.10 中的佩亚诺型余项 (在《习题集》中常称为局部泰勒公式), 即

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \ \ (x \to x_0),$$

恰好就具有前面所说的两个特点, 即当 $x \to x_0$ 时可用于估计相对误差. 回顾 §2.10.4 的习题 1413 及其注, 可见确实如此.

现在回到斯特林公式, 如果对于 $\dfrac{1}{12n}$ 的相对误差限不满意, 则是否还有更好的公式可用?

答案是肯定的, 这就是一般形式的斯特林级数.

引用在本书的 §5.8.3 中引入的渐近级数和渐近展开式等概念, 斯特林级数就是阶乘的如下渐近级数展开式:

$$\ln n! \sim \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots,$$

其中的系数 $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $\cdots, B_{2k}, \cdots$ 即是在 §1.1.6 之 3 开始出现的伯努利数. 在 §2.10.1 的习题 1382 有伯努利数的生成函数. 在本书的 §5.5.3 的习题 2891–2893 的幂级数展开式中也都需要知道伯努利数.

如将上述级数在写出的各项之后截断, 然后加上余项, 则就得到阶乘的一般斯特林公式:

$$\ln n! \sim \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \theta(-1)^k\frac{B_{2k+2}}{(2k+1)\cdot(2k+2)}\cdot\frac{1}{n^{2k+1}},$$

其中 $0 < \theta < 1$.

利用 $n! = \mathrm{e}^{\ln n!}$ 即可得到 $n!$ 的渐近展开为

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left\{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \cdots\right\}.$$

可以证明, 以上两个渐近级数都是发散级数, 因此不可能通过取足够多的项而达到任意指定的绝对误差限. 对于利用渐近级数的近似计算, 一般采取如下方法, 即在后项的绝对值比前项绝对值降低的情况下, 可以取越来越多的项. 这时的发散级数的部分和就可能用于计算得到相当好的近似值. 例如, 在 [15] 的第二卷的 §12.6 的最后详细讨论了如何计算 $\ln 100!$ 到小数点后 10 位.

§5.11 用多项式逼近连续函数 (习题 3121–3135)

内容简介 本节的习题包含有拉格朗日插值多项式和连续函数的多项式一致逼近两方面的内容.

5.11.1 拉格朗日插值多项式 (习题 3121–3126)

这方面的内容在 §1.3.2 的拟合与插值中已经讲过. 那里的习题 197–199 与本节的习题 3121–3126 类似, 即给定自变量的 $n+1$ 个点上的函数值, 求满足此条件的不超过 n 次的多项式.

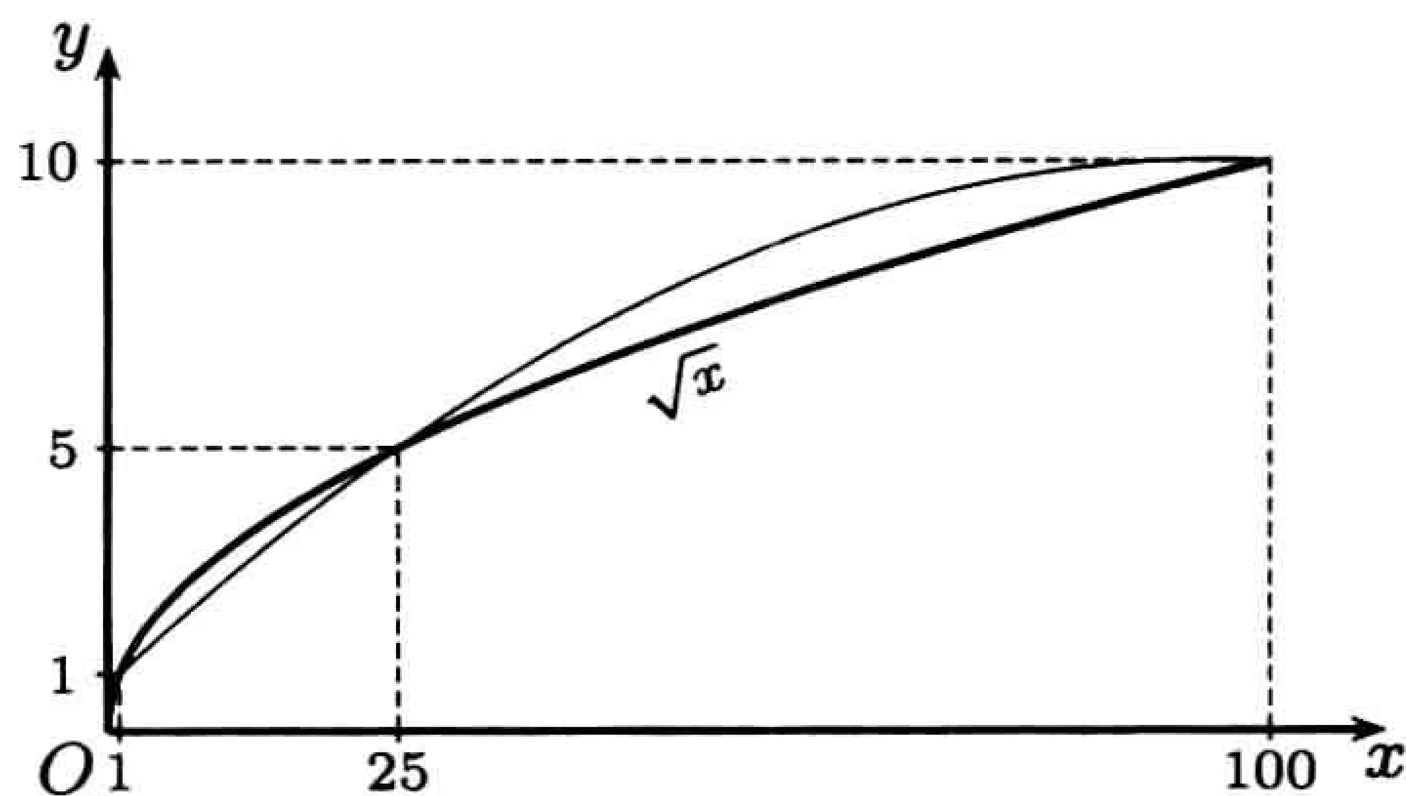
设 $n+1$ 个点为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 给定的函数值为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$, 则如 §1.3.2 的推导所示, 满足条件的拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

习题 3123 利用数值 $x_0 = 1,\ y_0 = 1;\ x_1 = 25,\ y_1 = 5;\ x_2 = 100,\ y_2 = 10$, 推出开平方根 $y = \sqrt{x}$ $(1 \leqslant x \leqslant 100)$ 的近似公式.

解 按照公式计算

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1 \cdot \frac{(x-25)(x-100)}{(1-25)(1-100)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-100)}{(25-1)(25-100)} + 10 \cdot \frac{(x-1)(x-25)}{(100-1)(100-25)} \\ &= \frac{80}{99} + \frac{191x}{990} - \frac{x^2}{990} \\ &\approx -0.001\,010x^2 + 0.192\,929x + 0.808\,081. \end{aligned}$$



习题 3123 的附图

如附图所示, 用粗黑曲线作出了 $y = \sqrt{x}$ 的图像, 又用细曲线作出了 $L_2(x)$ 的图像, 它们交于三个点 $(1,1), (25,5), (100,10)$.

从图上已可看出, 用 $L_2(x)$ 来计算 x 的平方根近似值是难以得到好结果的.

例如 $L_2[16] \approx 3.636\,36$, 而 $\sqrt{16} = 4$; $L_2[49] \approx 7.836\,36$, 而 $\sqrt{49} = 7$. 因此本题提出的平方根近似计算方法没有实用价值. □

注 显然两条曲线只交于三点是不足以使得它们在大范围上相互之间很接近. 那么若增大 n, 即用更高次的拉格朗日插值多项式时的效果又会如何呢? 这将在补注小节中讨论.

5.11.2 一致逼近多项式 (习题 3127–3135)

用多项式来逼近其他函数无疑有很大的优点. 然而如习题 3123 以及后面的补注小节中所说, 拉格朗日插值多项式的实用价值不大. 从计算数学的角度来看, 这里有很多方法 (或者说出路). 本小节的习题即体现了其中之一, 这就是要求在指定的区间上用多项式一致逼近某个给定的函数. 这里的思路与拉格朗日插值多项式不同, 即并不追求在多少点上与给定的函数值相同, 而是要求在整体上一致逼近给定的函数. 对于在有界闭区间 $[a, b]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 用

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

来度量它们之间的逼近程度. 这就是在 §2.11.4 中引入的“偏差”.

这里的第一个问题是: 这是否可能?

数学分析中的最重要成果之一就是在理论上证明: 对于有界闭区间上的连续函数来说, 用多项式一致逼近是可能的. 此外, 对于周期连续函数, 则用三角多项式一致逼近也是可能的.

现在将上述成果列为以下两个相互独立的命题.

命题 5.19 (魏尔斯特拉斯多项式逼近定理) 有界闭区间上的连续函数 $f(x)$ 一定可以用多项式一致逼近到任意指定的程度.

命题 5.20 (魏尔斯特拉斯三角多项式逼近定理) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期连续函数 $f(x)$ 一定可以用三角多项式一致逼近到任意指定的程度.

可以证明这两个定理是等价的, 即只要证明其中之一即可推出另一个. 它们的证明方法也非常多, 这方面的一个综述可参看 [34] 的 §16.3, 其中详细写出了几个证明, 并对于其他各种证明作了浏览, 此外还举出了定理的若干应用.

本小节的习题 3127–3132 都是有关伯恩斯坦多项式的计算. 该多项式的定义如下. 对于在区间 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 和正整数 n, 称下列多项式为 $f(x)$ 的 n 次伯恩斯坦多项式:

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \mathrm{C}_n^i x^i (1-x)^{n-i}.$$

可以证明, 若 $f(x)$ 于 $[0, 1]$ 上连续, 则当 $n \to \infty$ 时, 伯恩斯坦多项式序列在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由此可见, 这就是命题 5.19 的证明方法之一, 而且给出了多项式的具体构造, 只不过区间限制为 $[0, 1]$, 而通过线性变换就可以推广到一般的 $[a, b]$ 上去 (即习题 3128).

就证明本身来说, 用伯恩斯坦多项式证明命题 5.19 并不困难, 然而其中的思想则不容易理解, 因此在 [34] 的 §16.3.2 中专门对此证明从概率论角度进行了解释. 在教科书 [8] 中不仅在 §10.6 给出了伯恩斯坦多项式一致逼近的证明, 还在该书的 §5.3 等处对伯

恩斯坦多项式有专门的讨论, 其中包括介绍了该多项式与 (在曲线和曲面设计中有重大实用价值的) 贝齐尔方法之间的关系.

先考虑一般的有界闭区间 $[a,b]$ 上的伯恩斯坦多项式.

习题 3128 对于在闭区间 $[a,b]$ 上的已知函数 $f(x)$ 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 作线性变换 $x=a+(b-a)t$, 则当 t 从 0 递增到 1 时, x 从 a 递增到 b. 这时有 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$, $1-t=\dfrac{b-x}{b-a}$, $f(x)=f(a+(b-a)t)=g(t)$ $(t\in[0,1])$, 于是有

$$\begin{aligned}B_n(x)&=\sum_{i=0}^{n}g\Big(\frac{i}{n}\Big)\mathrm{C}_n^i t^i(1-t)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}f\Big(a+\frac{(b-a)i}{n}\Big)\mathrm{C}_n^i\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)^i\Big(\frac{b-x}{b-a}\Big)^{n-i}\\&=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{i=0}^{n}f\Big(a+\frac{(b-a)i}{n}\Big)\mathrm{C}_n^i(x-a)^i(b-x)^{n-i}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 3129 在闭区间 $[-1,1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图像.

解 用变量代换 $x=-1+2t$, 当 x 从 -1 递增到 1 时, t 从 0 递增到 1. 于是有 $t=(x+1)/2$, $1-t=(1-x)/2$, $f(x)=f(-1+2t)$ $(t\in[0,1])$. 这样就可以计算如下:

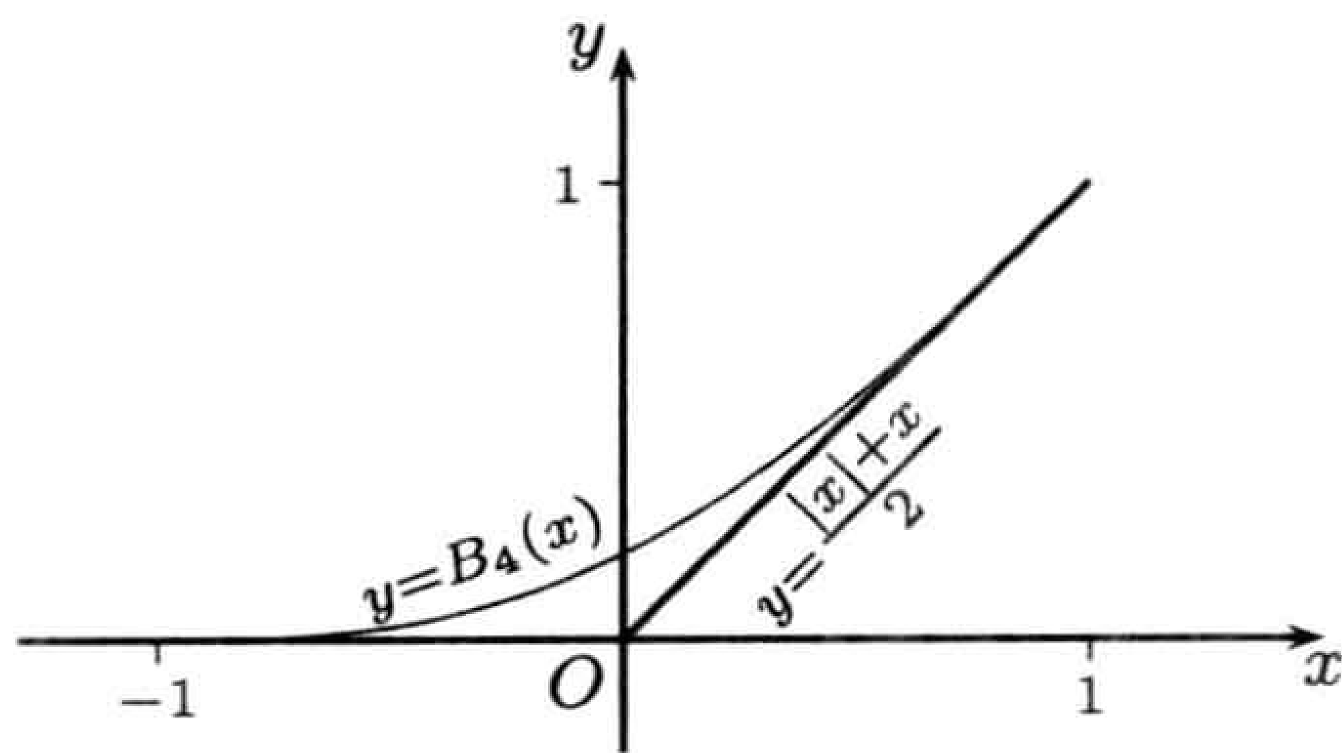
$$\begin{aligned}B_4(x)&=\sum_{i=0}^{4}f\Big(-1+\frac{i}{2}\Big)\mathrm{C}_4^i\Big(\frac{x+1}{2}\Big)^i\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^{4-i}\\&=\frac{1}{16}\Big[f(-1)\cdot(1-x)^4+f(-1/2)\cdot4(x+1)(1-x)^3\\&\qquad+f(0)\cdot6(x+1)^2(1-x)^2+f(1/2)\cdot4(x+1)^3(1-x)+f(1)\cdot(x+1)^4\Big]\\&=\frac{1}{16}\Big[2(x+1)^3(1-x)+(x+1)^4\Big]=\frac{1}{16}(x+1)^3(3-x).\end{aligned}$$

如右边的附图所示, 用粗黑折线作出 $y=f(x)$ 的图像, 又用细曲线作出 $y=B_4(x)$ 的图像. 后者是一条四次曲线, 由于

$$B_4'(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2(2-x),$$

$$B_4''(x)=\frac{3}{4}(1-x^2),$$

因此在区间 $[-1,1]$ 上, $B_4(x)$ 与 $f(x)$ 的图像都是单调递增的非负下凸曲线.



习题 3129 的附图

注 如 [8] 的定理 5.4 所示, 从 $f(x)$ 到 $B_n(x)$ 的映射保持在区间 $[a,b]$ 上的非负性、单调性和凸性不变. 因此本题的例子所反映的特点具有一般意义.

习题 3130 在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上用偶数次伯恩斯坦多项式逼近函数 $f(x) = |x|$.

解 (概要) 如习题 3128 所示, 通过代换 $x = -1 + 2t$ 就可得到

$$\begin{aligned} B_{2n}(x) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} f\Big(-1 + \frac{i}{n}\Big) \mathrm{C}_{2n}^i (x+1)^i (1-x)^{2n-i} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \Big[\sum_{i=0}^{n} \frac{n-i}{n} \mathrm{C}_{2n}^i (x+1)^i (1-x)^{2n-i} \\ &\qquad + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i-n}{n} \mathrm{C}_{2n}^i (x+1)^i (1-x)^{2n-i} \Big], \end{aligned}$$

以下从略. □

习题 3133.1 证明: 在闭区间 $[-1,1]$ 上 $|x| = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2i-3)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2i)} (1-x^2)^i.$$

解 利用 §5.5.2 的表格 (5.15) 中关于 $\sqrt{1+x}$ 在 $[-1,1]$ 上的幂级数展开式

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

然后将上式的 x 用 (x^2-1) 代替, 就可以得到

$$|x| = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)} (1-x^2)^n \ \ (-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}),$$

而它的部分和即是题中的 $P_n(x)$. □

注 对于此题需要从几个方面来说明它的意义.

(1) 从上述证明可见, 多项式序列 $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 不仅在 $[-1,1]$ 上收敛于 $|x|$, 而且在 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上一致收敛于 $|x|$.

(2) 从无穷级数的角度来看, 这个级数一般称为多项式级数, 即其每一项都是 x 的多项式. 在 §5.5 中的幂级数只是多项式级数中的一种特殊类型, 即其第 n 项恰是单项式 $a_n x^n$ $(n = 0, 1, \cdots)$. 如这个例子所示, 在 $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上一致收敛的多项式级数的和函数在 $x = 0$ 处可以不存在导数, 这与幂级数的和函数的可导性质完全不同.

(3) 以本题的结论为基础, 就可以给出魏尔斯特拉斯一致逼近定理 (即命题 5.19) 的又一个证明. 其主要步骤为: (a) 用图像为折线的分段线性函数在区间 $[a, b]$ 上一致逼近给定的连续函数 $f(x)$, (b) 证明分段线性函数可以由 $|x|$ 和 x 的线性组合得到, (c) 利用习题 3133.1 的 (一致收敛) 结论. 证明的细节可参看 [25] 等教科书.

习题 3133.2 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$M_k = \int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

证明: 当 $x \in [a, b]$ 时有 $f(x) \equiv 0$.

解 1 用魏尔斯特拉斯一致逼近定理, 在区间 $[a,b]$ 上存在一致收敛于 $f(x)$ 的多项式序列 $P_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$.

由条件可见, 对每一个正整数 n, 都有

$$\int_a^b f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=0\ \ (n=1,2,\cdots).$$

由于这时在区间 $[a,b]$ 上也有 $f(x)P_n(x)\rightrightarrows f^2(x)$, 因此就可以交换 $n\to\infty$ 和在 $[a,b]$ 上的定积分运算而得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

由于 $f^2(x)$ 是非负连续函数, 因此只能是 $f(x)\equiv 0$ 于 $[a,b]$ 上处处成立[①]. □

解 2 对任意的多项式 $P(x)$, 有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-P(x)]f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)P(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据题设的条件, 上式右边的第二个积分等于 0. 因此对左边的积分有估计

$$0\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|\cdot\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这时右边的第二个因子为定值, 而第一个因子则按照魏尔斯特拉斯一致逼近定理, 可以选择 $P(x)$ 使其任意小, 因此推出 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为 0, 从而 $f(x)\equiv 0$. □

注 本题的结论在条件放宽如下时仍然成立: 存在某个正整数 k_0, 使得对所有正整数 $k\geqslant k_0$, 条件 $M_k=0$ 成立.

习题 3134 (费耶尔定理) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 而 a_n,b_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 是它的傅里叶系数. 证明: 费耶尔三角多项式

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

分析 这里需要指出本题的重大意义.

记 $f(x)$ 的傅里叶级数 (它未必收敛) 的部分和函数序列为

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)\ \ (n=1,2,\cdots),$$

则就可以看出有

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}[S_1(x)+S_2(x)+\cdots+S_n(x)]\ \ (n=1,2,\cdots).$$

实际上这就是发散级数求和中的 Cesàro 求和法. (在 §5.5.6 的习题 2900 的底注中已经提到这个概念并指出了参考文献.)

具体来说, 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x)$, 则就称傅里叶级数于点 x 处按照 Cesàro 方法可求和, 并将此极限称为傅里叶级数的 Cesàro 和.

① 参看 §4.1.4 的习题 2205 的必要性部分.

由 §1.2.7 的习题 138 (即柯西命题) 可知, 若无穷级数收敛, 即部分和函数序列 $S_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 收敛, 则 $\sigma_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也收敛, 且收敛于同一极限. 这就证明了级数的 Cesàro 和是收敛级数的级数和概念的一个推广.

与幂级数的收敛域具有简单结构相比, 傅里叶级数的收敛和收敛域非常复杂. 柯尔莫哥洛夫曾经举出过处处发散的傅里叶级数. 然而本题则表明, 周期连续函数的傅里叶级数的 Cesàro 和总是存在的, 而且 $\{\sigma_n(x)\}$ 还一定是一致收敛的.

与魏尔斯特拉斯三角多项式逼近定理 (即命题 5.20) 比较, 就可以看出费耶尔定理本身就给出了上述逼近定理的一个证明, 同时提供了所需要的三角多项式序列. □

解 由于 $f(x)$ 和 $\sigma_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是周期 2π 的周期函数, 因此只需要在 $[-\pi,\pi]$ 上讨论.

先导出傅里叶级数的部分和的积分形式 (这与一般教科书中的推导相同):

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}(\cos it\cdot\cos ix+\sin it\cdot\sin ix)\right]f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\cos i(t-x)\right]f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}f(x+u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(在以上推导中所用到的几个知识点是: 傅里叶系数的积分公式, 三角恒等式

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\cos i\theta\right)=\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta,$$

和周期函数在周期长度上的积分不变性等.)

然后再计算

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}(S_1(x)+S_2(x)+\cdots+S_n(x))\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2n\sin\frac{u}{2}}\left(\sin\frac{1}{2}u+\sin\frac{3}{2}u+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2}u\right)f(x+u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 f(x+u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中利用了三角恒等式

$$\sin\frac{u}{2}\left(\sin\frac{1}{2}u+\sin\frac{3}{2}u+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2}u\right)=\sin^2\frac{n}{2}u.$$

再将 $\sigma_n(x)$ 改写如下:

$$\sigma_n(x)=\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\cdot F_n(u)\,\mathrm{d}u,$$

其中的非负函数 $F_n(u)=\dfrac{1}{n\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2$ 称为费耶尔核.

用恒等于 1 的函数代替 $f(x)$, 则对每个 n 有 $S_n(x)\equiv 1$, $\sigma_n(x)\equiv 1$, 因此就得到

$$\int_0^{\pi}F_n(u)\,\mathrm{d}u\equiv 1.$$

将此式乘以 $f(x)$, 然后就可以估计 $|\sigma_n(x)-f(x)|$:

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)-f(x)|&=\left|\int_0^{\pi}F_n(u)\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\Big]\,\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant\int_0^{\pi}F_n(u)\cdot\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\mathrm{d}u\\&=\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)F_n(u)\cdot\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中 $\delta\in(0,\pi)$ 待定.

以下分别估计最后的两个积分.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 利用 $f(x)$ 为周期连续函数, 因此在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 从而存在 $\delta>0$, 当 x',x'' 满足 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是在 $u\in[0,\delta]$ 时, 就有

$$\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{2}\big[|f(x+u)-f(x)|+|f(x-u)-f(x)|\big]<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而就有

$$\int_0^{\delta}F_n(u)\cdot\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\mathrm{d}u\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta}F_n(u)\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

取定上述 $\delta>0$, 则在 $\delta\leqslant u\leqslant\pi$ 时有估计

$$0\leqslant F_n(u)\leqslant\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{1}{\delta}}.$$

再利用 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 因此存在 $M>0$, 使得第二个积分满足估计

$$0\leqslant\int_{\delta}^{\pi}F_n(u)\cdot\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\mathrm{d}u<\frac{M}{n}.$$

于是对同一个 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 上述积分小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 于是也就有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

且对于 $x\in[-\pi,\pi]$ 一致成立. 这就是 $\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(x\in[-\pi,\pi])$. □

习题 3135 对于函数

$$f(x)=|x|\ \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

作出费耶尔三角多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 在 §5.6.1 的习题 2942 中已求出了所需要的傅里叶级数, 其系数为 $a_0=\pi$, $a_{2n-1}=-\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$, $a_{2n}=0$, $b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 于是即可得到

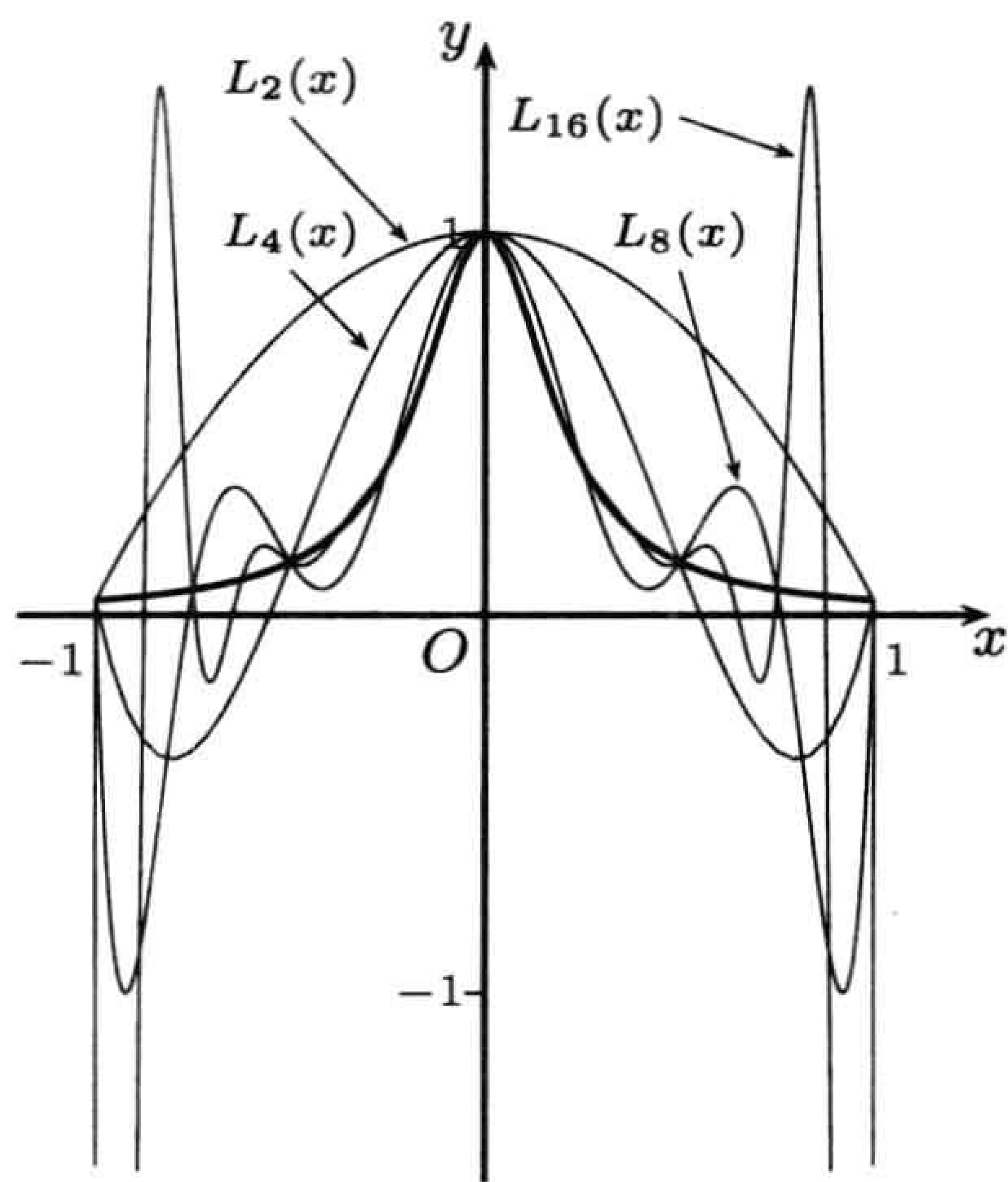
$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right)\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

$$\sigma_{2n}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \quad \square$$

注 到此为止, 对于函数 $|x|$ (在区间 $[-1,1]$ 或 $[-\pi,\pi]$ 上) 已经得到了多个无穷级数展开式. 由于在点 $x=0$ 处不可导, 它不可能有 (以 $x=0$ 为中心的收敛半径大于 0 的) 幂级数展开式. 在习题 2942 得到的是傅里叶级数展开式, 而且恰巧是一致收敛的; 在习题 3130 则可以从 (于 $[-1,1]$ 上一致逼近的) 伯恩斯坦多项式出发, 得到一致收敛的多项式级数; 在习题 3133.1 则从 (于 $[-1,1]$ 上一致收敛的) $\sqrt{1+x}$ 的泰勒级数出发, 得到一致收敛的多项式级数; 在习题 3135 则可以从 (一致收敛的) 费耶尔三角多项式出发, 得到一致收敛的三角多项式级数.

5.11.3 补注

这里要指出, 拉格朗日插值多项式的形式简洁美观, 推导的思路也很有启发性 (见 §1.3.2), 似乎是一件艺术品, 但实际上却缺少实用价值, 一般很少使用高次 (例如七、八次以上) 的拉格朗日插值多项式. 这是因为随着次数的增加, 虽然所得到的插值多项式在更多的点上与指定的函数值一致, 但其系数对给定的数据有敏感依赖性, 计算不稳定. 更为严重的是, 所得到的多项式曲线还可能产生剧烈振荡, 以致于根本不能用于逼近原来的函数. 这就是龙格在二十世纪初发现的现象 (称为龙格现象).



关于龙格现象的附图

龙格的例子即是在区间 $[-1,1]$ 上用 $(n+1)$ 个等距分点作拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$, 使得它在分点的值与函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

在分点的值相等.

在附图上用粗黑曲线作出了 $f(x)$ 的图像, 又用细曲线分别作出了 $L_2(x)$, $L_4(x)$, $L_8(x)$ 和 $L_{16}(x)$ 的图像, 其中 $L_{16}(x)$ 的最小值约为 -14.353, 因此低于 -1.5 的部分只能割爱了.

理论上可以证明, 只有在 $|x| < 0.726\cdots$ 时, $L_n(x)$ 收敛于 $f(x)$, 而在这个区间之外, $L_n(x)$ 是发散的.

于是必须寻找其他的途径来解决插值与逼近问题. 例如 §5.11.2 的两个逼近定理和 §2.11.6 之 1 的切比雪夫定理 (即命题 2.11) 就是如此. 实际上这就是函数逼近论的起点, 例如可以参考 [22] 等数值逼近方面的教科书, 在数学分析教科书中则可以参考 [8].

附录　命题索引

仿照第一册的体例, 在这个附录中列出在第二册中的命题编号、内容与页码.

参 考 文 献

[说明] 以下文献按作者名 (编者名) 的 (拼音) 字母顺序排列, 对翻译著作未列出译者名.

[1] Aigner M, Ziegler G M. Proofs from THE BOOK (Fourth Edition). Berlin: Springer-Verlag, 2010

[2] Archimedes. The Works of Archimedes. edited by T. L. Heath. New York: Dover Publishing, Inc., 1912 (中译本: 希思编. 阿基米德全集. 西安: 陕西科学技术出版社, 1998)

[3] Берельман Я И. Занимательная Геометрия. Москва: Физматгиз, 1959 (中译本: 别莱利曼. 趣味几何学. 北京: 中国青年出版社, 1980)

[4] Blatner D. The Joy of π. Washington DC: Walker and Company, 1997 (中译本: 布拉特纳. 神奇的 π. 台北: 商业周刊出版股份有限公司, 1999)

[5] Bromwich T J I'A. An Introduction to the Theory of Infinite Series (2nd Edition). London: MacMillan, 1926

[6] 曹敏谦. 数学分析习题集题解. 上海: 上海交通大学应用数学系, 1979

[7] Cartan H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Paris: Hermann, 1964 (中译本: H. 嘉当. 解析函数论初步. 北京: 高等教育出版社, 2008)

[8] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 北京: 高等教育出版社, 2003

[9] Дринфельд Г И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: ИХГУ, 1958 (中译本: 德林费尔特. 普通数学分析教程补篇. 北京: 人民教育出版社, 1960)

[10] Dunham W. Euler, The Master of Us All. Washington DC: MAA, 1999

[11] Euclid. The Thirteen Books of Euclid's Elements. edited by T. L. Heath. New York: Dover Publishing, Inc., 1956 (中译本: 欧几里得. 几何原本. 西安: 陕西科学技术出版社, 1990)

[12] 方企勤, 林源渠. 数学分析习题课教材. 北京: 北京大学出版社, 1990

[13] 费定晖, 周学圣. 吉米多维奇数学分析习题集题解. 济南: 山东科学技术出版社, 2007

[14] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol.1). New Jersey: John Wiley, 1957 (中译本: 费勒. 概率论及其应用. 北京: 科学出版社, 1980)

[15] Фихтенгольц Г М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Moscow: Fizmatlit Publishers, 2003 (中译本: 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第 8 版). 北京: 高等教育出版社, 2006)

[16] Гребенча М К, Новоселов С И. Курс математического анализа. Москва: Учпедгиз, 1951 (中译本: 格列本卡, 诺渥舍诺夫. 数学分析教程. 北京: 高等教育出版社, 1953)
[17] 关肇直. 高等数学教程. 北京: 高等教育出版社, 1959
[18] 郭书春 (汇校). 九章算术. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1990
[19] 华罗庚. 从杨辉三角谈起. // 华罗庚. 华罗庚科普著作选集. 上海: 上海教育出版社, 1984
[20] Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. New York: Dover Publications, Inc., 1990
[21] Knuth D E. The Art of Computer Programming, Vol. 1 Fundamental Algorithms (Third Edition). New Jersey: Addison-Wesley, 1997 (中译本: 克努特. 计算机程序设计艺术, 第一卷 基本算法 (第 3 版). 北京: 国防工业出版社, 2002)
[22] 李岳生, 黄友谦. 数值逼近. 北京: 人民教育出版社, 1978
[23] 廖良文, 许宁. 吉米多维奇数学分析习题全解. 合肥: 安徽人民出版社, 2007
[24] Littlewood J E. A Mathematician's Miscellany. Cambridge: Cambridge University Press, 1986
[25] 沐定夷. 数学分析. 上海: 上海交通大学出版社, 1993
[26] Новоселов С И. Специальный курс тригонометрии, Государственное Издательство. Советская Наука, 1954 (中译本: 诺渥塞洛夫. 三角学专门教程. 北京: 高等教育出版社, 1956)
[27] 欧阳光中, 姚允龙, 周渊. 数学分析. 上海: 复旦大学出版社, 2004
[28] Pólya G, Szegö G. Problems and Theorems in Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1972 (中译本: 波利亚, 舍贵. 数学分析中的问题和定理. 上海: 上海科学技术出版社, 1981)
[29] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis (Third Edition). New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 1976 (中译本: 卢丁. 数学分析原理. 北京: 人民教育出版社, 1979)
[30] Sabbagh K. Dr. Riemann's Zeros. London: Atlantic Books, 2002 (中译本: 卡尔·萨巴. 黎曼博士的零点. 上海: 上海教育出版社, 2006)
[31] 王戈平. 数学分析选讲. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2002
[32] 汪林, 戴正德, 杨富春,郑喜印. 数学分析问题研究与评注. 北京: 科学出版社, 1995
[33] Weyl H. Symmetry. Princeton: Princeton University Press, 1952 (中译本: 魏尔. 对称. 北京: 商务印书馆, 1986)
[34] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义. 北京: 高等教育出版社, 2003
[35] 赵显曾. 数学分析拾遗. 南京: 东南大学出版社, 2006
[36] Зорич В А (Zorich V A). Mathematical Analysis (Fourth Edition). Berlin: Springer, 2002 (中译本: 卓里奇. 数学分析 (第四版). 北京: 高等教育出版社, 2006)

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
习题集与配套辅导书		
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第一册)	沐定夷、谢惠民 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第二册)	谢惠民、沐定夷 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引(第三册)	谢惠民、沐定夷 编著，卫瑞霞、吴茂庆 审校
25766-3	偏微分方程习题集 (第 2 版)	[俄] А. С. 沙玛耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
28888-9	微分几何与拓扑学习题集 (第 2 版)	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
18773-1	微分几何例题详解和习题汇编	陈维桓
俄罗斯数学教材选译		
18303-0	微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析 (第一卷) (第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析 (第二卷) (第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义 (第 3 版)	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
30578-4	复分析导论 (第一卷) (第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论 (第二卷) (第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
29221-3	实变函数论 (第 5 版)	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法 (第 6 版)	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程 (第 6 版)	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义 (第 2 版)	[俄] О. А. 奥列尼克
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫

书号	书名	著译者
27249-9	数值方法 (第 5 版)	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论 (第一卷) 基础代数 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论 (第二卷) 线性代数 (第 3 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论 (第三卷) 基本结构 (第 2 版)	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用 (第一卷) 曲面几何、变换群与场 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21492-5	现代几何学：方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 2 版)	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
22059-9	概率 (第一卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率 (第二卷) (第 3 版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础 (第一卷) 事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础 (第二卷) 理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法 (第 4 版)	[俄] В. Н. 阿诺尔德
18530-0	理论力学 (第 3 版)	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学 (第一卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学 (第二卷) (第 6 版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法 (第一卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法 (第二卷)	[俄] L. P. Shilnikov 等